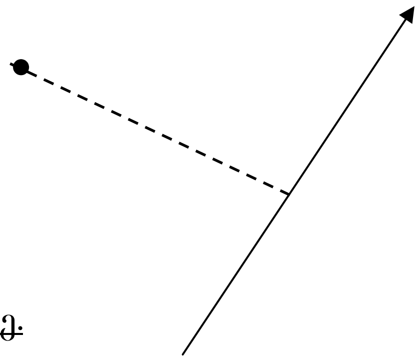
ვექტორის კოორდინატები

გავიხსენოთ რომ წერტილის პროექციის (გეგმილის) მოსაძებნად ღერძზე (ანუ მიმართულ წრფეზე) ამ წერტილიდან ღერძზე უნდა დავუშვათ პერპენდიკულარი და ავიღოთ დაგაკვეთის წერტილი .



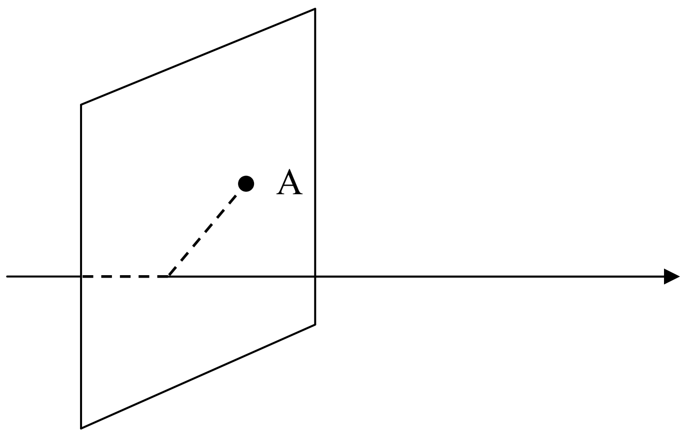
სიბრტყეზე
წერტილის პროექცია ღერძზე.

ხოლო სივრცეში წერტილის ღერძზე გეგმილის საპოვნად ამ წერტილზე უნდა გავავლოთ ღერძის პერპენდიკულარული სიბრტყე;

საძიებელი გეგმილი ამ სიბრტყის და ღერძის გადაკვეთის წერტილია.

სივრცეში

წერტილის პროექცია



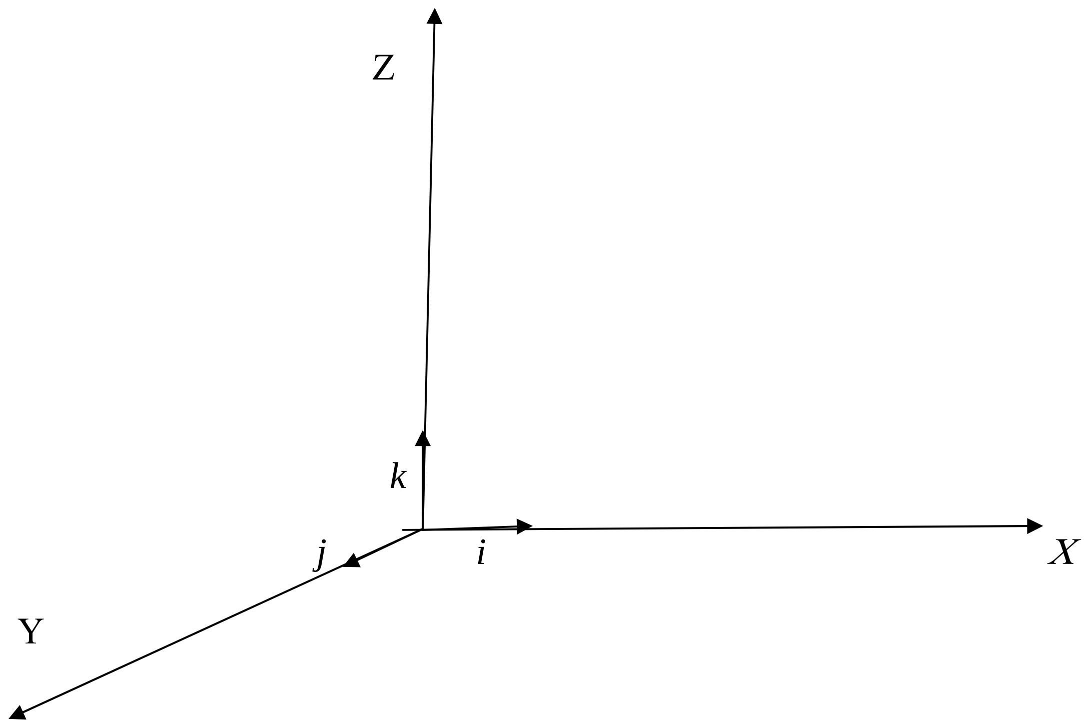
რა არის $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის გეგმილი OX ღერძზე? ამ ფრაზაში გულისხმობენ **გეომეტრიულ** ან **ალგებრულ** გეგმილს (პროექციას).

$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ **ვექტორის გეომეტრიული პროექცია** რაიმე ღერძზე არის ვექტორი $\overrightarrow{A'B'}$, სადაც A' და B' წერტილები არის A და B წერტილების პროექციები შესაბამისად. ზოგჯერ ვექტორის გეომეტრიულ პროექციას რაიმე ღერძზე უწოდებენ ამ ვექტორის **კომპონენტას** ამ ღერძზე.

ვექტორის ალგებრული პროექცია არის გეომეტრიული პროექციის (ანუ $\overrightarrow{A'B'}$ ვექტორის) სიგრძე აღებული + ან – ნიშნით, იმისდა მიმართულებას თუ საწინააღმდეგოა.

ანუ გეომეტრიული პროექცია ვექტორია, ალგებრული პროექცია კი რიცხვი. რა კავშირია მათ შორის? **გეომეტრიული პროექცია ღერძზე არის ალგებრული პროექციის ნამრავლი ამ ღერძის მგეზავზე.**

განვიხილოთ საკოორდინატო ღერძები X, Y, Z და მათი მგეზავები, (ანუ ერთეულოვანი ვექტორები) **i, j,** და **k**



ამ საკოორდინატო სივრცეში ნებისმიერი ვექტორი არის მისი გეომეტრიული პროექციების ჯამი(როგორც ამ პროექციებზე აგებული პარალელოპიპედის დიაგონალი).

ანუ შეგვიძლია შემოვიტანოთ

განსაზღვრება. ***ვექტორის მართკუთხა კოორდინატები ეწოდება ამ ვექტორის ალგებრულ პროექციებს საკოორდინატო ღერძებზე.***

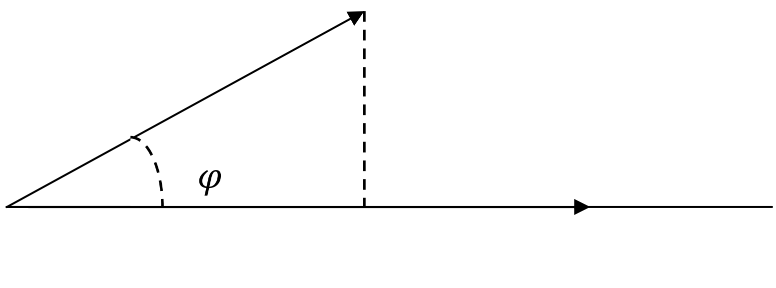
თუ ორი წერტილის კოორდინატებია A=A(x_1, y_1, z_1) , B=B(x_2, y_2, z_2)
მაშინ AB ვექტორის კოორდინატებია **AB=(**x_2-x_1, $y_2 - y_1$, z_2-z_1)
ანუ
AB= (x_2-x_1 *)* ***i*** + ($y_2 - y_1$) **j** + (z_2-z_1) **k**

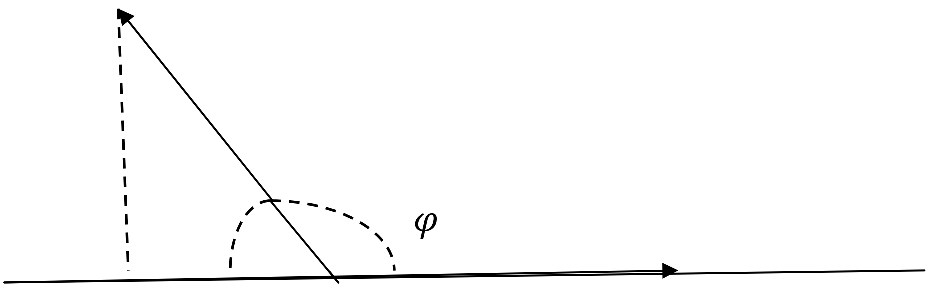
საკოორდინატო ღერძების და მგეზავების დაფიქსირებით ეს განსაზღვრება კოორდინატებს ცალსახად უნდა იძლეოდეს (ანუ ორ სხვადასხვა ვექტორს განსხვავებული კოორდინატები უნდა ჰქონდეს). ამისათვის ქვემოთ ცოტა მოგვიანებით ჩვენ განსაზღვრავთ ბაზისს.

ორი ვექტორის მიმართულებებს შორის კუთხეს ეწოდება ამ ვექტორებს შორის კუთხე.

თეორემა. **a** ვექტორის ალგებრული პროექცია **l** არანულოვანი ვექტორის მიმართულების ღერძე ტოლია |**a**| გამრავლებული **a** და **l** ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსზე.

დავამტკიცოთ ჩვენ თვითონ შემდეგი ნახატის გამოყენებით.

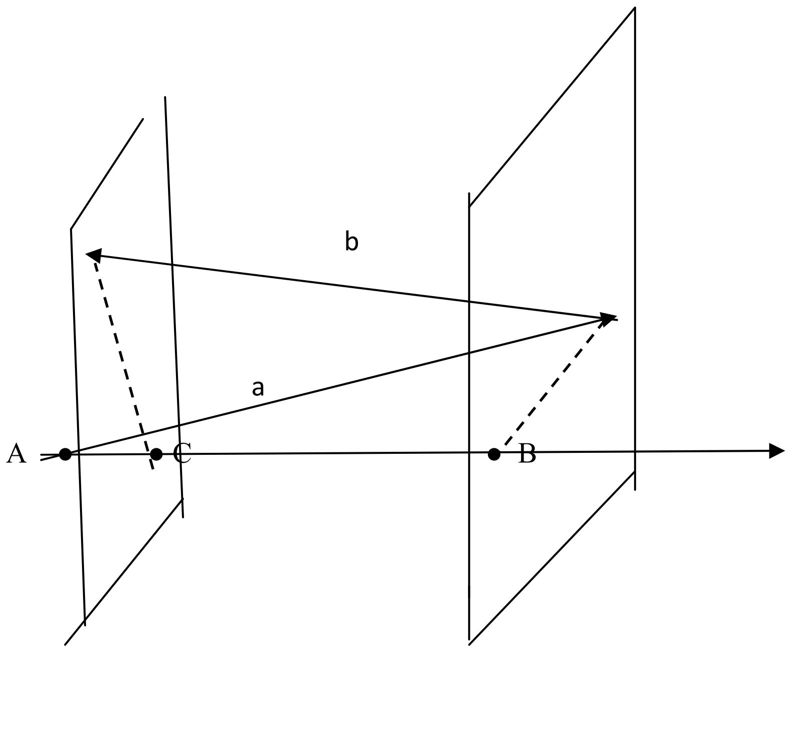




როგორც ალგებრული ისე გეომეტრიული პროქციისთვის გვაქვს შემდეგი

თეორემა. **a** და **b** ვექტორების ჯამის პროექცია ტოლია მათი პროექციების ჯამის. **λa** ვექტორის პროექცია ტოლია **λ** გამრავლებული **a** ვექტორის პროექციაზე.

დამტკიცება მარტივია შემდეგი ნახატით (ვაჩვენოთ).



ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულება და დამოუკიდებლობა.

ბაზისი .

წინა ლექციიდან ვიცით წრფივი ოპერაციები ვექტორებზე: ვექტორების შეკრება და რიცხვის გამრავლება ვექტორზე. ჩვენ გვინდა ამ წრფივი ოპერაციებით შევადგინოთ ვექტორთა **წრფივი კომბინაცია** ასე:

ვთქვათ $\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_n$ რაიმე რიცხვებია,

ხოლო $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots , \boldsymbol{a_n}$ ვექტორები, (ანუ გვაქვს n-ცალი რიცხვი და n-ცალი ვექტორი), მაშინ გამოსახულებას

$\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2} + \dots + \alpha_n \boldsymbol{a_n}$

ეწოდება $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots , \boldsymbol{a_n}$ **ვექტორების წრფივი კომბინაცია** ***კოეფიციენტებით*** $\boldsymbol{\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_n}$.

შენიშვნა. ჩვენ ჯერჯერობით განვიხილავთ მხოლოდ წრფეებს,

სიბრტყეებს და სივრცეს, ანუ n რიცხვი ტოლი იქნება 1, 2, ან 3.

განსაზღვრება. $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots , \boldsymbol{a_n}$ ვექტორებს ეწოდება **წრფივად დამოკიდებული**, თუ არსებობს კოეფიციენტები $\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_n$ *რომ* $\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2} + \dots + \alpha_n \boldsymbol{a_n} = 0$*, ამასთან კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც არანულოვანია. თუ ასეთი კოეფიციენტები არ არსებობს მაშინ* $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots , \boldsymbol{a_n}$ ვექტორებს ეწოდება **წრფივად *დამოუკიდებელი.***

არსებობს ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულების კრიტერიუმი:

<u>თეორემა . იმისათვის რომ</u> $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, ... , $\boldsymbol{a_n}$ ***ვექტორები წრფივად დამოკიდებული იყოს აუცილებელია და საკმარისი ამ ვექტორებიდან ერთ-ერთი იყოს დანარჩენი ვექტორების წრფივი კომბინაცია.***

დამტკიცება. უცილებლობა. გვაქვს

$$\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2} + \dots + \alpha_n \boldsymbol{a_n} = 0, \qquad (1)$$

და კოეფიციენტებიდან ერთ მაინც არანულოვანია. ვთქვათ $\alpha_1 \neq 0$,

მაშინ (1) გავყოთ α_1 -ზე. მივიღებთ $\boldsymbol{a_1}$ ვექტორის გამოახვას დანარჩენებით:

$$\boldsymbol{a_1} = (-\frac{\alpha_2}{\alpha_1})\boldsymbol{a_2} + (-\frac{\alpha_3}{\alpha_1})\boldsymbol{a_3} + \cdots + (-\frac{\alpha_n}{\alpha_1})\boldsymbol{a_n} .$$

ეხლა საკმარისობა. გვაქვს ერთ-ერთი ვექტორის გამოსახულება დანარჩენებით, ვთქვათ პირველი ვექტორის.

$$\boldsymbol{a_1} = \beta_2\boldsymbol{a_2} + \beta_3\boldsymbol{a_3} \cdots + \beta_n\boldsymbol{a_n}. \qquad (2)$$

მაშინ (2) ფორმულა უბრალოდ გადავწეროთ ასე:

$$\boldsymbol{a_1} - \beta_2\boldsymbol{a_2} - \beta_3\boldsymbol{a_3} - \cdots - \beta_n\boldsymbol{a_n} = 0.$$

ნუ გვაქვს საძიებელი წრფივი კომბინაცია, (როგორც ფორმულა (1)-ში) სადაც $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -\beta_2$, $\alpha_n = -\beta_n$. ■(ასე ავლ. დამტკ. ბოლო)

თუ გავიხსენებთ წინა ლექციიდან ვექტორთა კოლინეარულობას და კომპლანარობას მაშინ **გეომეტრიული აზრი ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულებისა არის შემდეგი:**

თეორემა. ***ორი ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ისინი კოლინეარულია.***

თეორემა. ***სამი ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ისინი კომპლანარულია.***

დამტკიცებები მარტივია, ვცადოთ დამოუკიდებლად.

დავუბრუნდეთ საკოორდინატო სივრცეს OXYZ. მაშინ საკოორდინატო ღერძების მგეძავები(ერთეულოვანი ვექტორები)

გვაძლევს **წრფივად დამოუკიდებელ სამეულს i, j, k (რადგან ეს ვექტორები არაკომპლანარულია).**

სივრცის ბაზისი ეწოდება ნებისმიერ არაკომპლანარულ (დალაგებულ) სამეულს.

ცხადია არსებობს უამრავი ბაზისი.

i, j, k-ს ეწოდება სტანდარტული ბაზისი.

როგორც ზემოთ ვნახეთ სივრცის ნებისმიერი ვექტორი გამოისახება

i, j, k ვექტორების წრფივი კომბივაციით. ეს გამოსახვა ცალსახაა,

რადგან თუ დავუშვებთ რომ რაიმე **a** ვექტორისათვის გვაქვს ორი განსხვავებული გამოსახულება

a= α_1 **i** + α_2 **j** + α_3**k** და

a= β_1 **i** + β_2 **j** + β_3**k** ,

მაშინ გამოკლებით გვექნება

0=($\alpha_1 -$ β_1)**i** + (α_2 - β_2) **j** +(α_3- β_3)**k**

ანუ _**i, j, k** გამოვა წრფივად დამოკიდებული, რაც მცდარია.

<u>ე.ი. სივრცის ნებისმიერი ვექტორი ცალსახად გამოისახება მოცემული ბაზისის საშუალებით და გამოსახულების კოეფიციენტებს ეწოდება ვექტორის კოორდინატები ამ ბაზისში.</u>

<u>სიბრტყის ბაზისი არის ნებისმიერი არაკოლინეარული დალაგებული წყვილი. OX და OY საკოორდინატო ღერძების მგეზავები ქმნიან სტანდარტულ ბაზისს.</u>

<u>წრფის ბაზისი არის ნებისმიერი არანულოვანი ვექტორი. ღერძის მგეზავი ქმნის სტანდარტულ ბაზისს.</u>

<u>მაგალითი.</u> **a** და **b** ვექტორები მოცმულია კოორდინატებით რაიმე ბაზისში, **a =(1,-2,4)** და **b=(0,3,5).** იპოვეთ შემდეგი ვექტორების კოორდინატები იგივე ბაზისში.

a +b=(1+0,-2+3,4+5)=(1,1,9);

λa=(λ, -2λ, 4λ);

2a-5b=(2,-4,8)-(0,15,25)=(2,-19,-33).

<u>მაგალითი.</u> **a** და **b** ვექტორები მოცმულია კოორდინატებით **i,j,k** ბაზისში, **a =(1,2,3)** და **b=(4,5,6).** იპოვეთ შემდეგი ვექტორების გამოსახულება (კოორდინატები)იგივე ბაზისში.

2a=2(i+2j+3k)=2i+4j+6k; (კოორდინატებია (2,4,6). **)**

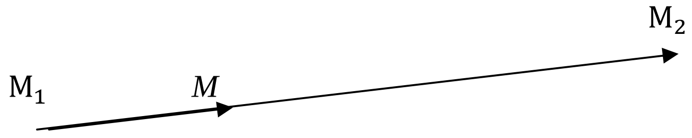
2a+3b=2(i+2j+3k)+3(4i+5j+6k)=(2+12)i+(4+15)j+(6+18)k=

=14i+19j+24k. (კოორდინატებია (14,19,24) **)**

მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით

ამოცანა ასეთია: მოცემულია მონაკვეთი $\boldsymbol{M_1M_2}$ და უნდა ვიპოვოთ წერტილი **M,** ისეთი რომ $|\boldsymbol{M_1M}|:|\boldsymbol{MM_2}| = \boldsymbol{\lambda}$.

ე.ი. მოცემულია კოორდინატები M_1=(x_1, y_1, z_1), M_2=(x_2, y_2, z_2) და უნდა ვიპოვოთ M წერტილის კოორდინატები M (x,y,z), თუ $\overrightarrow{M_1M} : \overrightarrow{MM_2} = \lambda$.



გვაქვს: $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1M} + \overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{M_1M} + \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{M_1M} = \frac{1+\lambda}{\lambda}\overrightarrow{M_1M}$

ამიტომ $\overrightarrow{M_1M} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{M_1M_2}$

ანუ კოორდინატებში გვაქვს:

$$x - x_1 = \frac{\lambda}{1+\lambda}(x_2 - x_1);$$

$$y - y_1 = \frac{\lambda}{1+\lambda}(y_2 - y_1);$$

$$z - z_1 = \frac{\lambda}{1+\lambda}(z_2 - z_1);$$

და **საბოლოოდ** მივიღებთ:

$$\boldsymbol{x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}; \qquad z = \frac{y_1+\lambda z_2}{1+\lambda};}$$

კერძოდ როცა λ=1, ანუ **მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატებისთვის** გვაქვს:

$$\boldsymbol{x = \frac{x_1+x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1+y_2}{2}; \qquad z = \frac{z_1+z_2}{2}.}$$

■