წრფეების ურთიერთგანლაგება სიბრტყეზე

სიბრტყეზე ორი წრფე შეიძლება იყოს პარალელური (მათ შორის ერთმანეთს დამთხვეული) ან თანამკვეთი(მათ შორის მართობული). ორი L_1, L_2 წრფის ურთიერთგანლაგება შეიძლება განისაზღვროს მატი ზოგადი განტოლებებით:

L_1: a_1x+b_1y+c_1=0 და L_2: a_2x+b_2y+c_2=0.

გავიხსენოთ ამ წრფეების ნორმალური ვექტორებია შესაბამისად

n_1=(a_1,b_1) და n_2=(a_2,b_2), ამიტომ

$L_1 \mid\mid L_2 <=> \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$,

ხოლო წრფეები ერთმანეთს ემთხვევა ნიშნავს:

$L_1 = L_2 <=> \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

მაგალითი. წრფეები x+2y+5=0 და 2x+4y-5=0 პარალელურია, მაგრამ არ ემთხვევა:

1/2 =2/4 $\neq 5/(-5)$.

ორი წრფის პერპენდიკულარობა კი ნიშნავს მათი ნორმალური ვექტორების მართობულობას:

$L_1 \perp L_2 <=> a_1 a_2 + b_1 b_2$=0.

მაგალითი. წრფეები x+2y-3=0 და 2x-y+7=0 მართობულია: 1$\times 2 + 2 \times (-1)$=0.

თუ წრფეების განტოლებები მოცემულია კუთხური კოეფიციენტებით y=$\boldsymbol{k_1}$x+$\boldsymbol{b_1}$,

y=$\boldsymbol{k_2}$x+$\boldsymbol{b_2}$, მაშინ

წფეები პარალელურია $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{k_1 = k_2}$,

წფეები მართობულია $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{k_1 k_2}$= -1.

(ეს იქიდან გამოდის რომ k_1= -$\frac{a_1}{b_1}$, k_2= -$\frac{a_2}{b_2}$).

კუთხე ორ წრფეს შორის.

L_1 და L_2 წრფეები გადაკვეთისას ორ მოსაზღვრე კუთხეს ქმნიან. მათ შორის უმცირესი გამოითვლება ფორმულით:

$$\mathbf{cos\varphi} = \frac{|\boldsymbol{n_1 n_2}|}{|\boldsymbol{n_1}||\boldsymbol{n_2}|} = \frac{|\boldsymbol{a_1\, a_2 + b_1 b_2}|}{\sqrt{\boldsymbol{a_1}^2+\boldsymbol{b_1}^2}\sqrt{\boldsymbol{a_2}^2+\boldsymbol{b_2}^2}}.$$

აქ გამოვიყენეთ n_1, n_2 ნორმალების სკალარული ნამრავლის, და ვექტორის სიგრძის ფორმულა (გავიხსენოთ).

კუთხური კოეფიციენტებით საშუალებით $k_1 = tg\varphi_1$, $k_2 = tg\varphi_2$, იგივე კუთხე გამოითვლება ფორმულით:

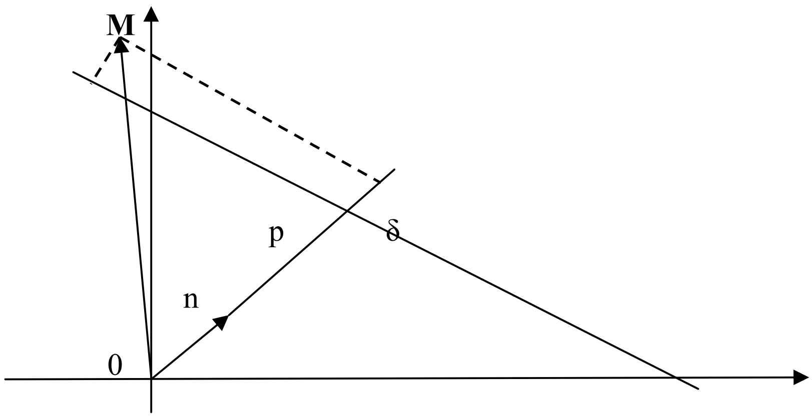
$$\mathbf{tg\varphi = tg}(\boldsymbol{\varphi_1 - \varphi_2}) = \frac{\boldsymbol{k_1 - k_2}}{\boldsymbol{1 + k_1 k_2}}.$$

მანძილი წერტილიდან წრფემდე.

მოცემული M_0 წერტილიდან მანძილის გამოსათვლელად L წრფემდე წრფის ნორმალური სახის განტოლებაა მოხერხებული. გავიხსენოტ ეს განტოლება:

$$\boldsymbol{x cos\varphi + y sin\varphi - p = 0}, \qquad (1\ )$$

სადაც **n=(cosφ, sinφ)** ერთეულოვანი ნორმალური რადიუს ვექტორია , φ-კუთხეა **n** ვექტორსა და აბცისთა ღერძს **OX-**შორის, **p** მანძილია სათავიდან წრფემდე.



გვაინტერესებს მანძილი **δ , M(x,y)** წერტილიდან (1) განტოლებით მოცემულ წრფემდე.

ფორმულა ასეთია:

$$\delta=|\boldsymbol{x\cos\varphi + y\sin\varphi - p}|. \qquad (2)$$

დამტკიცება. p+δ არის $\overrightarrow{OM}\,(x,y)$ ვექტორის გეგმილი n=($\boldsymbol{\cos\varphi}, \boldsymbol{\sin\varphi}$) ნორმალის მიმართულებაზე.

გეგმილის გამსაზღვრებით (გავიხსენოთ) ეს იგივეა რაც სკალარული ნამრავლი $\overrightarrow{OM}$ ვექტორისა n ვექტორზე, ანუ:

p+δ= $\boldsymbol{x\cos\varphi + y\sin\varphi}$, და აქედან გავიგებთ δ-s, რომლიც დადებითი რიცხვი უნდა იყოს.

ბოლოს ვთქვათ გვაქვს იგივე ამოცანა მაგრამ წრფე მოცემულია ზოგადი სახით:

გვაინტერესებს მანძილი M(x,y) წერტილიდან ax+by+c=0 წრფემდე.

ფორმულა ასეთია:

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{|\boldsymbol{ax+by+c}|}{\sqrt{\boldsymbol{a^2+b^2}}}. \qquad \textbf{(3)}$$

დამტკიცება. გამოსახულება $\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ანუ, $\sqrt{a^2+b^2}$-ზე გაყოფა წრფის ზოგად განტოლებას მიიყვანს ნორმალურ სახეზე. მართლაც

$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \mathbf{x}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \mathbf{y}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. ახლა x და y ცვლადების კოეფიციენტების ჯამი უდრის 1-ს, ანუ გვაქვს ნორმალური სახის განტოლება და ვისარგებლოთ (2) ფორმულით.