სიბრტყე სივრცეში

განვიხილოთ პირველი რიგის განტოლება სამი უცნობით

$\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}$, სადაც $\boldsymbol{A^2 + B^2 + C^2 \neq 0}$ (1)

ანუ A,B,C კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც არანულოვანია.

თეორემა. **ნებისმიერი სიბრტყე სივრცეში მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოიცემა (1) განტოლებით და პირიქით, ნებისმიერი ასეთი განტოლება მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში აღწერს სიბრტყეს.**

დამტკიცება. მართლაც ვთქვათ $\boldsymbol{\pi}$ სიბრტყე მოცემულია თავისი M_0 წერტილით და **n** არანულოვანი ნორმალური ვექტორით. მაშინ სივრცე სამ ნაწილად გაიყოფა: ერთი ნაწილი სიბრტყის წერტილებია, დანარჩენი ორი ნაწილი კი სიბრტყის სხვადასხვა მხარეს მდებარე წერტილებისგან შედგება. ის თუ ამ სამი ნაწილიდან სად მდებარეობს სივრცის ნებისმიერი M წერტილი განისაზღვრება სკალარული ნამრავლის n $\overrightarrow{M_0M}$ ნიშნით. კერძოდ:

თუ M წერტილი π სიბრტყეზე მდებარეობს მაშინ n $\overrightarrow{M_0M}$=0 რადგან კუთხე n და $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორებს შორის მართია. თუ ეს M წერტილი π სიბრტყეზე არ მდებარეობს მაშინ ეს კუთხე მახვილია და n $\overrightarrow{M_0M}$>0, ან ბლაგვია და n $\overrightarrow{M_0M}$<0. ამ სკალარული ნამრავლის ნიშანი სიბრტყის ერთ მხარეს მდებარე წერტილებითვის ერთნაირია.

ავღნიშნოთ კოორდინატები: $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $M = (x, y, z)$, $n = (A, B, C)$. მაშინ $\overrightarrow{M_0M}$=$(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ და თუ M წერტილი π სიბრტყეზე მდებარეობს გვაქვს:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

ანუ ფრჩხილების გახსნით გვაქვს:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ სადაც } D = -Ax_0 + By_0 - Cz_0.$$

აქ A,B,C კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც არანულოვანია, რადგან $n = (A, B, C)$ ვექტორი არანულოვანია. ამით დამტკიცდა თეორემის პირველი ნაწილი, ე.ი. რომ სიბრტყე არის (1) განტოლების გეომეტრიული სახე.

თეორემის მეორე ნაწილის დასამტკიცებლად ავირჩიოთ რიცხვები $x = x_0$, $y = y_0$,

$z = z_0$, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1) განტოლებას. (ასეთი რიცხვები არსებობს, მაგ. თუ $A \neq 0$, შეგვიძლია ავიღოთ $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, x_0=$-\frac{D}{A}$). ამ რიცხვებს შეესაბამება წერტილი $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, რომელიც ეკუთვნის (1) განტოლების გეომეტრიულ სახეს. ვაქვს

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \qquad (2)$$

გამოვაკლოთ (1)-ს (2), მივიღებთ

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (3)$$

(3) ტოლობა არის ორთოგონულობის კრიტერიუმი ვექტორებისთვის n =(A,B,C) და $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, (y - y_0, z - z_0)$, სადაც წერტილი M= (x, y, z). ეს კრიტერიუმი სრულდება იმ სიბრტყის წერტილებისთვის რომელიც გადის M_0 წერტილზე და n =(A,B,C) ვექტორის მართობულია (და არ სრულდება სივრცის სხვა წერტილებისთვის.) ე.ი. (1) არის აღნიშნული სიბრტყის განტოლება. ■

განსაზღვრება. (1) განტოლებას $\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}$ **ეწოდება სიბრტყის ზოგადი განტოლება. კოეფიციენტებს A,B,C აქვს გეომეტრიული აზრი: ვექტორი n=(A,B,C) სიბრტყის მართობულია, ამიტომ მას ეწოდება სიბრტყის ნორმალური ვექტორი.**

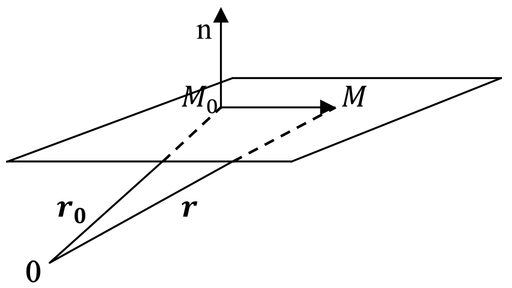
სიბრტყის სპეციალური სახის განტოლებები.

ესენია:

1. სიბრტყის ვექტორული და პარამეტრული განტოლებები;
2. სამ მოცემულ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება;
3. სიბტყის განტოლება მონაკვეთებში;
4. სიბრტყის ნორმალური განტოლება;

1. ვთქვათ r_0 და r M_0 და M წერტილების რადიუს ვექტორებია. მაშინ $\overrightarrow{\boldsymbol{M_0M}}$=$\boldsymbol{r - r_0}$ და პირობა რომ სიბრტყე გადის M_0 წერტილზე და n ვექტორის მართობულია შეგვიძლია ჩავწეროთ სკალარული ნამრავლის გამოყენებით (ანუ n და $\boldsymbol{r - r_0}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია)

$$n(r - r_0) = 0, \qquad (4)$$



(4) განტოლებას ეწოდება **სიბრტყის ვექტორული განტოლება.**

ფიქსირებულ სიბრტყეზე (სივრცეში) ავირჩიოთ ორი არანულოვანი და არაკოლინეარული ვექტორი, ანუ ბაზისი e_1, e_2. (გავიხსენოთ ბაზისი).

ანუ არსებობს რიცხვები t_1, t_2 რომ

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M_0M}}=t_1e_1+\ t_2e_1,$$

ანუ

$$r-r_0=\ t_1e_1+\ t_2e_1. \qquad (5)$$

(5) განტოლებას ეწოდება **სიბრტყის პარამეტრული განტოლება, პარამეტრებით** $\boldsymbol{t_1, t_2 \in R}$**.**

სამ მოცემულ წერტილზე $\boldsymbol{M_1=(x_1,y_1,z_1)}$, $\boldsymbol{M_2=(x_2,y_2,z_2)}$, $\boldsymbol{M_3=(x_3,y_3,z_3)}$, **გამავალი სიბრტყის განტოლებაა**

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x-x_1} & \boldsymbol{y-y_1} & \boldsymbol{z-z_1} \\ \boldsymbol{x_2-x_1} & \boldsymbol{y_2-y_1} & \boldsymbol{z_2-z_1} \\ \boldsymbol{x_3-x_1} & \boldsymbol{y_3-y_1} & \boldsymbol{z_3-z_1} \end{vmatrix} = \boldsymbol{0}\,. \qquad \textbf{(6)}$$

დამტკიცება. უნდა ვაჩვენოთ რომ ამ სამ მოცემულ წერტილზე გამავალ სიბრტყეზე მდებარე M=(x,y,z) წერტილების სიმრავლე მოიცემა (6) განტოლებით.

(6) ნიშნავს რომ სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი ნულია:

კერძოდ ამ სამი ვექტორის კოორდინატებია დეტერმინანტის სტრიქონები, ანუ:

$\overrightarrow{M_1M} = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_1})$;

$\overrightarrow{M_1M_2} = (\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1})$ და

$\overrightarrow{M_1M_3} = (\boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_3} - \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_3} - \boldsymbol{z_1})$

ვექტორებია შერეული ნამრავლი ნულია,

ეს კი არის ამ სამი ვექტორის კომპლანარობის (ანუ ერთ სიბრტყეზე მდებარეობის) კრიტერიუმი. ანუ ეს არის კრიტერიუმი M, M_1, M_2, M_3, წერტილების ერთ სიბრტყეზე ყოფნის. რ.დ.გ.

შევნიშნოთ რომ თუ (6)-ს გავშლით პირველი სტრიქონის მიხედვით გვექნება

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1} & \boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1} \\ \boldsymbol{y_3} - \boldsymbol{y_1} & \boldsymbol{z_3} - \boldsymbol{z_1} \end{vmatrix} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_1}) - \begin{vmatrix} \boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1} \\ \boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{z_3} - \boldsymbol{z_1} \end{vmatrix} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_1}) + \begin{vmatrix} \boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{y_3} - \boldsymbol{y_1} \end{vmatrix} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_1}) = 0$$

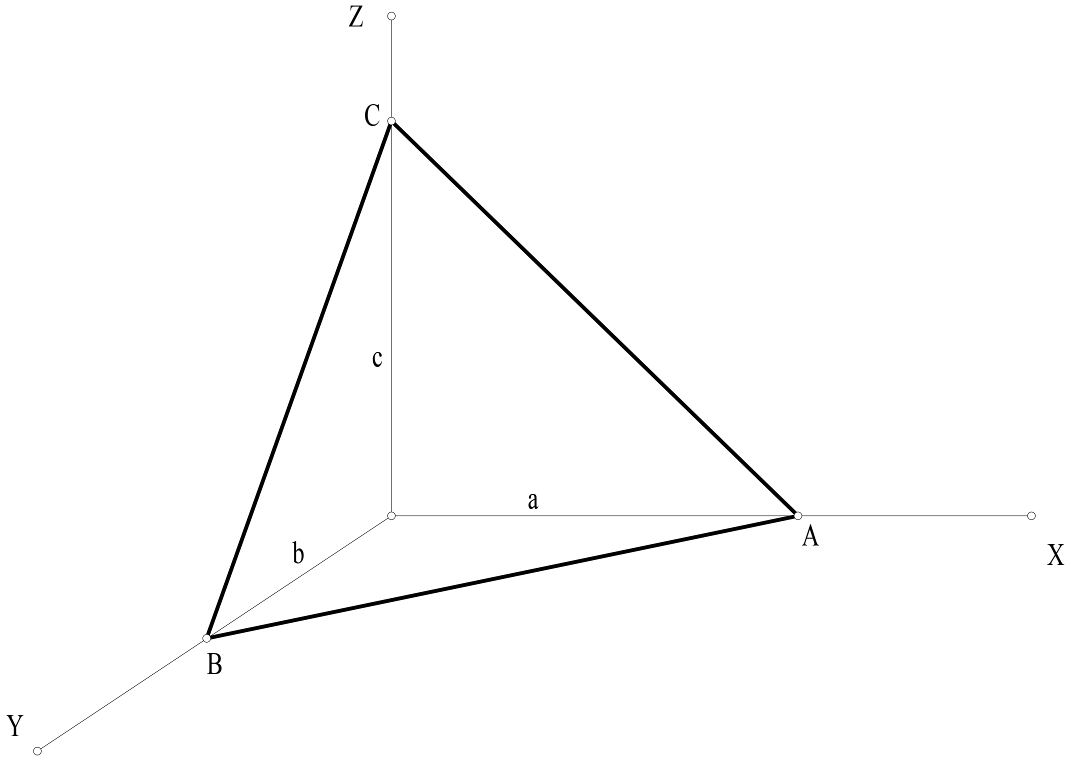
(7).

და ფრჩხილების გახსნის მერე მივიღებთ სიბრტყის ზოგად განტოლებას.

(7)-ში მეორე რიგის დერერმინანტები არის $\overrightarrow{M_1M_2} = (\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1})$ და

$\overrightarrow{M_1M_3} = (\boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_3} - \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_3} - \boldsymbol{z_1})$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლის კოორდინატები. ეს ვექტორული ნამრავლი ორივე ვექტორის და ამიტომ მათზე გამავალი სიბრტყის მართობულია; ე.ი. სიბრტყის ნორმალური ვექტორია და მისი გამოჩენა სიბრტყის ზოგად განტოლებაში დიდი სიურპრიზი არაა.

სიბტყის განტოლება მონაკვეთებში



ვთქვათ სიბრტყე საკოორდინტო ღერძებზე ჩამოჭრის მონაკვეთებს **a,b,c,** მაშინ მისი განტოლებაა

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}+\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}}+\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{c}}=\mathbf{1} \qquad \textbf{(8).}$$

დამტკიცება. ეს სიბრტყე გადის წერტილებზე $A=(a,0,0); B=(0,b,0);\ C=(0,0,c)$. გამოვიყენოთ (6):

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$

ანუ

bc(x-a)+ acy+abz=0;

გავყოთ abc-ზე და გავამარტივოთ, მივიღებთ (8)-ს.

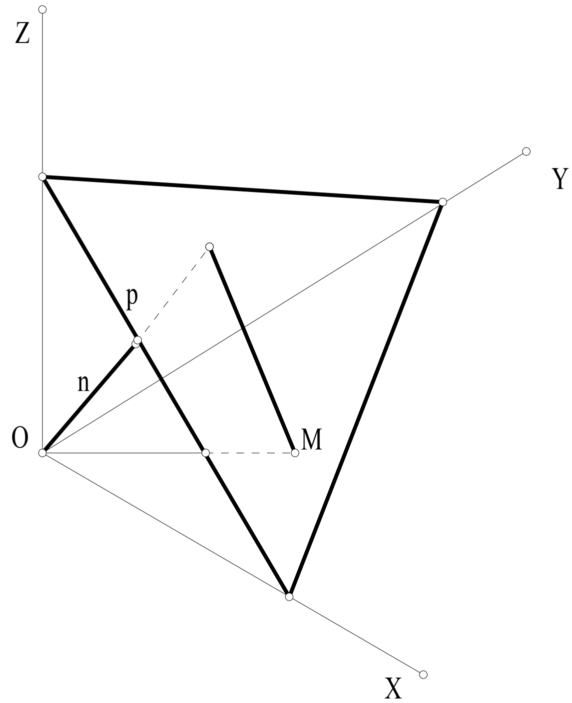
სიბრტყის ნორმალური განტოლება ეწოდება განტოლებას

$$\boldsymbol{x cos\alpha + y cos\beta + z cos\gamma + p = 0}, \quad \textbf{(9)}$$

სადაც $\vec{\boldsymbol{n}}$ სიბრტყისკენ მიმართული ერთეულოვანი ნორმალური ვექტორია, (იხ. ნახ) ამიტომ მიმართულების კოსინუსებში (საკოორდინატო ღერძებთან შედგენილი კუთხეები) მისი კოორდინატებია,

$$\vec{n} = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma),$$

ხოლო $\boldsymbol{p}$ მანძილია სათავიდან სიბრტყემდე.



(9) განტოლება უბრალოდ იმას ნიშნავს, რომ სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი M(x,y,z) წერტილისათვის $\overrightarrow{OM}$ ვექტორის ალგებრული გეგმილი $\vec{n}$ ვექტორის მიმართულებაზე ტოლია p-რიცხვის. (კვლავ იხ. ზემოთ ნახატი, აგრეთვე გავიხსენოთ წრფის ნორმალური განტოლება და შევადაროთ.)

თუ სიბრტყე მოცემულია ზოგადი განტოლებით

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

მაშინ როგორც ვიცით ვექტორი კოორდინატებით (A,B,C) სიბრტყის ნორმალური ვექტორია. ამ ვექტორის $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ -ზე გაყოფით მივიღებთ ერთეულოვან ნორმალურ ვექტორს. აქ ხდება ვექტორის გაყოფა მის სიგრძეზე (ამიტომ მივიღებთ ერთეულოვან ვექტორს), ხოლო ნიშანი რომელიც D –ს ნიშნის საწინააღმდეგო უნდა ავიღოთ, იმას უზრუნველყოფს რომ მიღებული ერთეულოვანი ნორმალური ვექტორი სიბრტყისკენ იქნება მიმართული.

მაგალითი. სიბრტყის ზოგადი განტოლებაა $2x + y - 2z + 3 = 0$.

სიბრტყის ნორმალური განტოლების მისაღებად გავყოთ ეს განტოლება $-\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = -3$ –ზე (ავიღეთ მინუსით, რადგან D=3> 0) მივიღებთ

$-\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 = 0.$