წრფე სიბრტყეზე

განვიხილოთ პირველი რიგის ალგებრული განტოლება

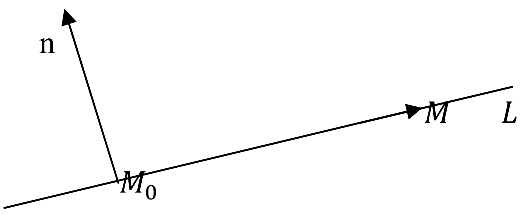
$$ax+by+c=0 \qquad (1)$$

სადაც a, b კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც არანულოვანია, $a^2+b^2 \neq 0$.

(1) განტოლებას ეწოდება წრფივი განტოლება.

თეორემა. *ნებისმიერი წრფე სიბრტყეზე მათკუთხა კოორდინატთა სისტემაში წარმოიდგინება განტოლებით* ax+by+c=0 , $a^2+b^2 \neq 0$, *და პირიქით, ნებისმიერი ასეთი განტოლება აღწერს წრფეს.*

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი L წრფე სიბრტყეზე. ვთქვათ წერტილი $M_0(x_0,y_0)$ ძევს L წრფეზე და ვექტორი n=(a,b) პერპენდიკულარულია L წრფის.



ასეთ პირობებში ნებისმიერი წერტილი M(x,y) ეკუთვნის L წრფეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორი მართობულია n ვექტორის. დავწეროთ ამ ორი ვექტორის მართობულობის პირობა კოორდინატებში: ვიცით $\overrightarrow{M_0M}$=(x-x_0,y-y_0) და n=(a,b) ამიტომ მათი სკალარული ნამრავლი ტოლია ნულის ნიშნავს

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0,$$

ანუ $$ax+by+c=0, \qquad \text{სადაც } c=-ax_0-by_0.$$

თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცდა.

მეორე ნაწილის დასამტკიცებლად განვიხილოთ (1) განტოლება. ამ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელი არაა, (მაგალითად თუ a$\neq 0$, შეგვიძლია ავიღოთ ამონახნი x=$\frac{-c}{a}$, y=0) ანუ (1) განტოლებით მოცემულია წერტილთა არაცარიელი სიმრავლე. ვთქვათ $M_0(x_0,y_0)$ წერტილი ეკუთვნის ამ სიმრავლეს. ე.ი.

$$ax_0+by_0+c=0 . \qquad (2)$$

გამოვაკლოთ (1)-ს (2), მივიღებთ

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0. \qquad (3)$$

მიღებული განტოლება (3) წარმოადგენს $\overrightarrow{M_0M}$=(x-x_0,y-y_0) და n=(a,b) ვექტორების მართობულობის პირობას. მაშასადამე M(x,y) წერტილი ეკუთვნის (1) განტოლებით მოცემულ სიმრავლეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორი პერპენდიკულარულია n ვექტორის, ანუ როცა M წერტილი ძევს წრფეზე რომელიც გადის M_0 წერტილზე და პერპენდიკულარულია n ვექტორის.

განსაზღვრება. განტოლებას ax+by+c=0, $a^2+b^2 \neq \mathbf{0}$ **ეწოდება წრფის ზოგადი სახის განტოლება, ხოლო ვექტორს n=(a,b) წრფის ნორმალი. ეს ვექტორი, ისევე როგორც წრფის განტოლება სალსახად განისაზღვრება პროპორციულობამდე სიზუსტით.**

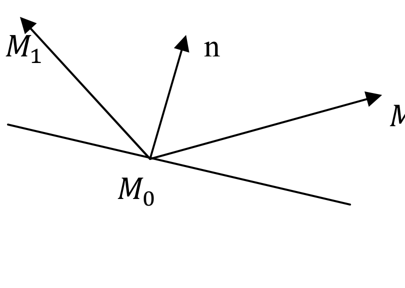
მაგალითი. ვიპოვოთ იმ წრფის ზოგადი განტოლება, რომელიც გადის A(1,2) წერტილზე და რომლიც ნორმალური ვექტორია n=(3,4).

ნორმალური ვექტორის კოორდინატები გვაძლევენ ზოგადი განტოლების კოეფიციენტებს x და y ცვლადებთან, ამიტომ გნტოლებას აქვს სახე

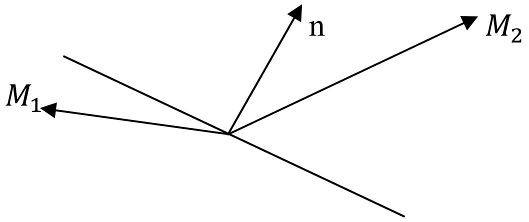
$$3x+4y+c=0.$$

უცნობი კოეფიციენტი c რომ გავიგოთ ჩავსვათ ამ განტოლებაში A წერტილის კოორდინატები: $3 \times 1 + 4 \times 2 + c = 0$, ანუ $c= -11$. საბოლოოდ გვაქვს განტოლება 3x+4y-11=0.

მაგალითი. განვიხილოთ ორი წერტილი M_1, M_2 რომელიც წრფეზე არ ძევს. მაშინ ამ წერტილების კოორდინატების ჩასმით წრფის ზოგად განტოლებაში 0-ს არ მივიღებთ. (რადგან $\overrightarrow{M_0 M_1}$ და $\overrightarrow{M_0 M_2}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლები n ვექტორთან არანულოვანია.) იხ. ნახ. (ა) , (ბ).



(ა)



(ბ)

თუ მივიღეთ ორივე დადებითი რიცხვი, (ანუ სკალარული ნამრავლები $\overrightarrow{M_0\,M_1}$. n>0 და $\overrightarrow{M_0\,M_2}$. n >0, ანუ კუთხეები $\widehat{\overrightarrow{M_0M_1}, n}$ და $\widehat{\overrightarrow{M_0M_2}, n}$ მახვილია) ან ორივე უარყოფითი, (ანუ სკალარული ნამრავლები $\overrightarrow{M_0\,M_1}$. <0 და $\overrightarrow{M_0\,M_2}$. n <0, ანუ კუთხეები $\widehat{\overrightarrow{M_0M_1}, n}$ და $\widehat{\overrightarrow{M_0M_2}, n}$ ბლაგვია) მაშინ ეს ორი წერტილი წრფის ერთ მხარეს მდებარეობს. ანალოგიურად თუ მივიღეთ ხსვადახვა ნიშნიანი რიცხვები მაშინ ეს ორი წერტილი წრფის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობს..

წრფის სპეციალური სახის განტოლებები.

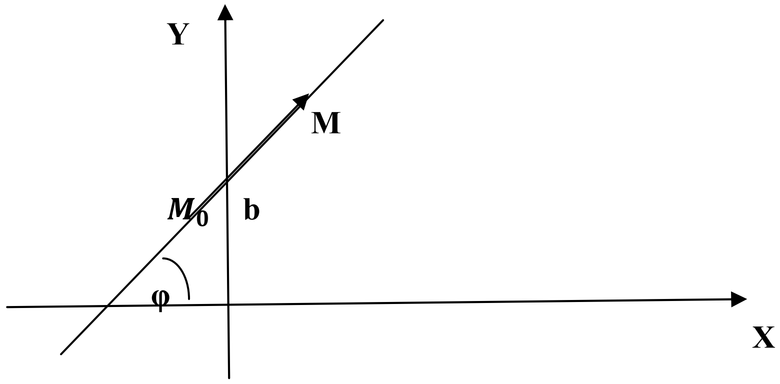
ესენია:

1. წრფის განტოლება კუთხური კოეფიციენტით;
2. წრფის პარამეტრული განტოლება;
3. წრფის ვექტორული განტოლება;
4. წრფის კანონიკური განტოლება;
5. ორ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება;
6. წრფის განტოლება მონაკვეთებში;
7. წრფის ნორმალური განტოლება;

1. წრფის განტოლებას კუთხური კოეფიციენტით აქვს სახე:

$$\mathbf{y=kx+b,}$$

სადაც k=tg φ, φ კუთხეა წრფესა და OX ღერძს შორის,
b ემთხვევა წრფისა და OY ღერძის გადაკვეთის ორდინატს.



თუ წრფე გადის $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე, მაშინ $\frac{y-y_0}{x-x_0}$ = tg φ, k= tg φ, b=y_0-$x_0$tgφ.

მაგალითი. ვიპოვოთ წრფის განტოლება რომელიც გადის M(2,-2) წერტილზე და აბცისთა ღერძთან ადგენს კუთხეს π/3.

რადგან k=tg π/3=$\sqrt{3}$ განტოლებას აქვს სახე y=$\sqrt{3}$ x+b; b-ს გასაგებად ჩავსვათ M წერტილის კოორდინატები: -2=$\sqrt{3} \times 2 + b$, ანუ b=-2-2$\sqrt{3}$, საბოლოოდ გვაქვს: y=$\sqrt{3}$ x-2-2$\sqrt{3}$.

2. წრფის პარამეტრულ განტოლებას აქვს სახე

$$\begin{cases} \boldsymbol{x - x_0 = lt} \\ \boldsymbol{y - y_0 = mt} \end{cases}$$

ეს განტოლება განსაზღვრავს წრფეს რომელიც გადის $M_0(x_0,y_0)$ წერტილზე და პარალელურია s=(l,m) ვექტორის. წერტილი M(x,y) ეკუთვნის ამ წრფეს ნიშნავს რომ $\overrightarrow{M_0M}$ პარალელურია s=(l,m) ვექტორის, ანუ რომ $\overrightarrow{M_0M}$ = ts. თუ ამ ბოლო ტოლობას ჩავწერთ კოორდინატებში მივიღებთ პარამეტრულ განტოლებას.

3. წრფის ვექტორულ განტოლებას აქვს სახე

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0}$+**ts,**

სადაც r=$\overrightarrow{OM}$, r_0= $\overrightarrow{OM_0}$ წრფის M და M_0წერტილების რადიუს ვექტორებია.

ეს განტოლება არის უბრალოდ ტოლობა $\overrightarrow{M_0\mathrm{M}}$ = ts ოღონდ უნდა ჩაწერილი ასეთი სახით $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0}$=**ts** .

4. წრფის კანონიკური განტოლებას აქვს სახე

$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}$,

ეს განტოლება განსაზღვრავს ისევ წრფეს რომელიც გადის $M_0(x_0,y_0)$ წერტილზე და პარალელურია s=(l,m) ვექტორის. ამ განტოლების მისაღებად შევნიშნოთ რომ $\overrightarrow{M_0\mathrm{M}}$ პარალელურია s=(l,m) ვექტორის, ანუ ამ ვექტორების კოორდინატები პროპორციულია.

5. ორ მოცემულ $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ წერტილზე გამავალ წრფის განტოლებას აქვს სახე

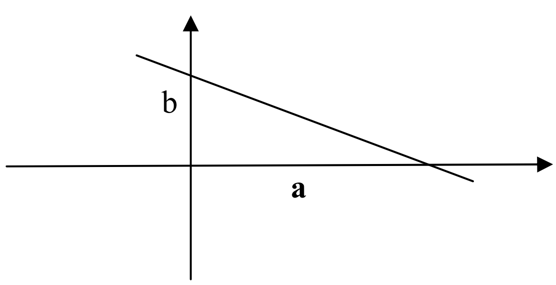
$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

ამ განტოლების მისაღებად შევნიშნოთ რომ $\overrightarrow{MM_1}$ პარალელურია $\overrightarrow{M_1M_2}$ ვექტორის, ანუ შესაბამისი კოორდინატები პროპორციულია.

6. წრფის განტოლება მონაკვეთებში აქვს სახე

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ =1 .

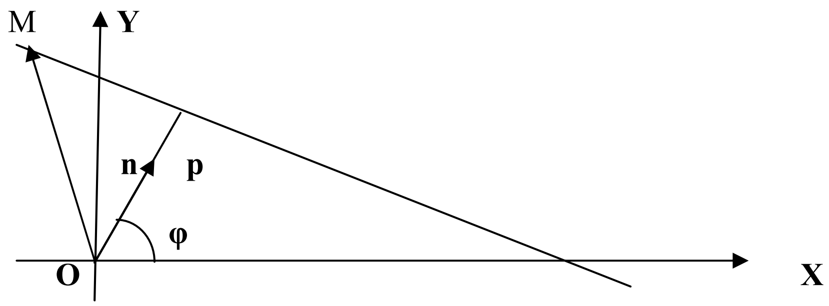
ეს განტოლება განსაზღვრავს წრფეს, რომელიც საკოორდინატო ღერძებზე ჩამოჭრის a და b მონაკვეთებს.



სხვა სიტყვებით, საძიებელი წრფე გადის წერტილებზე კოორდინატებით (a,0) და (0,b). ამ ორ წერტილზე გამავალ წრფეს კი აქვს განტოლება $\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}$. გავამარტივოთ და მივიღებთ წრფის განტოლებას მონაკვეთებში.

8. წრფის ნორმალურ განტოლება აქვს სახე

$\boldsymbol{x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0}$, სადაც **n=(cos$\varphi$, sin$\varphi$)** ერთეულოვანი ნორმალური რადიუს ვექტორია , φ-კუთხეა **n** ვექტორსა და აბცისთა ღერძს **OX**-შორის, **p** მანძილია სათავიდან წრფემდე.



შევნიშნოთ რომ გამოსახულება $\boldsymbol{x\cos\varphi + y\sin\varphi}$ არის $\overrightarrow{OM}$=(x,y) და n=(cosφ, sinφ) ერთეულოვანი ნორმალის სკალარული ნამრავლი. განტოლება გვეუბნება რომ ეს სკალარული ნამრავლი უდრის p-ს. მართლაც, რადგან n ვექტორი ერთეულოვანია სკალარული ნამრავლი $\overrightarrow{OM}$. n უდრის $\overrightarrow{OM}$ ვექტორის გეგმილს n ვექტორის მიმართულებაზე, (გავიხსენოთ გეგმილის განსაზღვრება) რაც ნახატიდან ჩანს რომ p-ს ტოლია.