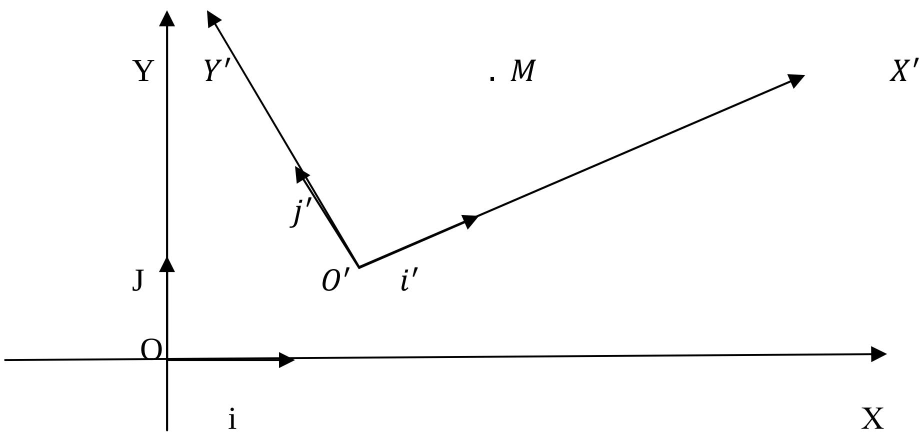
მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნა.

ვთქვათ სიბრტყეზე მოცემულია ორი მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, ერთი **Oxy** სისტემა , ბაზისით i, j, რომელსაც პირობითად დავარქვათ **ძველი** სისტემა.



და მეორე $\boldsymbol{O'x'y'}$ სისტემა, ბაზისით $\boldsymbol{i'}, \boldsymbol{j'}$, რომელსაც პირობითად დავარქვათ **ახალი** სისტემა.

შევთანხმდეთ რომ ორივე სისტემა არის მარჯვენა ორიენტაციის, ანუ უმოკლესი მობრუნება X ღერძისა Y ღერძამდე ხდება საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

ვთქვათ სიბრტყის რაიმე $\boldsymbol{M}$ წერტილის კოორდინატები ძველ სისტემაში არის $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ანუ რაც იგივეა $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ ვექტორის კოორდინატები i, j ბაზისში არის $\overrightarrow{OM}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, ე.ი.

$$\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{xi} + \boldsymbol{yj}, \qquad (1)$$

ხოლო იგივე $\boldsymbol{M}$ წერტილის კოორდინატები ახალ სისტემაში არის $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'})$ ანუ რაც იგივეა $\overrightarrow{\boldsymbol{O'M}}$ ვექტორის კოორდინატები $\boldsymbol{i'}, \boldsymbol{j'}$ ბაზისში არის $\overrightarrow{O'M}(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'})$, ე.ი.

$$\overrightarrow{O'M} = \boldsymbol{x'i'} + \boldsymbol{y'j'}. \qquad (2)$$

ცხადია თვითონ $\boldsymbol{i'}, \boldsymbol{j'}$ **ახალ** საბაზისო ვექტორებსაც ძველ ბაზისში ექნება რაგაც კოორდინატები, ვთქვათ

$$\begin{cases} \boldsymbol{i'} = \boldsymbol{a_{11} i} + \boldsymbol{a_{12} j} \\ \boldsymbol{j'} = \boldsymbol{a_{21} i} + \boldsymbol{a_{22} j} \end{cases} \qquad (3)$$

და ვთქვათ O' წერტილის კოორდინატები ძველ სისტემაში არის (a, b), ანუ

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OO'}} = \boldsymbol{ai} + \boldsymbol{bj}. \qquad (4)$$

ვექტორების შეკრების წესით გვაქვს

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OO'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{O'M}}. \qquad (5)$$

თუ (5) –ში ჩავსვამთ (4) და (2)-ს და გავითვალისწინებთ (3)-ს მივიღებთ

$$\boldsymbol{xi} + \boldsymbol{yj} = \boldsymbol{ai} + \boldsymbol{bj} + \boldsymbol{x'i'} + \boldsymbol{y'j'} = \boldsymbol{ai} + \boldsymbol{bj} + \boldsymbol{x'}(\boldsymbol{a_{11} i} + \boldsymbol{a_{12} j}) + \boldsymbol{y'}(\boldsymbol{a_{21} i} + \boldsymbol{a_{22} j}) =$$

$$= (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a_{11} x'} + \boldsymbol{a_{21} y'})\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a_{12} x'} + \boldsymbol{a_{22} y'})\ \boldsymbol{j}$$

ანუ

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a_{11} x'} + \boldsymbol{a_{21} y'} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a_{12} x'} + \boldsymbol{a_{22} y'} \end{cases} \qquad (6)$$

თუ (3) –ის პირველ განტოლებას სკალარულად გადავამრავლებთ $\boldsymbol{i}$ ვექტორზე და გავითვალიწინებთ, რომ $\boldsymbol{ii}$=1 და $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{0}$, მივიღებთ

$$\boldsymbol{a_{11}} = \boldsymbol{cos}(\widehat{\boldsymbol{i'}, \boldsymbol{i}}).$$

3) –ის პირველ განტოლება სკალარულად გადავამრავლებთ $\boldsymbol{j}$ ვექტორზე და გავითვალიწინებთ, რომ $\boldsymbol{jj}$=1 და $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{0}$, გვაქვს

$$\boldsymbol{a_{12}} = \boldsymbol{cos}(\widehat{\boldsymbol{i'}, \boldsymbol{j}}).$$

ნალოგიურად 3) –ს მეორე განტოლების სკალარულად გადამრავლებით ჯერ $\boldsymbol{i}$ ვექტორზე, შემდეგ კი $\boldsymbol{j}$ ვექტორზე, მივიღებთ

$$\boldsymbol{a_{21}} = \boldsymbol{cos}(\widehat{\boldsymbol{j'}, \boldsymbol{i}});$$

$$\boldsymbol{a_{22}} = \boldsymbol{cos}(\widehat{\boldsymbol{j'}, \boldsymbol{j}}).$$

ავღნიშნოთ $\boldsymbol{\varphi}$ სიმბოლოთი კუთხე X და X' ღერძებს შორის, ანუ

$$\boldsymbol{\varphi} = \widehat{(\boldsymbol{\iota}', \boldsymbol{\iota})}.$$

მაშინ გვექნება

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a_{11}} &= \boldsymbol{cos}\widehat{(\boldsymbol{\iota}', \boldsymbol{\iota})} = \boldsymbol{cos\,\varphi}; \\ \boldsymbol{a_{12}} &= \boldsymbol{cos}\widehat{(\boldsymbol{\iota}', \boldsymbol{\jmath})} = \boldsymbol{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \boldsymbol{\varphi}\right) = \boldsymbol{sin\varphi}; \qquad (7) \\ \boldsymbol{a_{21}} &= \boldsymbol{cos}\widehat{(\boldsymbol{\jmath}', \boldsymbol{\iota})} = \boldsymbol{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{\varphi}\right) = -\boldsymbol{sin\varphi}; \\ \boldsymbol{a_{22}} &= \boldsymbol{cos}\widehat{(\boldsymbol{\jmath}', \boldsymbol{\jmath})} = \boldsymbol{cos\varphi}; \end{aligned}$$

საბოლოოდ ძველი კოორდინატები ახალი კოორდინატებით გამოისახება გარდაქმნის ფორმულებით :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = a + x'\cos\varphi - y' sin\varphi} \\ \boldsymbol{y = b + x' cos\varphi + y' cos\varphi} \end{cases} \qquad (8)$$

რადგან ორივე სისტემა მარჯვენა ორიენტაციის იყო, ვასკვნით რომ სიბრტყის ორი ნებისმიერი ერთნაირად ორიენტირებული სისტემა ერთმანეთს დაემთხვევა ორი გარდაქმნის მიმდევრობით ანუ კომპოზიციით: ჯერ ხდება კოორდინატთა **ღერძების პარალელური გადატანა**, ანუ

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = a + x'} \\ \boldsymbol{y = b + x'} \end{cases} \qquad (9)$$

შემდეგ კი **მობრუნება $\boldsymbol{\varphi}$ კუთხით**, ანუ

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = x'\cos\varphi - y' sin\varphi} \\ \boldsymbol{y = x' cos\varphi + y' cos\varphi} \end{cases} \qquad (10)$$

ამასთან, რადგან სისტემის ორიენტაციას არ ვცვლით, ანუ არეკვლები დაშვებული არ გვაქვს, მობრუნების $\boldsymbol{\varphi}$ კუთხე უნდა იცვლებოდეს $[0, 2\pi]$ შუალედში.