წრფე სივრცეში.

წრფე სივრცეში შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ორი სიბრტყის თანაკვეთა.

ვთქვათ ორი სიბრტყე

π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, და π_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

პარალელური არაა, მაშინ მათი თანაკვეთა არის წრფე. წერტილი $M(x, y, z)$ ძევს ამ წრფეზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ იგი ძევს ორივე სიბრტყეზე, ანუ არის

$$\begin{cases} \boldsymbol{A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0} \\ \boldsymbol{A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0} \end{cases} \qquad (1)$$

სისტემის ამონახსნი.

(1)-ს ეწოდება წრფის ზოგადი განტოლება სივრცეში.

წრფის სპეციალური სახის განტოლებები.

ესენია:

1. წრფის პარამეტრული განტოლება;
2. წრფის კანონიკური განტოლება;
3. ორ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება;

წრფის პარამეტრულ განტოლებას აქვს სახე

$$\begin{cases} \boldsymbol{x - x_0 = lt} \\ \boldsymbol{y - y_0 = mt} \\ \boldsymbol{z - z_0 = nt} \end{cases} \qquad (2).$$

ეს განტოლება განსაზღვრავს წრფეს რომელიც გადის $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე და პარალელურია s=(l,m,n) ვექტორის.

წერტილი M(x,y) ეკუთვნის ამ წრფეს ნიშნავს რომ $\overrightarrow{M_0\mathrm{M}}$ პარალელურია s=(l,m,n) ვექტორის, ანუ რომ $\overrightarrow{M_0\mathrm{M}}$ = ts. თუ ამ ბოლო ტოლობას ჩავწერთ კოორდინატებში მივიღებთ პარამეტრულ განტოლებას.

წრფის კანონიკური განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \qquad (3).$$

ეს განტოლება განსაზღვრავს ისევ წრფეს რომელიც გადის $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე და პარალელურია s=(l,m,n) ვექტორის. ამ განტოლების მისაღებად შევნიშნოთ რომ $\overrightarrow{M_0M}$ =(x-x_0,y-y_0, $z-z_0$) პარალელურია s=(l,m,n) ვექტორის, ანუ ამ ვექტორების კოორდინატები პროპორციულია.

ორ მოცემულ $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ წერტილზე გამავალ წრფის განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z-z_1} \qquad (4).$$

ამ განტოლების მისაღებად შევნიშნოთ რომ $\overrightarrow{M_1M}$=$(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$ პარალელურია $\overrightarrow{M_1M_2}$=$(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ ვექტორის, ანუ შესაბამისი კოორდინატები პროპორციულია.

წრფის კანონიკური განტოლებიდან პარამეტრულ განტოლებაზე გადასვლა (ანუ (3)-დან (2)-ზე) ან პირიქით ადვილია. ეს ხდება პარამეტრის შემოღებით ან პირიქით გამორიცხვით.

მაგალითად

ვთქვათ წრფე მოცემულია პარამეტრული განტოლებით

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3t \\ z = -1+2t \end{cases} \qquad (ა)$$

კანონიკური განტოლების მისაღებდ გამოვრიცხოთ t პარამერტი, ანუ ამოვხსნათ t სამივე ტოლობიდან: $t = x-2$; $t = \frac{y}{3}$; : $t = \frac{z+1}{2}$ და მარჯვენა მხარეები გავუტოლოთ, მივიღებთ კნონიკურ განტოლებას:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2} \qquad (ბ).$$

ეხლა პირიქით თუ გვაქვს (ბ), მაშინ შემოვიღებთ პარამეტრს, ანუ გავუტოლებთ ამ ყველაფერს t-ს: $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2}=t$ და ამოვხსნით x,y და z-ს. მივიღებთ (ა)-ს.

წრფის კანონიკური განტოლებიდან ზოგად განტოლებაზე გადასვლა (ანუ (ანუ (3)-დან (1)-ზე) **ხდება ასე:**

(3) არის ორმაგი ტოლობა. ადავწეროთ ეს ტოლობები სისტემის სახით

$$\begin{cases}\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}\\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{z-z_0}{n}\end{cases} \quad \text{ანუ} \quad \begin{cases}\boldsymbol{mx-ly+(ly_0-mx_0)=0}\\ \boldsymbol{nx-lz+(lz_0-nx_0)=0}\end{cases}$$

რაც არის კერძო შემთხვევა წრფი ზოგადი განტოლების.

წრფის ზოგადი განტოლებიდან კანონიკური განტოლებაზე გადასვლა (ანუ (1)-დან (3)-ზე) **ხდება ასე:**

$$\begin{cases}\boldsymbol{A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0}\\ \boldsymbol{A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0}\end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

სისტემა შედგება π_1 და π_2 სიბრტყეების განტოლებებისგან:

π_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, და π_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

π_1 სიბრტყის ნორმალური ვექტორია $n_1=(A_1,B_1,C_1)$;

π_2 სიბრტყის ნორმალური ვექტორია $n_2=(A_2,B_2,C_2)$.

ამ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი $n_1\times n_2$ შეიძლება განვიხილოთ როგორც (1)-ით მოცემული წრფის მიმმართველი ვექტორი s =(l,m,n). მართლაც $n_1\times n_2$ ვექტორი მართობულია n_1 და n_2 ვექტორების (ვექტორული ნამრავლის განსაზღვრებით) ე.ი პარალელურია π_1 და π_2 სიბრტყეების და მაშასადამე მათი თანაკვეთით მიღებული წრფის. კანონიკური განტოლების დასაწერად გვინდა კიდევ ამ წრფეზე მდებარე ერთი რომელიმე წერტილის კოორდინატები, რასაც გავიგებთ (1)-სისტემიდან, მაგალითად ჩასმით $z=0$.

მაგალითი. წრფის ზოგადი განტოლებაა $\begin{cases}x-y\mp z-2=0\\ x+y-z=0\end{cases}$

$n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=$ 2j + 2k, ე.ი. წრფის მიმმართველი ვექტორია $s=(0,2,2)$,

შეგვიძლია შევცვალოთ მისი პარალელური ვექტორით (0,1,1) .

წრფეზე მდებარე რომელიმე ერთი წერტილის საპოვნელად (1)-ში ჩავსვათ z=0: $\begin{cases} x-y-2=0 \\ x+y=0 \end{cases}$. ამოხსნა გვაძლევს $x=1,\ y=-1$,

ე.ი. წერტილი M(1,-1,0) ეკუთვნის წრფეს და მისი მიმმართველი ვექტორია (0,1,1), ამიტომ წრფის კანონიკური განტოლებაა

$\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$.