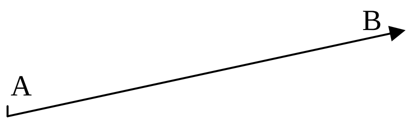
გეომეტრიული ვექტორები (ანუ მიმართული მონაკვეთები)

სკალარული ეწოდებათ სიდიდეებს რომლებიც ზომის ერთეულის (ანუ ეტალონის) საშუალებით ხასიათდებიან რიცხვითი მნიშვნელობით. ასეთი სიდიდეებია მაგ. მასა, მოცულობა და ა.შ. ხოლო ისეთი სიდიდეები როგორიცაა მაგ. სიჩქარე, აჩქარება ხასიათდებიან არა მარტო რიცხვითი მნიშვნელობით, არამედ მიმართულებით და მათ **ვექტორული** სიდიდეები ეწოდებათ. არსებობენ კიდევ უფრო რთული სიდიდეები(**ტენზორული**). ტენზორების შემოტანა აუცილებელი ხდება ისეთი რთული პროცესების ასახსნელად როგორიცაა მაგ. კრისტალური სხეულების თვისება გადასცენ სითბო ან დეფორმაცია მიიღონ დატვირთვის შედეგად.

<u>განსაზღვრება.</u>   *გეომეტრიული ვექტორი (ანუ მიმართული მონაკვეთი) ეწოდება მონაკვეთს, რომელზედაც არჩეულია მიმართულება (ორი შესაძლებელიდან ერთ-ერთი).*



გეომეტრიული ვექტორი აღინიშნება ასე $\overrightarrow{AB}$. A *წერტილს ეწოდება ვექტორის საწყისი წერტილი(ანუ მოდების წერტილი),* $B-$*ს ეწოდება ბოლო წერტილი, ხოლო* AB *მონაკვეთის სიგრძე არის ვექტორის სიგრძე ანუ მოდული და აღინიშნება* $|\overrightarrow{AB}|$.

ე.ი. ვექტორი არის წერტილთა დალაგებული წყვილი (A,B). დალაგება ანუ მიმართულება გვიჩვენებს რომ მოძრაობა ხდება A წერტილდან B წერტილამდე. ამასვე მიუთითებს ლათინური სიტყვა “vector,” რაც ნიშნავს “გადამტანს” (ანუ A წერტილი გადააქვს B-ში).

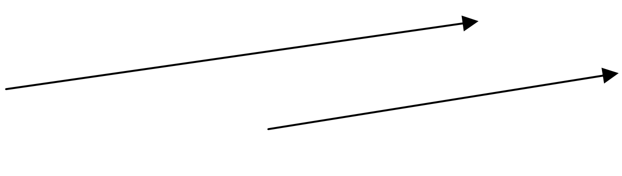
ვექტორს რომლის სიგრძე ნულია ნულოვანი ვექტორი (ანუ ნულ-ვექტორი) ეწოდება და აღინიშნება **0**. ეს ხდება მაშინ როცა ვექტორის საწყისი და ბოლო წერტილები ემთხვევა. ამიტომ ნულოვან ვექტორს კონკრეტული მიმართულება არ გააჩნია და ამიტომ ძოგჯერ **0** ვექტორს ნებისმიერ მიმართულებას მიაწერენ.

ვექტორთა ტიპები და მათი განლაგება

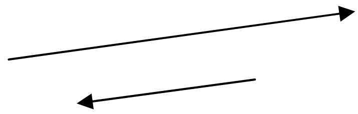
<u>განსაძღვრება.</u>   *<u>თუ ორი (ან რამოდენიმე) გეომეტრიულ ვექტორი ძევს ერთ წრფეზე ან პარალელურ წფეებზე მაშინ მათ ეწოდება კოლინეარული.</u>*

სიტყვა “co-linear” მიუთითებს ერთ წრფეზე დამოკიდებულებაზე.

ორი კოლინეარული ვექტორი შეიძლება იყოს **თანამიმართული**



ან საწინააღმდეგოდ მიმართული.

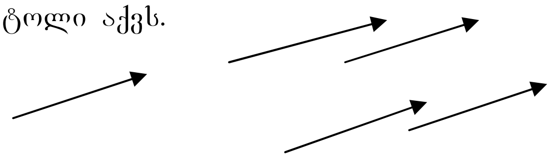


<u>განსაზღვრება. *თუ სამი (ან მეტი) გეომეტრიულ ვექტორი ძევს ერთი რომელიმე სიბრტყის პარალელურ წფეებზე მაშინ მათ ეწოდება კომპლანარული.*</u>

“com-plinear” მიუთითებს ერთ სიბრტყეზე დამოკიდებულებაზე.

ცხადია ამ განსაზღვრებას ორი ვექტორისთვის აზრი არა აქვს: ნებისმიერი ორი ვექტორი ერთი სიბრტყის პარალელურ წრფეებზე ძევს და ამიტომ კომპლანარულია. I

ანალიზურ გეომეტრიაში *განვიხილავთ* **თავისუფალ ვექტორებს,** ანუ გეომეტრიული ვექტორები ტოლად ითვლება თუ ისინი კოლინეარულია, თანამიმართულია და სიგრძეები ტოლი აქვს.



ნახატზე მარჯვნივ მდებარე გეომეტრიული ვექტორები ტოლია მარცხნივ მდებარე თავისუფალი ვექტორის. ე.ი. მოდების (ანუ საწყისი) წერტილი თავისუფალია.

ეს იმითაა გამოწვეული რომ ანალიზურ გეომეტრიაში ვექტორი ჩვენთვის იქნება სიბრტყის (ან სივრცის) “პარალელური გადატანა” და ცხადია ნახატზე მოყვანილი ყოველი ვექტორი სიბრტყის (ან სივრცის) ერთიდაიგივე გადატანას მოგვცემს.

ფიზიკაში და მექანიკაში გვხვდება სხვა ტიპის ვექტორები: **სრიალა ვექტორები,** როცა ვექტორი არ იცვლება მისი სრიალით ამ ვექტორის მომცველ წრფეზე (მაგ. ძალის ვექტორი);

დაბმული ვექტორები, როცა ვექტორის საწყის წერტილს იმდენად დიდი მნიშვნელობა აქვს რომ ვექტორის განძრევა საერთოდ არ შეიძლება (მაგ. ნაწილაკის სიჩქარის ვექტორი რაიმე სითხეში)

<u>***შეთანხმება.*** ამის შემდეგ ჩვენ განვიხილავტ მხოლოდ **თავისუფალ ვექტორებს** და მათ უბრალოდ **ვექტორებს** ვუწოდებთ.</u>

წრფივი ოპერაციები (მოქმედებები) ვექტორებზე

წრფივი ოპერაციები ვექტორებზე არის ვექტორების შეკრება და ვექტორის გამრავლება რიცხვზე . ჩვენ გვინდა განვსაზღვროთ ეს ოპერაციები და ვნახოთ მათი თვისებები.

განსაზღვრება. **a** და **b** ვექტორების ჯამი **a+b** ეწოდება ისეთ **c** ვექტორს რომელიც მიიღება შემდეგი “სამკუთხედის წესით”:

ავირჩიოთ a ვექტორის რაიმე სათავე (საწყისი წერტილი), მის ბოლოს დავათხვიოთ b ვექტორის ბოლო. მაშინ ამ ვექტორების ჯამი იქნება ვექტორი c, რომლის სათავე ემთხვევა a ვექტორის სათავეს, ბოლო კი b ვექტორის ბოლოს.

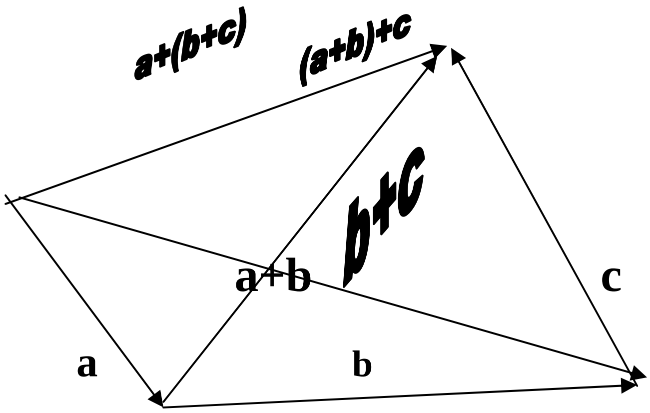
შენიშვნა. არსებობს ვექტორების შეკრების პარალელოგრამის წესი:

a და b ვექტორებისთვის ავირჩიოთ საერთო სათავე და ავაგოთ მათზე პარალელოგრამი. ამ პარალელოგრამის დიაგონალი რომელიც საერთო სათავიდან გამოდის განსაზღვრავს a და b ვექტორების ჯამს, c ვექტორს .

ადვილი სანახავია რომ ვექტორთა შეკრება აკმაყოფილებს შემდე თვისებებს:

(გავიხსენოთ რიცხვების შეკრების ანალოგიური თვისებები)

1. ***a+b=b+a კომუტაციურობა ანუ ქართ. ადანაცვლებადობა.*** *(ვაჩვენოთ განსაზღვრებით)**;***
2. ***a+(b+c)=(a+b)+c ასოციურობა ანუ ქართ. ჯუფთებადობა.*** *ფრჩხილების დასმის მიმდევრობას მნიშვნელობა არა აქვს, ისე რომ შეგვიზლია უბრალოთ ვწეროთ* a+b+c. *იხ. ახატი.*



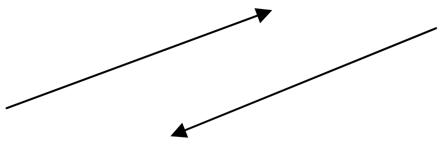
3. არსებოს ისეთი ვექტორი 0, რომ ნებისმიერი **a** ვექტორისთვის **a+0=a.**

მართლაც 0 ვექტორად გამოდგება ნულოვანი ვექტორი.

4. ნებისმიერი **a** ვექტორისთვის არსებობს მისი მოპირდაპირე ვექტორი **b:** **a+b=0 ,**

ასეთი **b** ვექტორი აღინიშნება სიმბოლოთი **-a,** ანუ **a+(-a)=0 .**

მოპირდპირლე ვექტორს სიგრძე იგივე აქვს, მიმართულება კი საწინააღმდეგო.



5. ნებისმიერი **a** და **b** ვექტორებისთვის არსებობს ვექტორი **x,** ისე რომ **a+x=b.**
x ვექტორად შეიძლება ავიღოთ ვექტორი (-a)+b, რადგან

a+x=a+((-a)+b)=(a+(-a))+b=0+b=b.

ასეთ **x** ვექტორს ეწოდება **b** და **a** ვექტორების სხვაობა და აღინიშნება **b-a.**

განსაზღვრება. a ვექტორის ნამრავლი λ რიცხვზე ეწოდება ვექტორს $\lambda\alpha$,

რომლის სიგრძე არის $|\lambda|\alpha$; თანამიმართულია a ვექტორის თუ $\lambda>0$ და აქვა a ვექტორის

საწინააღმდეგო მიმართულება თუ $\lambda<0$.

ვექტორის რიცხვზე გამრავლების ოპერაცია ასოციურია რიცხვების მიმართ და განრიგებადია (დისტრიბუციულია) როგორც რიცხვების ასევე ვექტორების მიმართ. ანუ ადვილი საჩვენებელია რომ:

6. *ვექტორზე რიცხვზე გამრავლება ასოციურია*
   $(\lambda\mu)\, a = \lambda(\mu a);$

   მართლაც ტოლობის სხვადასხვა მხარეს ცხადია ტოლი სიგრძის ვექტორებია: $|\lambda\mu|=|\lambda||\mu|$. ეს ვექტორები თანამიმართულია მიუხედავად იმისა λ და μ რიცხვები ერთნაირნიშნიანია თუ სხვადასხვანიშნიანი.

7. *ვექტორზე რიცხვზე გამრავლება დისტრიბუციულია ვექტორის მიმართ:*
   $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b;$
   მითითება: ეს გამომდინარეობს იქიდან რომ a,b ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამი მსგავსია λa, λb ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის.

8. *ვექტორზე რიცხვზე გამრავლება დისტრიბუციულია რიცხვის მიმართ:*
   $(\lambda+\mu)\, a = \lambda a + \mu a.$
   მითითება: სამივე ვექტორი კოლინეარულია, ანუ ერთ წრფეზეა. ტოლობის დასამტკიცებლად უნდა განვიხილოთ ორი შემთხვევა: პირველი როცა λ და μ ერთნაირნიშნიანია და მეორე როცა λ და μ სხვადასხვანიშნიანია.

End