

მართკუთხა (ანუ დეკარტეს) კოორდინატთა სისტემა

არის წრფივი ალგებრის და ანალიზური გეომეტრიის საფუძველი

ცოტა ისტორია:

გეომეტრია, ბერძნულად გეო(მიწა) - მეტრია(გაზომვა),

ისტორიულად მიღებულია რომ გეომეტრიის “მამა” არის ევკლიდე (III საუკუნე ქრისტემდე) ;

ალგებრა, არაბულად ალ-ჯებრ(შეკრება),

ალგებრის “მამა” -- ალ-ხვარიზმი (მისი წიგნი დაიწერა 820 წელს).

თუმცა არსებობდნენ ეგვიპტელები, რომლებმაც 140 პირამიდა ააგეს

დაწყებული **5000 წლის წინ!** საინტერესოა მათ არ იცოდნენ ალგებრა და გეომეტრია?

პირველი სისტემატური შეკავშირება ალგებრასა და გეომეტრიას შორის მოხდა დეკარტეს მიერ 17-ე საუკუნეში კოორდინატების შემოღებით.

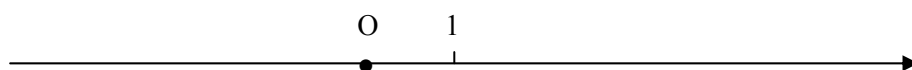
რენე დეკარტე (ფრანგულად Descartes), ლათინურად (Cartesius), ამიტომ ინგლისურ ლიტერატურაში გვხვდება **Cartesian coordinates**.

რიცხვირი წრფე ანუ დეკარტეს კოორდინატთა სისტემა წრფეზე.

დეკარტეს კოორდინატების შემოღება წრფეზე ნიშნავს

ამ წრფეზე ავირჩიოთ სამი რამ:

1. წერტილი 0 ანუ “კოორდინატთა სათავე”
2. სიგრძის ერთეული:
3. ორიენტაცია, ანუ რომელი ნახევარწრფე იყოს დადებითი (და შესაბამისად მეორე ნახევარწრფე უარყოფითი) .



ამის შემდეგ წრფის ყოველ წერტილს განსაზღვრავს მისი კოორდინატი ანუ

მანძილი O სათავემდე აღებული $+ ან -$ ნიშნით იმის მიხედვით თუ რომელ ნახევარზე ძევს ეს წერტილი.

წრფეს არჩეული კოორდინატთა სისტემით ეწოდება რიცხვითი წრფე . ეს იმიტომ რომ ყოველ ნამდვილ რიცხვს, ანუ

ნატურალურს, (1,2,3 ..)

მთელს, (ნატურალური რიცხვები მათი მოპირდაპირე რიცხვები $-1,-2,-3 ..$ და 0)

რაციონალურს, (წილადები. მაგ. $1/2, 1/3, ..$)

თუ ირაციონალურს, (მაგ. $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \pi$ =წრეწირის სიგრძის შეფარდება მის დიამეტრთან)

აქვს ცალსახად განსაზღვრული მდებარეობა ამ წრფეზე და პირიქით:

ყოველ წერტილს წრფეზე შეესაბამება ერთადერთი ნამდვილი რიცხვი.

საკონტროლო კითხვა: მოძებნეთ (დაახლოებით?) რიცხვით წრფეზე წერტილები $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \pi$.

მართკუთხა ანუ დეკარტეს კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე

დეკარტეს კოორდინატთა სისტემის შემოღება სიბრტყეზე ნიშნავს რომ ამ სიბრტყეზე

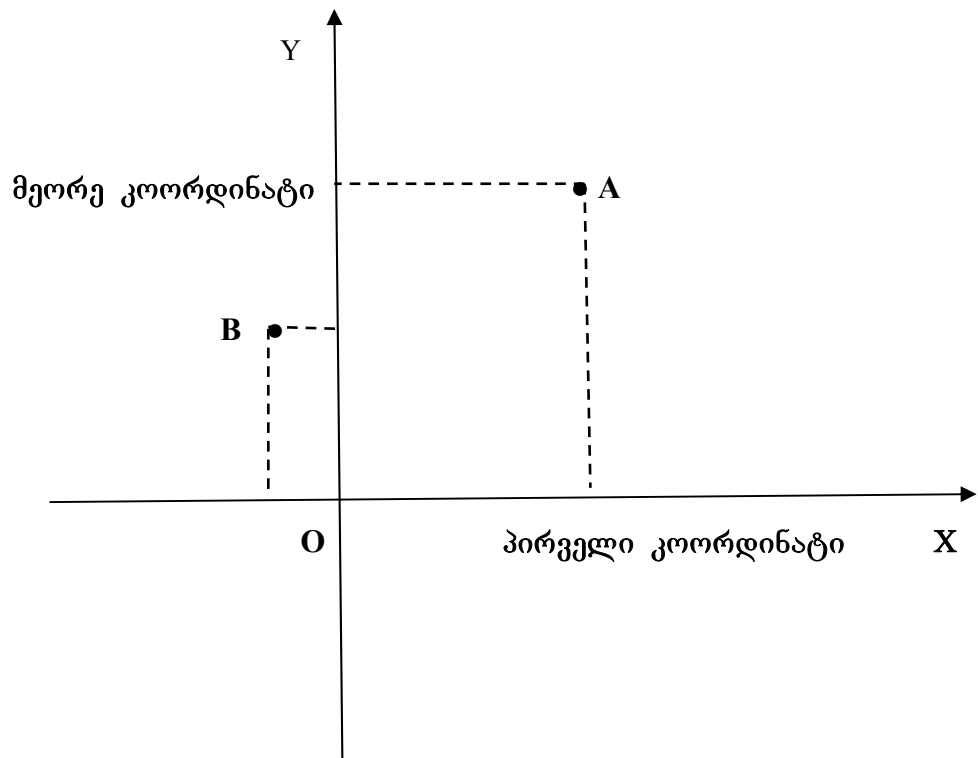
1. ავირჩიოთ საკოორდინატო **ღერძები**, ანუ მართობულ წრფეთა დალაგებული წყვილი (X,Y) . ანუ X და Y წრფეები უნდა იყოს ურთიერმართობული(ანუ მათ შორის კუთხე მართია) და დალაგებული ნიშნავს რომ მნიშვნელობა აქვს რომელია პირველ ადგილზე და რომელი მეორეზე.
2. ორივე წრფისთვის ავირჩიოთ სიგრძის ერთეული და ორიენტაცია.
3. X და Y წრფეთა გადაკვეთის O წერტილი უნდა მივიღოთ კოორდინატთა სათავედ.

ამის შემდეგ კოორდინატთა სისტემის **ორივე წრფე გადაიქცევა რიცხვით წრფედ.**

სიბრტყის ყოველი წერტილის კოორდინატები მიიღება ასე:

პირველი კოორდინატის მისაღებად დაგუშვით მოცემული წერტილიდან მართობი (ანუ პერპენდიკულარი) X წრფეზე და ვიპოვოთ გადაკვეთის წერტილი. ამ წერტილს როგორც ვიცით შეესაბამება ნამდვილი რიცხვი და ეს რიცხვი ავიღოთ პირველ კოორდინატად.

ანალოგიურად, თუ მოცემული წერტილიდან დაეუშვებთ მართობს Y წრფეზე და ვიპოვით გადაკვეთის წერტილს მივიღებთ მეორე კოორდინატს.



დეკარტეს კოორდინატთა სისტემა სივრცეში

დეკარტეს კოორდინატთა სისტემის შემოღება სიბრტყეზე ნიშნავს რომ ამ სივრცეში

1. ავირჩიოთ საკოორდინატო **ღერძები**, ანუ მართობულ წრფეთა დალაგებული სამეული (X, Y, Z) . ე.ი. ამ სამი წრფიდან ნებისმიერი ორი მათგანი ურთიერთმართობული უნდა იყოს.
2. სამივე წრფისთვის ავირჩიოთ სივრცის ერთეული და ორიენტაცია.
3. X, Y, Z წრფეთა გადაკვეთის 0 წერტილი უნდა მივიღოთ კოორდინატთა სათავედ.

ამის შემდეგ კოორდინატთა სისტემის **სამივე წრფე გადაიქცევა რიცხვით წრფედ.**

სიბრტყის ყოველი წერტილის კოორდინატების მისაღებად

დაეუშვათ მოცემული წერტილიდან მართობები (ანუ პერპენდიკულარები) X, Y და Z წრფეზე და ვიპოვოთ შესაბამისი გადაკვეთის წერტილები. ამ გადაკვეთის წერტილებს როგორც ვიცით შეესაბამება ნამდვილი რიცხვები შესაბამისად X, Y და Z წრფეებზე. ამ სამი რიცხვიდან პირველი მოგვცემს პირველ კოორდინატს, მეორე რიცხვი-მეორე კოორდინატს, მესამე რიცხვი კი მესამე კოორდინატს.

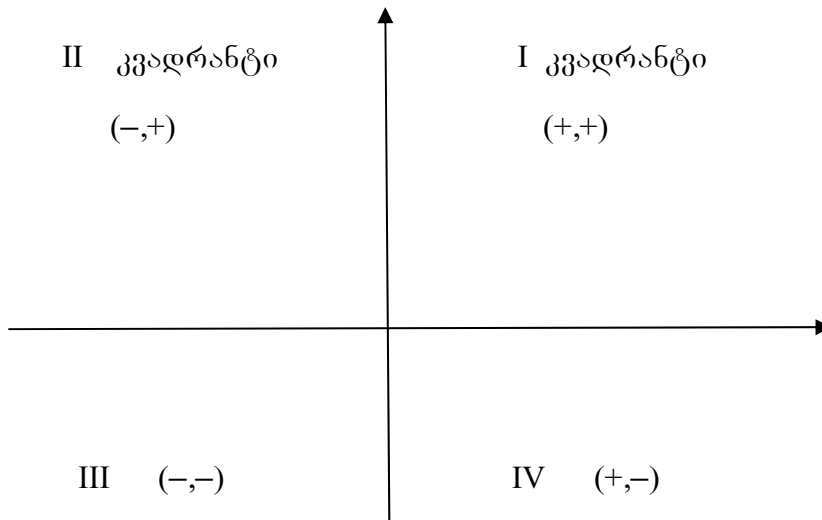
შეგნიშნეთ რომ სივრცის შემთხვევაში თითქმის იგივე გავიმეორეთ, რაც წრფეზე გვექონდა, ოღონდ სიტყვა “ორი” შეიცვალა “სამით”.
თუმცა პრაქტიკულად ალბათ ჯობია ასეთი განსაზღვრება:

სივრცეს ნებისმიერი სიბრტყე ორ ნახევარსიბრტყედ ყოფს.
კოორდინატა წრფეები ქმნიან საკოორდინატო სიბრტყეებს (X,Y) , (Y,Z) და (X,Z) .

ამიტომ სივრცის მოცემული წერტილს პირველი კოორდინატი არის მანძილი Y და Z წრფეებით განსაზღვრულ (Y,Z) წრფემდე, ოღონდ $+$ ან $-$ ნიშნით, იმის მიხედვით თუ რომელ ნახევარსივრცეში მდებარეობს ჩვენი ცერტილი.
ანალოგიურად მიიგება მეორე და მესამე კოორდინატი (X,Z) და (X,Y) სიბრტყეების საშუალებით.

კვადრანტები და ოქტანტები

სიბრტყე საკოორდინატო ნახევარდებებით ოთხ მეოთხედად ანუ კვადრანტად იყოფა. ამ კვადრანტებში მდებარე წერტილების (ანუ რიცხვების წყვილის) ნიშნები ნაჩვენებია ამ ნახატზე:



სივრცე საკოორდინატო ნახევარდებებით რვა მეტვედად ანუ ოქტანტად იყოფა.
ამ ოქტანტების ნუმერაცია საყოველთაოდ შეთანხმებული არაა. მხოლოდ $(+,+,+)$ ნიშნიან წერტილებს უწოდებენ ყოველთვის პირველი ოქტანტიწერტილებს.
სულ ამ ნიშნებისთვის არის $8=2^3$ ვარიანტი. (რატომ?, დახატეთ ოქტანტები)

რატომაა ასე მნიშვნელოვანი დეკარტეს კოორდინატები? ნუ რატომ შეაკავშირა კოორდინატებმა ალგებრა და გეომეტრია?

იმიტომ კოორდინატების საშუალებით ხშირად გეომეტრიული ფიგურები

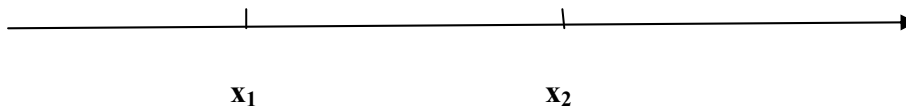
(მაგალითად წრე, სიბრტყე, წრეწირი, ელიფსი, სხვადასხვა სახის წირები, აგრეთვე ზედაპირები და ა.შ.)

შეგვიძლია წარვოვადგინოთ განტოლებების სახით და ხშირად პირიქითაც, ალგებრული განტოლება შეესაბამება გარკვეულ გეომეტრიულ ობიექტს.

დავიწყოთ მარტივი მაგალითებით:

მანძილი ორ წერტილს შორის

რიცხვით წრფეზე x_1 და x_2 წერტილებს შორის მანძილია $x_2 - x_1$

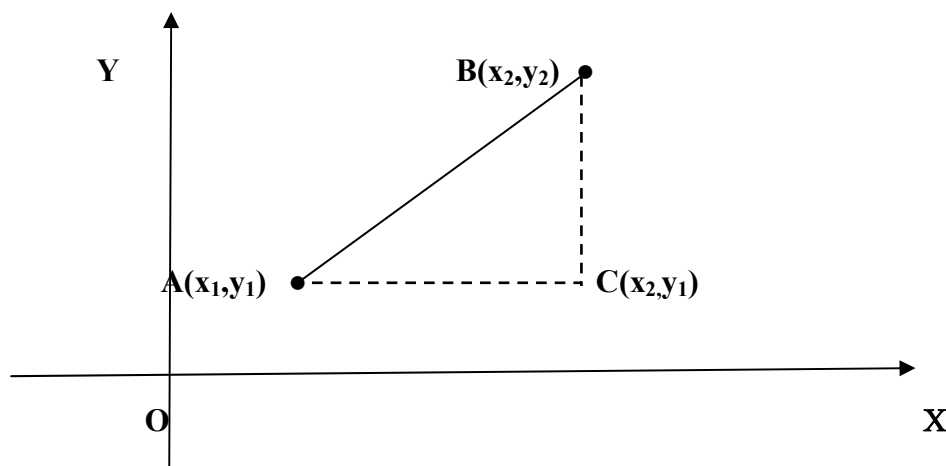


სიბრტყეზე (x_1, y_1) და (x_2, y_2) წერტილებს შორის მანძილი გამოითვლება ფორმულით

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ეს პითაგორას თეორემის შედეგია. (ვაჩვენოთ ეს ქვემოთმოყვანილი ნახატით)

მაგ. $(1,3)$ და $(5,6)$ წერტილებს შორის მანძილია $\sqrt{(5-1)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{25} = 5$



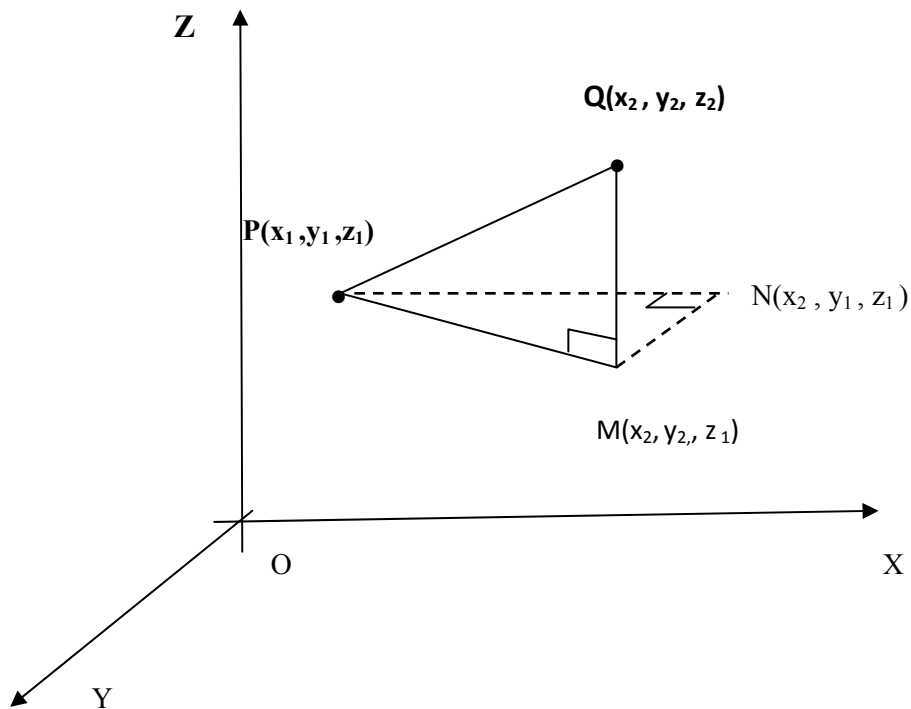
სივრცეში $P(x_1, y_1, z_1)$ და $Q(x_2, y_2, z_2)$ წერტილებს შორის მანძილი გამოითვლება ფორმულით

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ეს პითაგორას თეორემის ორჯერ გამოყენების შედეგია

(ვაჩვენოთ ეს ქვემოთ მოცემული ნახატით. M წერტილი არის Q წერტილის გეგმილი XOY სიბრტყის პარალელურ და P წერტილზე გამავალ სიბრტყეზე. N წერტილი არის ორი წრფის გადაკვეთა: ერთი P წერტილზე გადის და X ღერძის პარალელურია, მეორე M წერტილზე გადის და Y ღერძის პარალელურია.

მაშინ M და N წერტილების კოორდინატები სწორედ ისეთია როგორც ნახატზე. აგრეთვე PMQ და PNM სამკუთხედები მართკუთხაა. ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ პითაგორას თეორემა PQ მონაკვეთის გამოსათვლელად PM და $MQ = z_2 - z_1$ მონაკვეთებით. შემდეგ კი ისევ პითაგორას თეორემით PM მონაკვეთის სიგრძე გამოვთვალოთ $PN = x_2 - x_1$ და $NM = y_2 - y_1$ მონაკვეთებით.)

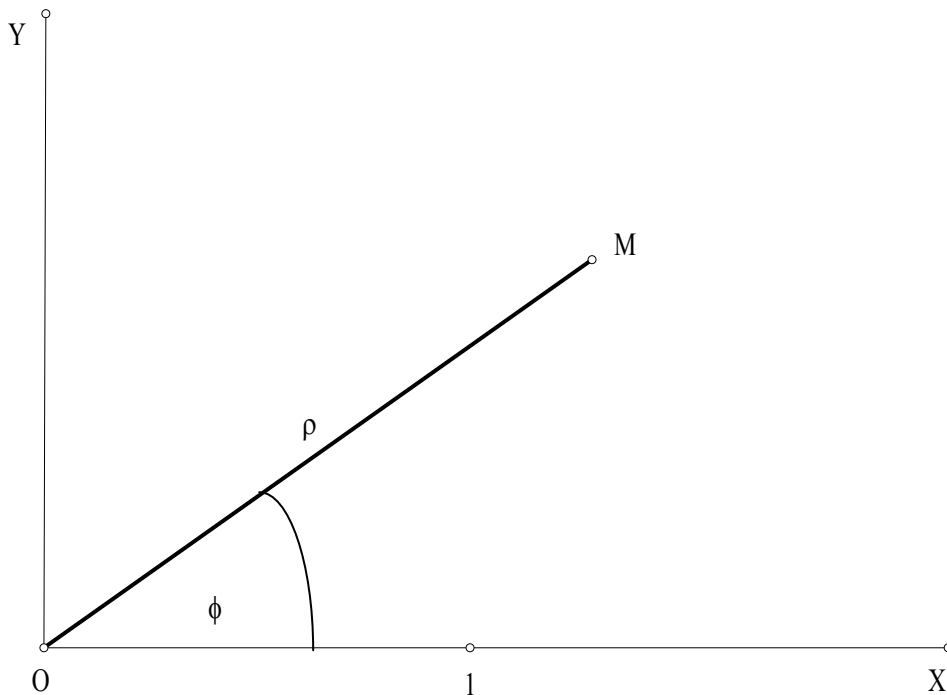


მაგალითად $(1,2,3)$ და $(4,-2,15)$ წერტილებს შორის მანძილია
 $\sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2 + (15-3)^2} = \sqrt{169} = 13$.

მართკუთხა კოორდინატა სისტემების გარდა არსებობს სხვა სისტემებიც:

პოლარულ კოორდინატა სისტემა

პოლარულ კოორდინატა სისტემა სიბრტყეზე განისაზღვრება პოლარული ღერძით, ე.ი. პოლარული სხივით, სათავით (ანუ პოლუსით) და სიგრძის ერთეულით.



სიბრტყის ყოველ M წერტილს აქვს ორი პოლარული კოორდინატი $M(\rho, \varphi)$, სადაც ρ – მანძილია სათავიდან M წერტილამდე (პოლარული რადიუსი), ხოლო φ – კუთხე პოლარულ რადიუსსა და პოლარულ ღერძს შორის.

შევთანხმდეთ რომ $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. (სხვა წიგნებში შეიძლება სხვა შეთანხმება იყოს!)

M წერტილის დეკარტულ (x, y) კოორდინატები პოლარული კოორდინატებით ასე გამოისახება:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

ადვილია პირიქით კავშირიც. ჯერ ერთი $x^2+y^2= \rho^2(\cos^2x + \sin^2x) = \rho^2$, ამიტომ

$$\rho=\sqrt{x^2 + y^2};$$

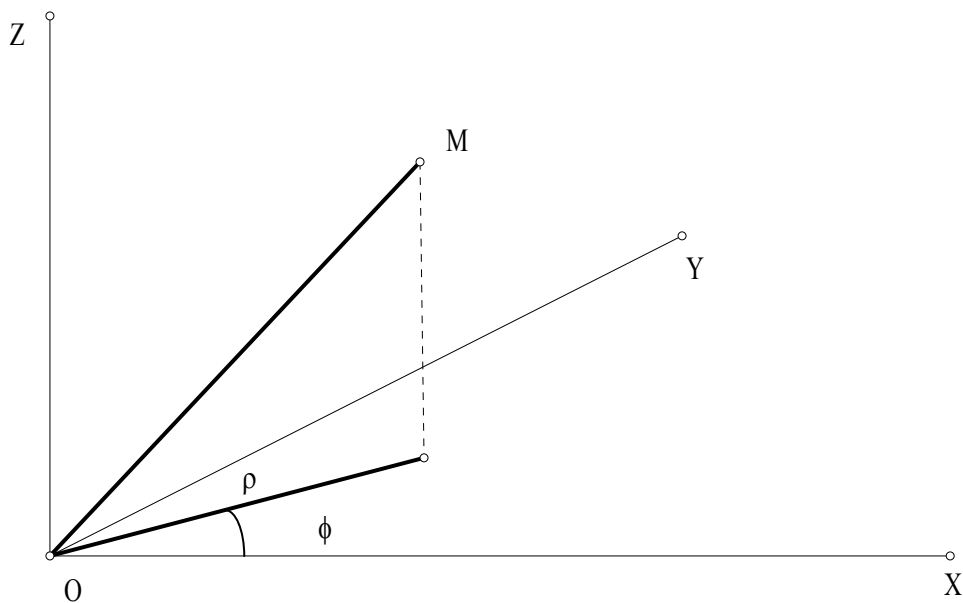
ხოლო φ კუთხის გასაგებად გავითვალისწინოთ რომ $tg\varphi = \frac{y}{x}$, აგრეთვე y და x -ის ნიშნებით

დავადგინოთ რომელ მეოთხედშია პოლარული რადიუსი.

ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემა.

M წერტილს სივრცეში ცილინდრული კოორდინატებით ასე აღნიშნავენ $M(\rho,\varphi,z)$, სადაც პირველი ორი კოორდინატი ρ და φ ემთხვევა M წერტილის OXY სიბრტყეზე გეგმილის პოლარულ კოორდინატებს, ხოლო მესამე კოორდინატი z კი ემთხვევა M დეკარტულ კოორდინატს.

შევთანხმდეთ რომ $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ და $-\infty < z < +\infty$.



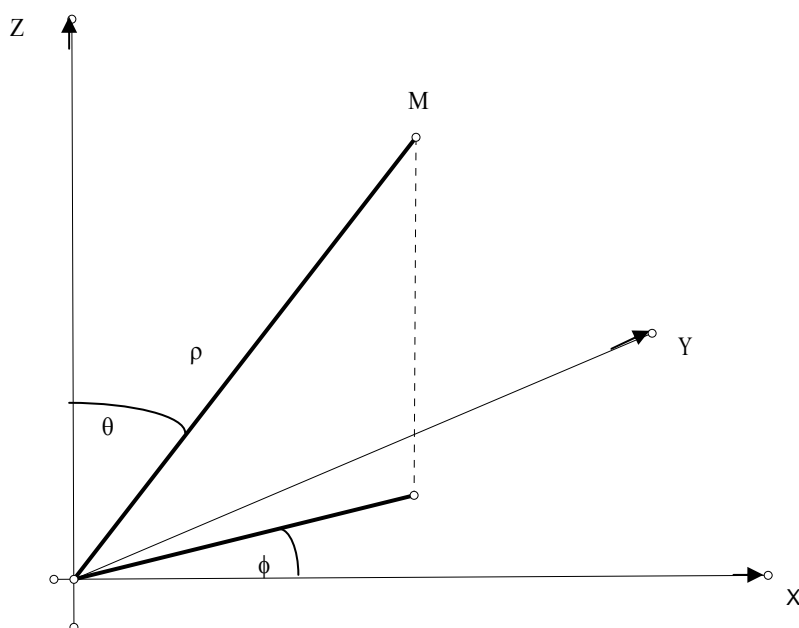
ამიტომ დეკარტული კოორდინატები ასე გამოისახება პოლარულით:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

სფერული კოორდინატები

M წერტილის სფერული კოორდინატები ეწოდება რიცხვების სამეულს ρ, φ, θ (იხ. ნახ.) სადა ρ არის მანძილი სათავიდან M წერტილამდე, φ -კუთხეა OM მონაკვეთის OXY სიბრტყეზე გეგმილსა და OX ღერძს შორის, ხოლო θ -კუთხეა OM მონაკვეთს და OZ ღერძს შორის.

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad \text{და} \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$



ნახ. მიხედვით აღვნიშნავთ რომ M წერტილის სფერული კოორდინატებით მისი x, y, z დეკარტული კოორდინატები ასე გამოისახება

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta.$$

