И. Т. Кигурадзе, Н. Р. Лежава, К вопросу разрешимости нелинейных двухточечных краевых задач, *Матем. заметки*, 1974, том 16, выпуск 3, 479–490

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 16, № 3 (1974), 479—490

УДК 517.9

К ВОПРОСУ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

И. Т. Кигурадзе, Н. Р. Лежава

Устанавливаются достаточные условия разрешимости краевых задач вида

$$u'' = f(t, u, u');$$

$$(u(0), \quad u'(0)) \in S_0, \quad (u(1), \quad u'(1)) \in S_1.$$

Библ. 11 назв.

1. Формулировка теорем существования. Рассмотрим задачу о существовании решения $u(t)$ уравнения

$$u'' = f(t, u, u'), \tag{1.1}$$

абсолютно непрерывного вместе с $u'(t)$ на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющего краевым условиям

$$(u(0), u'(0)) \in S_0, \quad (u(1), u'(1)) \in S_1. \tag{1.2}$$

Частными случаями задачи (1.1), (1.2) являются двухточечные задачи с линейными краевыми условиями, послужившие предметом многочисленных исследований (см., например, [1]—[7] и указанную там литературу). Отметим также работы [8] и [9], посвященные изучению нелинейных задач вида (1.1), (1.2).

Всюду в дальнейшем будем считать, что как S_0, так и S_1 являются связными и замкнутыми множествами двумерного евклидова пространства R^2, любые две точки которого можно соединить ограниченным, связным и замкнутым подмножеством этого же множества. Что же касается $f(t, x, y)$, она является действительной функцией, заданной в области

$$D = (0, 1) \times R^2$$

и удовлетворяющей локальным условиям Каратеодори, т. е. $f(t, x, y)$ измерима по t на отрезке $[0, 1]$ при любом $(x, y) \in R^2$, непрерывна по (x, y) в R^2 при почти всех $t \in (0, 1)$ и $\sup\{|f(t, x, y)|: |x| + |y| \leqslant r\} \in L(0, 1)$ при любом $r \in (0, +\infty)$.

Обозначим через S_{ix} и S_{iy} проекции множества S_i соответственно на оси x и y. Ниже отдельно рассматриваются следующие случаи:

$$S_{0y} \text{ и } S_{1x} \text{ ограничены}$$
$$\inf S_{0x} = \inf S_{1y} = -\infty, \quad \sup S_{0x} = \sup S_{1y} = +\infty, \tag{1.3$_1$}$$

$$S_{0x} \text{ и } S_{1y} \text{ ограничены}$$
$$\inf S_{0y} = \inf S_{1x} = -\infty, \quad \sup S_{0y} = \sup S_{1x} = +\infty, \tag{1.3$_2$}$$

$$(x, y) \notin S_i \text{ при } (-1)^i xy < 0,$$
$$\sup\{(-1)^j x + (-1)^{i+j} y : (x, y) \in S_i\} = +\infty \; (i, j = 0, 1) \tag{1.3$_3$}$$

и для некоторого $i_0 \in \{0, 1\}$ множество $S_{i_0 x}$ ограничено;

$$S_{0x} \text{ и } S_{1x} \text{ ограничены,}$$

$$\inf S_{0y} = \inf S_{1y} = -\infty, \quad \sup S_{0y} = \sup S_{1y} = +\infty. \tag{1.3$_4$}$$

Ограничение, которое налагается на функцию $f(t, x, y)$ относительно ее роста по последним двум аргументам, существенно зависит от структуры множеств S_i $(i = 0, 1)$ и имеет один из следующих видов:

$$f(t, x, y) \operatorname{sign} y \leqslant \omega(y) \sum_{i=1}^n g_i(t) h_i(x) (1 + |y|)^{1/q_i}, \tag{1.4$_1$}$$

$$f(t, x, y) \operatorname{sign} y \geqslant -\omega(y) \sum_{i=1}^n g_i(t) h_i(x) (1 + |y|)^{1/q_i}, \tag{1.4$_2$}$$

$$f(t, x, y) \operatorname{sign} x \geqslant -\omega(y) \sum_{i=1}^n g_i(t) h_i(x) (1 + |y|)^{1/q_i} \tag{1.4$_3$}$$

и

$$|f(t, x, y)| \leqslant \omega(y) \sum_{i=1}^n g_i(t) h_i(x) (1 + |y|)^{1/q_i}. \tag{1.4$_4$}$$

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть для некоторого* $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ *соблюдается условие* (1.3$_k$) *и в области* D *выполняется* *неравенство* (1.4_k), *где*

$$1 \leqslant q_i \leqslant +\infty, \ \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1, \ g_i(t) \in L^{p_i}(0, 1),$$

$$h_i(x) \in L^{q_i}(-\infty, +\infty) \qquad (i = 1, \dots, n)^{*)}, \tag{1.5}$$

а функция $\omega(y)$ *положительна и непрерывна в промежутке* $(-\infty, +\infty)$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{\omega(y)} = +\infty \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{dy}{\omega(y)} = +\infty. \tag{1.6}$$

Тогда задача (1.1), (1.2) *разрешима.*

Прежде чем перейти к формулировке следующих теорем, удобно ввести такое

Определение 1.1. Пусть $\sigma(t)$ — некоторая функция, абсолютно непрерывная вместе со своей производной на отрезке [0, 1]. Если

$$f(t, \sigma(t), \sigma'(t)) \geqslant \sigma''(t) \quad \text{при} \quad 0 < t < 1$$

и

$$(x, y) \notin S_i \quad \text{при} \quad x > \sigma(i), \quad (-1)^i [y - \sigma'(i)] < 0$$
$$(i = 0, 1),$$

то $\sigma(t)$ называется верхней функцией задачи (1.1), (1.2). Если же

$$f(t, \sigma(t), \sigma'(t)) \leqslant \sigma''(t) \quad \text{при} \quad 0 < t < 1$$

и

$$(x, y) \notin S_i \quad \text{при} \quad x < \sigma(i), \quad (-1)^i [y - \sigma'(i)] > 0$$
$$(i = 0, 1),$$

то $\sigma(t)$ называется нижней функцией задачи (1.1), (1.2).

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть* $\sigma_1(t)$ — *нижняя, а* $\sigma_2(t)$ — *верхняя функции задачи* (1.1), (1.2) *и* $\sigma_1(t) \leqslant \sigma_2(t)$ *при* $0 \leqslant t \leqslant 1$. *Далее, для некоторого* $k \in \{1, 2, 3\}$ *соблюдается условие* (1.3_k), *и в области* $0 < t < 1$, $\sigma_1(t) \leqslant x \leqslant \sigma_2(t)$, $|y| < +\infty$ *соблюдается неравенство* (1.4_k), *где*

$$\left.\begin{aligned} &1 \leqslant q_i \leqslant +\infty, \quad \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1, \quad g_i(t) \in L^{p_i}(0, 1), \\ &h_i(x) \in L^{q_i}(-r, r) \end{aligned}\right. \tag{1.7}$$

---

*) Здесь и в дальнейшем предполагается, что если $q_i = +\infty$ $(q_i = 1)$, то $1/q_i = 0$ $(p_i = +\infty)$.

при любом $r \in (0, +\infty)$ $(i = 1, \ldots, n)$, а $\omega(y)$ — *положительная и непрерывная в промежутке* $(-\infty, +\infty)$ *функция, удовлетворяющая условиям* (1.6). *Тогда задача* (1.1), (1.2) *разрешима.*

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть* $\sigma_1(t)$ — *нижняя, а* $\sigma_2(t)$ — *верхняя функции задачи* (1.1), (1.2) *и* $\sigma_1(t) \leqslant \sigma_2(t)$ *при* $0 \leqslant t \leqslant 1$. *Далее, соблюдается условие* (1.3_4) *и найдутся такие числа* $\alpha \in [0, 1)$ *и* $\beta \in (\alpha, 1]$, *что в области* $\alpha < t < 1$, $\sigma_1(t) \leqslant x \leqslant \sigma_2(t)$, $|y| < +\infty$ *выполняется неравенство* (1.4_1), *а в области* $0 < t < \beta$, $\sigma_1(t) \leqslant x \leqslant \sigma_2(t)$, $|y| < +\infty$ — *неравенство* (1.4_2), где q_i, $g_i(t)$, $h_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *и* $\omega(y)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1.2. *Тогда задача* (1.1), (1.2) *резрешима.*

Замечание 1. Как это следует из теоремы 2.4 работы [5], если вместо $g_i(t) \in L^{p_i}(0, 1)$ $(i = 1, \ldots, n)$ предположим $g_i(t) \in L^{p_i - \varepsilon}(0, 1)$ $(i = 1, \ldots, n)$, где ε — сколь угодно малое положительное число, то теорема 1.3 не будет справедливой.

Замечание 2. Из теорем 1.1—1.3 непосредственно вытекают теоремы С. Н. Бернштейна [2], М. Нагумо [7] и Х. Ефезера [4] о существовании решения уравнения (1.1), удовлетворяющего одному из следующих трех краевых условий:

$$u(0) = c_0, \quad u(1) = c_1, \qquad u(0) = c_0, \quad u'(1) = c_1$$

и

$$u'(0) = c_0, \quad u(1) = c_1.$$

Что же касается теоремы, доказанной в [3], то она является весьма частным случаем теоремы М. Нагумо [7] (см. также [10], стр 508, следствие 5.2), хотя это обстоятельство осталось незамеченным для авторов работы [3].

2. Леммы об априорных оценках.

ЛЕММА 2.1. *Пусть* q_i, $g_i(t)$, $h_i(x)$ *и* $\omega(y)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1.2, *а* r_0 — *некоторая положительная постоянная. Тогда для любого* $r \in (0, +\infty)$ *найдется такое* $c(r) \in (0, +\infty)$, *что какова бы ни была функция* $u(t)$, *абсолютно непрерывная вместе с* $u'(t)$ *на отрезке* $[0, 1]$, *будем иметь*

$$|u'(t)| \leqslant c(r) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{2.1}$$

если только

$$|u(t)| \leqslant r \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{2.2}$$

и соблюдается одно из следующих четырех условий:

$$| u'(0) | \leqslant r_0, \quad u''(t) \operatorname{sign} u'(t) \leqslant \omega(t, u(t), u'(t)) \quad \text{при } 0 < t < 1, \tag{2.3$_1$}$$

$$| u'(1) | \leqslant r_0, \quad u''(t) \operatorname{sign} u'(t) \geqslant -\omega(t, u(t), u'(t)) \quad \text{при } 0 < t < 1, \tag{2.3$_2$}$$

$$u(0)u'(0) \geqslant 0, \quad u(1)u'(1) \leqslant 0, \quad u''(t) \operatorname{sign} u(t) \geqslant -\omega(t, u(t), u'(t)) \quad \text{при } 0 < t < 1 \tag{2.3$_3$}$$

и

$$| u(0) | \leqslant r_0, \ | u(1) | \leqslant r_0, \quad | u''(t) | \leqslant \omega(t, u(t), u'(t)) \quad \text{при } 0 < t < 1, \tag{2.3$_4$}$$

где

$$\omega(t, x, y) = \omega(y) \sum_{i=1}^{n} g_i(t) h_i(x) (1 + | y |)^{1/q_i}. \tag{2.4}$$

При этом, если

$$h_i(x) \in L^{q_i}(-\infty, +\infty) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2.5}$$

то

$$c_0 = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \, c(r) < +\infty. \tag{2.6}$$

Доказательство. Положим $\rho_k = (-1)^k (1 + r_0)$, если соблюдается условие (2.3$_1$) или условие (2.3$_2$), $\rho_k = (-1)^k$, если соблюдается условие (2.3$_3$), и $\rho_k = (-1)^k \cdot (1 + 2r_0)$, если соблюдается условие (2.3$_4$).

Согласно (1.6) и (1.7) для любого $r \in (0, +\infty)$ найдутся такие числа $c_k(r)$ $(k = 1, 2)$, что

$$(-1)^k \int_{\rho_k}^{c_k(r)} \frac{dy}{\omega(y)} = 2 \sum_{i=1}^{n} \| g_i \|_{L^{p_i}(0,1)} \| h_i \|_{L^{q_i}(-r,r)} \qquad (k = 1, 2) \text{ *)}. \tag{2.7}$$

Отсюда ясно, что если соблюдаются условия (2.5), то

$$c(r) = \max \{ | c_k(r) | : k = 1, 2 \} \tag{2.8}$$

удовлетворяют условию (2.6).

Сначала рассмотрим случай, когда соблюдается условие (2.3$_1$). Если предположить, что $u(t)$ не удовлетворяет неравенству (2.1), то найдется такой отрезок $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$,

*) Через $\| g \|_{L^p(a, b)}$ обозначается норма функции $g(t)$ в пространстве $L^p(a, b)$.

что

$$| u'(\alpha) | = \rho_k, \quad | u'(t) | > | \rho_k | \geqslant 1 \quad \textit{при} \quad \alpha < t < \beta,$$
$$| u'(\beta) | > c(r),$$

где $k \in \{1, 2\}$. Разделив обе части второго из неравенств (2.3_1) на $\omega(u'(t))$ и интегрируя от α до β, согласно (2.2), (2.4) и (2.8), найдем

$$(-1)^k \int_{\rho_k}^{c_k(r)} \frac{dy}{\omega(y)} < (-1)^k \int_{\rho_k}^{u'(\beta)} \frac{dy}{\omega(y)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha}^{\beta} g_i(t) h_i(u(t)) | 2u'(t) |^{1/q_i} dt \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sum_{i=1}^{n} \| g_i \|_{L^{p_i}(0,1)} \| h_i \|_{L^{q_i}(-r,r)},$$

что противоречит условию (2.7). Полученное противоречие доказывает справедливость оценки (2.1). Совершенно аналогично покажем, что эта оценка имеет место и в том случае, когда соблюдается условие (2.3_2).

Перейдем к рассмотрению случая, когда соблюдается условие (2.3_3). Для доказательства неравенства (2.1) достаточно показать, что оно соблюдается на множестве тех точек промежутка (0, 1), в которых $u(t)$ и $u'(t)$ одновременно отличны от нуля. Пусть t_0 — произвольная точка из этого множества, а $(\alpha, \beta) \subset (0, 1)$ — максимальный промежуток, содержащий t_0, в котором $u(t)u'(t) \neq 0$. Для определенности считаем, что $u(t)u'(t) < 0$ при $\alpha < t < \beta$, так как случай, когда $u(t)u'(t) > 0$, рассматривается совершенно аналогично. Тогда $| u(\alpha) | > | u(\beta) |$. Поэтому, ввиду (2.3_3), будем иметь $u'(\alpha) = 0$, $u''(t) \operatorname{sign} u'(t) \leqslant \omega(t, u(t), u'(t))$ при $\alpha < t < \beta$. Отсюда, согласно вышедоказанному, следует, что $| u'(t) | \leqslant c(r)$ при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, т. е. справедлива оценка (2.1).

В заключение рассмотрим случай, когда соблюдается условие (2.3_4). Тогда очевидно существование такой точки $t_0 \in [0, 1]$, что $| u'(t_0) | \leqslant 2r_0$ и

$$u''(t) \operatorname{sign} [(t - t_0)u'(t)] \leqslant \omega(t, u(t), u'(t))$$
$$\text{при } 0 < t < 1. \quad (2.9)$$

Поэтому, согласно вышедоказанному, имеет место оценка (2.1). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. *Пусть* $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, *а* q_i, $g_i(t)$, $h_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *и* $\omega(y)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1.2. *Тогда для любого* $r \in (0, +\infty)$ *найдется такое* $c(r) \in (0, +\infty)$, *что для произвольной функции* $u(t)$, *абсолютно непрерывной вместе с* $u'(t)$ *на отрезке* $[0, 1]$, *справедлива оценка* (2.1), *если только* $u(t)$ *удовлетворяет условию* (2.2) *и неравенствам*

$$\begin{aligned} u''(t) \operatorname{sign} u'(t) &\geqslant -\omega(t, u(t), u'(t)) \quad \text{при} \quad 0 < t < \beta, \\ u''(t) \operatorname{sign} u'(t) &\leqslant \omega(t, u(t), u'(t)) \quad \text{при} \quad \alpha < t < 1, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $\omega(t, x, y)$ — *определенная равенством* (2.4) *функция.*

Доказательство. Пусть $c(r)$ — число, определенное равенствами (2.7) и (2.8), где

$$\rho_k = (-1)^k \left(\frac{2r}{\beta - \alpha} + 1\right).$$

Ввиду (2.2) и (2.10) найдется такая точка $t_0 \in [\alpha, \beta]$, что $|u'(t_0)| \leqslant 2r/(\beta - \alpha)$ и соблюдается неравенство (2.9). Повторяя теперь рассуждение, применяемое при доказательстве леммы 2.1, легко убедимся в справедливости оценки (2.1).

3. Леммы о разрешимости задачи (1.1), (1.2).

ЛЕММА 3.1. *Пусть для некоторого* $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ *соблюдается условие* (1.3_k) *и в области* D *выполняется неравенство*

$$|f(t, x, y)| \leqslant g(t), \tag{3.1}$$

где $g(t) \in L(0, 1)$. *Тогда задача* (1.1), (1.2) *разрешима.*

Доказательство. Для определенности предположим, что $k = 1$. Случай, когда $k \in \{2, 3, 4\}$, рассматривается совершенно аналогично. Положим

$$\begin{gathered} r_0 = |\inf S_{0y}| + |\sup S_{0y}|, \quad r_1 = |\inf S_{1x}| + |\sup S_{1x}|, \\ r = r_0 + r_1 + \int_0^1 g(t)\, dt. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Ввиду (1.3_1) очевидно существование таких чисел $y_i \in (-r_0, r_0)$ $(i = 1, 2)$, что

$$((-1)^i r, y_i) \in S_0 \quad (i = 1, 2).$$

Пусть G — ограниченное, связное и замкнутое подмножество S_0, содержащее точки $(-r, y_1)$ и (r, y_2). Обозначим через G^* множество всех точек вида $(u(1),\ u'(1))$, где $u(t)$ является решением уравнения (1.1) при начальных условиях

$$u(0)=x,\quad u'(0)=y, \tag{3.3}$$

а (x, y) пробегает множество G. Согласно теореме Кнезера — Фукухара [11] G^* является ограниченным, связным и замкнутым множеством.

Как это следует из (3.1) и (3.2), если $x=(-1)^i r$, $y=y_i$, где $i \in \{1, 2\}$, то $(-1)^i u(1) \geqslant r_1$, какое бы ни было решение $u(t)$ задачи (1.1), (3.3). Следовательно, G^* пересекается с прямыми $x=-r_1$ и $x=r_1$. Поскольку, кроме того, множество S_1 удовлетворяет условиям (1.3_1) и расположено в полосе $|x| \leqslant r_1$, $|y| < +\infty$, очевидно, что $S_1 \cap G^* \neq \phi$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. *Пусть* $\sigma_1(t)$ — *нижняя, а* $\sigma_2(t)$ — *верхняя функции задачи* (1.1), (1.2) *и* $\sigma_1(t) \leqslant \sigma_2(t)$ *при* $0 \leqslant t \leqslant 1$. *Далее, для некоторого* $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ *соблюдается условие* (1.3_k), *и в области* $0 < t < 1$, $\sigma_1(t) \leqslant x \leqslant \sigma_2(t)$, $|y| < +\infty$ *выполняется неравенство* (3.1), *где* $g(t) \in L(0, 1)$. *Тогда задача* (1.1), (1.2) *имеет решение* $u(t)$ *такое, что*

$$\sigma_1(t) \leqslant u(t) \leqslant \sigma_2(t) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{3.4}$$

Доказательство. Положим

$$f_m(t,x,y)=$$

$$=\begin{cases} f(t,\sigma_1(t),\sigma_1'(t))-\dfrac{1}{m} \ \text{при}\ x \leqslant \sigma_1(t)-\dfrac{1}{m}, \\ m\left(x-\sigma_1(t)+\dfrac{1}{m}\right)f(t,\sigma_1(t),y)+ \\ \qquad +m(\sigma_1(t)-x)f(t,\sigma_1(t),\sigma_1'(t))+x-\sigma_1(t) \\ \qquad\qquad \text{при}\quad \sigma_1(t)-\dfrac{1}{m}<x<\sigma_1(t), \\ f(t,x,y) \quad \text{при} \quad \sigma_1(t) \leqslant x \leqslant \sigma_2(t), \\ m\left(\sigma_2(t)+\dfrac{1}{m}-x\right)f(t,\sigma_2(t),y)+ \\ \qquad +m(x-\sigma_2(t))f(t,\sigma_2(t),\sigma_2'(t))+x-\sigma_2(t) \\ \qquad\qquad \text{при}\quad \sigma_2(t)<x<\sigma_2(t)+\dfrac{1}{m}, \\ f(t,\sigma_2(t),\sigma_2'(t))+\dfrac{1}{m} \quad \text{при} \quad x \geqslant \sigma_2(t)+\dfrac{1}{m}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Ясно, что

$$(|f_m(t, x, y)| \leqslant 1 + g(t) \quad \text{при} \quad (t, x, y) \in D$$
$$(m = 1, 2, \ldots) \qquad (3.6)$$

и

$$(-1)^i [f_m(t, x, y) - \sigma_i''(t)] \geqslant \frac{1}{m} \quad \text{при} \quad 0 < t < 1, \qquad (3.7)$$

$$(-1)^i [x - \sigma_i(t)] \geqslant \frac{1}{m}, |y| < +\infty \; (i = 1, 2).$$

Согласно лемме 3.1 при любом натуральном m уравнение $u'' = f_m(t, u, u')$ имеет решение $u_m(t)$, удовлетворяющее краевым условиям (1.2). Покажем, что

$$\sigma_1(t) - \frac{1}{m} \leqslant u_m(t) \leqslant \sigma_2(t) + \frac{1}{m} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \qquad (3.8)$$

Допустим обратное. Тогда для некоторых $i \in \{1, 2\}$ и $t_0 \in (0, 1)$ будем иметь $v(t_0) > 0$, где

$$v(t) = (-1)^i [u_m(t) - \sigma_i(t)] - \frac{1}{m}. \qquad (3.9)$$

Пусть $(\alpha, \beta) \subset (0, 1)$ — максимальный промежуток, содержащий t_0, в котором $v(t) > 0$. Если $\alpha > 0$, то, очевидно, $v(\alpha) = 0$ и $v'(\alpha) \geqslant 0$, если же $\alpha = 0$, то в силу определения 1.1 $v(\alpha) \geqslant 0$ и $v'(\alpha) \geqslant 0$. Поэтому из (3.7) вытекает, что

$$v'(t) \geqslant \frac{t - \alpha}{m} > 0, \quad v(t) > 0 \quad \text{при} \quad \alpha < t \leqslant \beta.$$

Отсюда, согласно определению β, ясно, что $\beta = 1$,

$$v'(1) > 0 \text{ и } v(1) > 0. \qquad (3.10)$$

Согласно определению 1.1 и условиям (3.9) и (3.10)

$$(u_m(1), u_m'(1)) \notin S_1,$$

что невозможно, поскольку $u_m(t)$ удовлетворяет краевым условиям (1.2). Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (3.8).

Из (3.6) и (3.8) легко следует, что последовательности $\{u_m(t)\}_{m=1}^{+\infty}$ и $\{u_m'(t)\}_{m=1}^{+\infty}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на $[0, 1]$. Поэтому, согласно лемме Арцела — Асколи, без ограничения общности можем считать, что они равномерно сходятся. Учитывая теперь условия (3.5), (3.6) и (3.8), легко заключим, что

$$u(t) = \lim_{m \to +\infty} u_m(t)$$

является решением задачи (1.1), (1.2), удовлетворяющим неравенству (3.4). Лемма доказана.

4. Доказательства теорем существования.

Доказательство теоремы 1.1. Положим

$$r_0 = |\inf S_{k-1y}| + |\sup S_{k-1y}| + |\inf S_{2-kx}| + |\sup S_{2-kx}| \quad \text{при } k \in \{1, 2\},$$

$$r_0 = |\inf S_{i_0 x}| + |\sup S_{i_0 x}| \quad \text{при} \quad k = 3, \tag{4.1}$$

$$r_0 = \sum_{i=0}^{1} (|\inf S_{ix}| + |\sup S_{ix}|) \quad \text{при} \quad k = 4.$$

Пусть c_0 — положительная постоянная, фигурирующая в лемме 2.1, $\rho = r_0 + 2c_0$

$$\chi(s) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad s < \rho, \\ 2 - \dfrac{s}{\rho} & \text{при} \quad \rho \leqslant s \leqslant 2\rho, \\ 0 & \text{при} \quad s > 2\rho, \end{cases}$$

$$\tilde{f}(t, x, y) = \chi(|x| + |y|) f(t, x, y). \tag{4.2}$$

Ясно, что

$$|\tilde{f}(t, x, y)| \leqslant g(t) \quad \text{при} \quad (t, x, y) \in D, \tag{4.3}$$

где

$$g(t) = \sup\{|f(t, x, y)| : |x| + |y| \leqslant 2\rho\} \in L(0, 1). \tag{4.4}$$

Поэтому, в силу леммы 3.1, уравнение

$$u'' = \tilde{f}(t, u, u') \tag{4.5}$$

имеет решение $u(t)$, удовлетворяющее краевым условиям (1.2).

Как это следует из (1.3_k), (1.4_k), (4.1) и (4.2), $u(t)$ удовлетворяет условию (2.3_k) и

$$|u(i)| \leqslant r_0, \quad \text{где} \quad i = 0 \text{ или } 1.$$

Поэтому, согласно лемме 2.1,

$$|u'(t)| \leqslant c_0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$|u(t)| + |u'(t)| \leqslant r_0 + 2c_0 = \rho \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Ввиду последнего неравенства из (4.2) следует, что $u(t)$ является решением уравнения 1.1. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Пусть r_0 — число, определенное равенствами (4.1),

$$r = \max \{ |\sigma_1(t)| + |\sigma_2(t)| + |\sigma_2'(t)| + |\sigma_1'(t)| : 0 \leqslant t \leqslant 1\},$$

$c(r)$ — положительная постоянная, выбранная для r, согласно лемме 2.1, $\rho = c(r) + r$, а $\tilde{f}(t, x, y)$ — функция, определенная равенствами (4.2).

Нетрудно убедиться, что $\sigma_1(t)$ является нижней, а $\sigma_2(t)$ — верхней функцией задачи (4.5), (1.2) и соблюдаются условия (4.3) и (4.4). Поэтому, согласно лемме 3.2, задача (4.5), (1.2) имеет решение $u(t)$, удовлетворяющее неравенству (3.4).

Из (1.3_k), (1.4_k), (3.4), (4.1) и (4.2) вытекает, что $u(t)$ удовлетворяет неравенствам (2.2) и (2.3_k). Поэтому, согласно лемме 2.1, имеет место оценка (2.1). Следовательно,

$$|u(t)| + |u'(t)| \leqslant r + c(r) = \rho$$
$$\text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Ввиду этого неравенства из (4.2) вытекает, что $u(t)$ является решением уравнения (1.1). Теорема доказана.

Теорема 1.3 доказывается совершенно аналогично теореме 1.2, только вместо леммы 2.1 следует применить лемму 2.2.

Институт прикладной математики
Тбилисского университета

Поступило
23.VII.1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Bailey P. B., Shampine L. F., Waltman P. E., Nonlinear two point boundary value problems, N. Y., 1968.
[2] Бернштейн С. Н., Об уравнениях вариационного исчисления, Успехи матем. наук, 8 (1940), 32—74.
[3] Ельшин М. И., Смолич Л. И., Об одном условии разрешимости краевой задачи, Матем. заметки, **13**, № 2 (1973), 247—250.
[4] Epheser H., Über die Existenz der Lösungen von Randwertaufgaben mit gewöhnlichen, nictlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Z., **61**, № 4 (1955), 435—454.

[5] Кигурадзе И. Т., О некоторых сингулярных краевых задачах для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, Дифф. уравнения, **4**, № 10 (1968), 1753—1773.
[6] Kiguradze J. T., On a singular boundary value problem, J. Math. Anal. Appl., **30**, № 3 (1970), 475—489.
[7] Nagumo M., Ueber die differentialgleichung $y'' = f(x, y, y')$, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **19** (3), (1937), 861—866.
[8] Bebernes J., Wilhelmsen R., A remark concerning a boundary value problem, J. Differential Equations, **10**, № 3 (1971), 389—391.
[9] Гудков В. В., Замечание об одной краевой задаче, Дифф. уравнения, **9**, № 6 (1973), 1133—1135.
[10] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1970.
[11] Fukuhara M., Sur une generalisation d'un theoreme de Kneser, Proc. Japan. Acad., **29** (1953), 154—155.