И. Т. Кигурадзе, Б. Л. Шехтер, Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж.*, 1987, том 30, 105–201

УДК 517.927

СИНГУЛЯРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

И. Т. Кигурадзе, Б. Л. Шехтер

ВВЕДЕНИЕ

Систематическое исследование начальной и краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$u''=f(t,\ u,\ u') \tag{0.1}$$

с сингулярностями относительно независимой или одной из фазовых переменных имеет не более чем тридцатилетнюю историю, хотя в приложениях такие задачи стали возникать сравнительно давно. Например, еще в начале нашего столетия в работе Эмдена [74], посвященной равновесию сферы из политропного газа, появилась сингулярная задачи Коши

$$u''=-\frac{2}{t}u'-u^m,\quad u(0)=c_0>0,\quad u'(0)=0.$$

Однако долгое время математики ограничивались изучением лишь сингулярных задач конкретного вида, не предпринимая попытки разработать более или менее общие методы исследования. В известной монографии Сансоне ([51], стр. 349) в частности констатируется, что ввиду отсутствия общей теории о разрешимости сингулярной задачи Коши, существование решения вышеупомянутой задачи из работы Эмдена может быть установлено «только путем непосредственного изучения» соответствующего дифференциального уравнения.

В настоящее время сингулярная задача Коши изучена с достаточной полнотой не только для уравнения (0.1), но и для дифференциальных уравнений и систем высших порядков [11, 12, 49, 59]. Довольно далеко продвинута и теория сингулярных краевых задач для уравнения (0.1). Настоящая работа посвящена изложению основ этой теории на примере двухточечных задач и задач об ограниченных и монотонных решениях.

В первой главе (§§ 1—4) рассматриваются двухточечные задачи вида

$$u(a+)=c_1,\ u^{(i-1)}(b-)=c_2, \qquad (0.2_i)$$

где $i\in\{1, 2\}$ и $-\infty<a<b<+\infty$.

В основе § 1 лежат результаты работ [7, 16, 61, 82, 83], касающиеся существования и единственности решений линейного дифференциального уравнения

$$u''=p_1(t)u+p_2(t)u'+p_0(t),$$

удовлетворяющих краевым условиям (0.2_1) и (0.2_2). При этом не исключается случай, когда все функции $p_j:]a, b[\to\mathbf{R}$ $(j=0, 1, 2)$ не суммируемы на сегменте $[a, b]$, имея особенности на его концах.

§§ 2 и 3 посвящены исследованию двухточечных краевых задач для уравнения (0.1) при наличии у $f:]a, b[\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ неинтегрируемых сингулярностей относительно первого аргумента в точках a и b.

В § 2 рассматривается случай, когда уравнение (0.1) в определенном смысле сравнимо с линейным. Изучение краевых задач для регулярных уравнений такого типа восходит к работам Пикара [92], Тонелли [102] и Эфезера [75]. Из дальнейших исследований, отметим [26, 47, 68]. Приводимые нами теоремы существования и единственности решений задач (0.1), (0.2_i) $(i=1,2)$ представляют собой определенную модификацию результатов работ [15, 82]. Кроме того, в § 2 обсуждается вопрос об условиях неединственности решений упомянутых задач. Мы, следуя [28, 48, 60], устанавливаем признаки существования не менее заданного числа решений этих задач и изучаем их осцилляционные свойства. Такие свойства в ситуациях, когда единственность нарушается, нередко представляют интерес с точки зрения приложений (см., например, [86]).

В § 3 изучается уравнение (0.1) с быстрорастущей по фазовым переменным правой частью. Основополагающие результаты о разрешимости краевых задач для таких уравнений в регулярном случае принадлежит С. Н. Бернштейну [3], Нагумо [88] и Эфезеру [75]. Эти результаты обобщались в различных направлениях многими авторами (см. [4, 8, 30, 56] и указанную там литературу). В [13, 14] предложен подход к исследованию сингулярных двухточечных краевых задач, основанный на априорных оценках решений односторонних дифференциальных неравенств. Этого подхода мы и придерживаемся при изложении результатов § 3.

В § 4 рассматривается вопрос о существовании и единственности решения уравнения (0.1), удовлетворяющего условиям

$$u(a+)=0,\ u^{(i-1)}(b-)=0,\ u(t)>0 \text{ при } a<t<b, \qquad (0{,}3_i)$$

где $i\in\{1, 2\}$. При этом допускается возможность наличия у

$f:]a, b[\times]0, +\infty[\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ особенностей как по первому (в точках a и b), так и по второму (в точке 0) аргументам. Такие сингулярные задачи часто встречаются в приложениях. Например, исследование равновесия мембраны при отсутствии цепных усилий на контуре сводится к отысканию решения краевой задачи

$$u''=\frac{t^2}{32u^2},\quad u(0+)=0,\quad u(1-)=0,\quad u(t)>0 \text{ при } 0<t<1$$

(см. [44, 45, 52]), а в теории пограничного слоя вязкой несжимаемой жидкости возникает задача

$$u''=-\frac{1-t}{u},\quad u(0+)=0,\ u(1-)=0,\ u(t)>0 \text{ при } 0<t<1$$

(см. [67, 70, 71]).

Ю. А. Клоков и А. И. Ломакина [23] изучали задачу (0.1), (0.3_1) при допущениях, что $f(t, x, y)\equiv x^{-\lambda}f_0(t, x, y), \lambda>0$ и $f_0: [a, b]\times\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ — непрерывная функция. Талиаферро [100] и Буйе и Гомес [69] рассмотрели задачу ($0{,}3_1$) для уравнения $u''=h(t)u^{-\lambda}$. В случае, когда сингулярность функции f относительно второго аргумента, вообще говоря, не носит степенного характера, задачи (0.1), (0.3_i) ($i=1,2$) исследованы А. Г. Ломтатидзе [35, 39]. Его результаты и изложены в § 4.

Вторая глава (§§ 5 и 6) посвящена задачам на бесконечном промежутке.

В § 5, основой которого послужили результаты работ [14, 77, 81], изучаются следующие задачи об ограниченных и монотонных решениях:

$$s_1(t)\leqslant u(t)\leqslant s_2(t) \text{ при } a<t<b, \tag{0.4}$$

$$u^{(i-1)}(a+)=c,\ s_1(t)\leqslant u(t)\leqslant s_2(t) \text{ при } a<t<b \tag{0.5_i}$$

и

$$u^{(i-1)}(0+)=c,\ u(t)\geqslant 0,\ u'(t)\leqslant 0 \text{ при } t>0, \tag{0.6_i}$$

где $i\in\{1, 2\}$, $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$, а $s_k:]a, b[\to\mathbf{R}\,(k=1,2)$ — заранее заданные функции, удовлетворяющие неравенству $s_1(t)\leqslant s_2(t)$ при $a<t<b$.

Задача (0.1), (0.6_1) впервые была рассмотрена еще в конце прошлого столетия Кнезером [85], который установил признаки ее однозначной разрешимости в случае, когда $f(t, x, y)\equiv\equiv f(t, x)$. Тридцать лет спустя Томас [101] и Ферми [76], изучая распределение электронов в тяжелом атоме, пришли к краевой задаче

$$u''=t^{-1/2}u^{3/2},\ u(0+)=1,\ u(+\infty)=0,$$

что послужило поводом появления серии работ итальянских математиков о задачах типа Кнезера (см. [51], стр. 376—380).

С помощью упомянутых выше результатов С. Н. Бернштейна и Нагумо Хартманом и Уинтнером [77], Опялем [90] и Ю. А. Клоковым [21, 22] были установлены довольно общие условия существования решений как задачи (0.1), (0.6_1), так и задач (0.1), (0.4) и (0.1), (0.5_1).

В последнее время задачи вида (0.1), (0.4) и (0.1), (0.5_1) вновь привлекли внимание в связи с развитием А. А. Логуновым и А. А. Власовым [32] нового подхода к описанию гравитационного взаимодействия в пространстве Минковского. В частности, в [32] поставлены задачи

$$u''=-\frac{2}{t}u'+\frac{u'^2}{u(u-2)}+\frac{u-2}{u}\left(u^{-2}+\frac{2}{t^2}u\right),$$

$$u(0+)=2,\quad \lim_{t\to+\infty}\frac{u(t)}{t}=1,\quad u(t)>2 \text{ при } t>0$$

и

$$u''=\frac{2u}{b-t}-\frac{u}{r^2-u^2}\left[u'^2+\left(1-\frac{u^2}{r^2}\right)^2\right]+$$
$$+\frac{2u}{(b-t)^2}\left(1-\frac{u^2}{r^2}\right)+\frac{3u}{r^2}\left[\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{r^2}\right)\right]^{1/2},$$
$$u(0+)=2,\quad u(b-)=0,\quad 0<u(t)<2 \quad \text{при } 0<t<b,$$

где $b^3=2r^2$ и $r\geqslant 2$. Е. И. Моисеевым и В. А. Садовничим [40—43] доказана разрешимость этих задач, а для первой из них установлена единственность решения и найдено его асимптотическое представление в окрестности $+\infty$. Л. А. Лепин [31] показал, что разрешимость упомянутых задач может быть получена из общих теорем существования решений задач (0.1), (0.4) и (0.1), (0.5_1).

Задача (0.1), (0.6_2) также имеет интересные приложения. Например, в теории капиллярных явлений она появляется в виде

$$u''=ru(1+u'^2)^{3/2},\quad u'(a+)=c,\quad u(+\infty)=0$$

и

$$u''=(1+u'^2)^{3/2}\left(ru-\frac{u'}{t\sqrt{1+u'^2}}\right),\; u'(a+)=c,\; u(+\infty)=0,$$

где $r>0$, $a>0$ и $c<0$ [80]. Задачи такого типа изучались А. Д. Мышкисом и Г. В. Щербиной [46, 64—66].

§ 6 посвящен конкретной краевой задаче

$$u''=-\frac{\gamma}{t}u'+u-|u|^\lambda \operatorname{sign} u, \tag{0.7}$$

$$u'(0+)=0,\quad u(+\infty)=0, \tag{0.8}$$

где γ и λ — действительные числа, причем $\lambda>0$. Эта задача возникает в нелинейной теории поля при изучении взаимодействия элементарных частиц. Кроме того, она встречается в ряде других областей физики, в частности, в статистической теории ядра и нелинейной оптике (см., например, [1, 2, 9, 87, 89] и указанную там литературу).

Особенно интенсивно уравнение (0.7) изучалось в случае, когда $\gamma=2$. В этом случае преобразование

$$u=\frac{v}{t} \tag{0.9}$$

приводит (0.7) к виду

$$v''=v-\frac{1}{t^{\lambda-1}}|v|^{\lambda}\operatorname{sign} v. \tag{0.10}$$

Если $v:]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ — решение (0.10),

$$v(0+)=0, \quad v(+\infty)=0 \tag{0.11}$$

и, кроме того,

$$\lim_{t\to 0}\frac{|v(t)|}{t}<+\infty, \tag{0.12}$$

то функция $u:]0, +\infty[\to \mathbf{R}$, определенная соотношением (0.9), является решением задачи (0.7), (0.8) с $\gamma=2$.

Как показал Нехари [89], при $1<\lambda<5$ задача (0.10), (0.11) имеет положительное на $]0, +\infty[$ решение, которое при $\lambda\leqslant 4$ удовлетворяет (0.12), а при $\lambda=5$ эта задача не имеет ненулевых решений. Впрочем, применяемый в [89] метод свидетельствует об отсутствии таких решений для всех $\lambda\geqslant 5$ (см. также [63, 96]). Результат Нехари был усилен Райдером [95], который показал, что при $1<\lambda<5$ (0.10), (0.11) имеет решение с любым наперед заданным числом нулей в $]0, +\infty[$ (для $\lambda\in]1,4[$ аналогичное утверждение установлено В. П. Шириковым [63]). Однако, вопрос о том, удовлетворяют ли решения, построенные в [89] и [95], условию (0.12) при $\lambda>4$, оставался открытым. Положительный ответ на этот вопрос дал Сансоне [96]. Таким образом, было установлено, что если $\gamma=2$, $1<\lambda<5$, а $l\in\{0, 1, \ldots\}$, то задача (0.7), (0.8) имеет решение ровно с l нулями на $]0, +\infty[$.

В общем случае, т. е. когда γ может отличаться от 2, задача (0.7), (0.8) исследовалась Курцем [87], которым для любого целого неотрицательного l установлено (хотя для $i\neq 0$ и не вполне корректно) существование решения, имеющего ровно l нулей на $]0, +\infty[$, если только $1\leqslant\gamma\leqslant 2$ и $1<\lambda\leqslant 3$.

В § 6 разрешимость и свойства решений задачи (0.7), (0.8) рассматриваются при всех действительных γ и положительных λ, при этом мы следуем работе [99].

В настоящей работе приняты следующие обозначения:

$$\mathbf{R}=]-\infty, +\infty[, \ \mathbf{R}_+=[0, +\infty[, \ \mathbf{R}_-=]-\infty, 0],$$
$$\mathbf{R}^n=\underbrace{\mathbf{R}\times\ldots\times\mathbf{R}}_{n} \ (n=2, 3, \ldots);$$

$u(t+)$ и $u(t-)$ — соответственно правый и левый односторонние пределы функции u в точке t;

$C(I)$, где $I\subset\mathbf{R}$, — множество непрерывных функций $u: I\to\mathbf{R}$;

$\tilde{C}^1([t_1, t_2])$ — множество функций $u:[t_1, t_2]\to\mathbf{R}$, абсолютно непрерывных вместе со своей первой производной;

$L([t_1, t_2])$ — множество суммируемых функций $u:[t_1, t_2]\to\mathbf{R}$;

$\tilde{C}^1_{loc}(I)$ и $L_{loc}(I)$, где $I\subset\mathbf{R}$ — открытый или полуоткрытый промежуток, — множества функций $u: I\to\mathbf{R}$, сужения которых на любой сегмент $[t_1, t_2]\subset I$ принадлежат соответственно $\tilde{C}^1([t_1, t_2])$ и $L([t_1, t_2])$;

$K([t_1, t_2]\times D)$, где $D\subset\mathbf{R}^n$, $n\in\{1,2,\cdots\}$ ($\mathbf{R}^1=\mathbf{R}$), — класс Каратеодори, т. е. множество функций $f:[t_1, t_2]\times D\to\mathbf{R}$ таких, что $f(\cdot, x_1, \ldots, x_n):[t_1, t_2]\to\mathbf{R}$ измерима при всех $(x_1, \ldots, x_n)\in D$, $f(t,\cdot, \ldots, \cdot): D\to\mathbf{R}$ непрерывна при почти всех $t\in[t_1, t_2]$ и

$$\sup\{|f(\cdot, x_1, \ldots, x_n)| : (x_1, \ldots, x_n)\in D_0\}\in L([t_1, t_2])$$

для любого компакта $D_0\subset D$;

$K_{loc}(I\times D)$, где $I\subset\mathbf{R}$ — открытый или полуоткрытый промежуток и $D\subset\mathbf{R}^n$, $n\in\{1,2,\cdots\}$, — множество функций $f: I\times D\to\mathbf{R}$, сужения которых на множество $[t_1, t_2]\times D$ принадлежат $K([t_1, t_2]\times D)$, каков бы ни был сегмент $[t_1, t_2]\subset I$;

$K^0(]t_1, t_2[\times\mathbf{R}^2)$ — множество функций $f:]t_1, t_2[\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, для которых отображение $t\to f(t, x(t), y(t))$ измеримо, какими бы ни были $x, y\in C(]t_1, t_2[)$.

Функцию $u:]a, b[\to\mathbf{R}$ мы будем называть решением уравнения (0.1) в интервале $]a, b[$, если она принадлежит $\tilde{C}^1_{loc}(]a, b[)$ и удовлетворяет (0.1) почти всюду на этом интервале.

Глава 1

ЗАДАЧИ НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Настоящий параграф посвящен линейному сингулярному дифференциальному уравнению

$$u''=p_1(t)u+p_2(t)u'+p_0(t) \tag{1.1}$$

при краевых условиях следующих двух типов

$$u(a+)=c_1,\ u(b-)=c_2 \tag{1.2$_1$}$$

и

$$u(a+)=c_1,\ u'(b-)=c_2, \tag{1.2$_2$}$$

где $c_j\in\mathbf{R}$ ($j=1,2$). Прежде чем сформулировать ограничения, налагаемые на функции p_1, p_2 и p_0, введем оператор $\sigma: L_{loc}(]a, b[)\to C(]a, b[)$, определенный равенством

$$\sigma(p)(t)=\exp\left[\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{t} p(\tau)\,d\tau\right].$$

Если $\sigma(p)\in L([a, b])$, то на $]a, b[$ положим

$$\sigma_1(p)(t)=\frac{1}{\sigma(p)(t)}\int\limits_a^t \sigma(p)(\tau)\,d\tau\int\limits_t^b \sigma(p)(\tau)\,d\tau$$

и

$$\sigma_2(p)(t)=\frac{1}{\sigma(p)(t)}\int\limits_a^t \sigma(p)(\tau)\,d\tau.$$

При рассмотрении задачи (1.1), (1.2$_1$) мы будем предполагать, что

$$p_j,\ p_2\in L_{loc}(]a, b[),\ \ \sigma(p_2)\in L([a, b]),\ \ p_j\sigma_1(p_2)\in L([a, b])\ \ (j=0,1), \tag{1.3$_1$}$$

а при рассмотрении задачи (1.1), (1.2$_2$), что

$$p_j,\ p_2\in L_{loc}(]a, b]),\quad \sigma(p_2)\in L([a, b]),\ \ p_j\sigma_2(p_2)\in L([a, b])\quad (j=0,1). \tag{1.3$_2$}$$

Соотношения (1.3$_1$) выполнены, если, например,

$$|p_j(t)|\leqslant\frac{\lambda}{[(t-a)(b-t)]^{1+\delta}}\ \ (j=0,\ 1),\quad |p_2(t)|\leqslant\lambda+\frac{\delta}{t-a}+\frac{\delta}{b-t}$$
$$\text{при } a<t<b,$$

а соотношения (1.3$_2$), — если

$$|p_j(t)|\leqslant\frac{\lambda}{(t-a)^{1+\delta}}\ \ (j=0,\ 1),\quad |p_2(t)|\leqslant\lambda+\frac{\delta}{t-a}\ \text{при } a<t<b,$$

где $\lambda>0$ и $0\leqslant\delta<1$.

1.1. Однородное уравнение. В этом пункте изучается поведение решений сингулярного однородного уравнения

$$u''=p_1(t)\,u+p_2(t)\,u' \tag{1.4}$$

вблизи точек, где его коэффициенты имеют сингулярности. В дальнейшем особое внимание мы уделим некоторым классам таких уравнений, не имеющих нетривиальных решений при краевых условиях

$$u(a+)=0,\ \ u(b-)=0 \tag{1.5$_1$}$$

или

$$u(a+)=0,\ \ u'(b-)=0, \tag{1.5$_2$}$$

ибо эти классы играют важную роль и при исследовании нелинейных краевых задач.

Рассматривая уравнение (1.4), мы будем предполагать, что либо

$$p_1,\ p_2 \in L_{loc}(]a, b[),\quad \sigma(p_2) \in L([a, b]),\quad p_1\sigma_1(p_2) \in L([a, b]),\qquad (1.6_1)$$

либо

$$p_1,\ p_2 \in L_{loc}(]a, b]),\quad \sigma(p_2) \in L([a, b]),\quad p_1\sigma_2(p_2) \in L([a, b]).\qquad (1.6_2)$$

Лемма 1.1. Пусть выполнены условия (1.6_1). Тогда

1. Уравнение (1.4) имеет решение u, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(a+)=0,\quad \lim_{t\to a}\frac{u'(t)}{\sigma(p_2)(t)}=1,\qquad (1.7)$$

причем

$$u(t)=O\left(\int_a^t \sigma(p_2)(\tau)\,d\tau\right) \text{ при } t\to a.\qquad (1.8)$$

2. Любое решение $\tilde{u}$ этого уравнения, линейно независимое с u, имеет конечный ненулевой предел $\tilde{u}(a+)$.

3. Какова бы ни была ограниченная непрерывно дифференцируемая функция $v:]a, b[\to \mathbf{R}$,

$$\liminf_{t\to a}\frac{u(t)\,|v'(t)|}{\sigma(p_2)(t)}=0.\qquad (1.9)$$

Доказательство. Пусть $t_k \in \left]a, \frac{a+b}{2}\right[$ $(k=1, 2, \ldots)$ и $t_k\to a$ при $k\to+\infty$. Для каждого натурального k определим на промежутке $[t_k, b[$ функцию u_k как решение уравнения (1.4) при начальных условиях

$$u(t_k)=0,\quad u'(t_k)=\sigma(p_2)(t_k).$$

Тогда

$$u_k'(t)=\sigma(p_2)(t)\left[1+\int_{t_k}^t p_1(\tau)\frac{u_k(\tau)}{\sigma(p_2)(\tau)}\,d\tau\right] \text{ при } t_k\leqslant t<b.\qquad (1.10)$$

Из этого равенства легко получаем

$$w_k(t)\leqslant 1+\int_a^t |p_1(\tau)|\,w_k(\tau)\,\sigma_2(p_2)(\tau)\,d\tau \text{ при } t_k\leqslant t<b,$$

где

$$w_k(t)=|u_k(t)|\left[\int_a^t \sigma(p_2)(\tau)\,d\tau\right]^{-1}.$$

Таким образом, в силу леммы Гронуолла—Беллмана (см., например, [18], стр. 49]),

$$|u_k(t)| \leqslant A_T \int\limits_a^t \sigma(p_2)(\tau)\,d\tau \text{ при } t_k \leqslant t \leqslant T < b \quad (k=1, 2, \ldots), \tag{1.11}$$

если только

$$A_T = \exp\left[\int\limits_a^T |p_1(t)|\,\sigma_2(p_2)(t)\,dt\right].$$

Поэтому, согласно (1.10),

$$\left|\frac{u_k'(t)}{\sigma(p_2)(t)} - 1\right| \leqslant A_T \int\limits_a^t |p_1(\tau)|\,\sigma_2(p_2)(\tau)\,d\tau$$

$$\text{при } t_k \leqslant t \leqslant T < b \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{1.12}$$

Продолжим функцию u_k на $[a, t_k[$, положив на этом промежутке $u_k'(t)=u_k'(t_k)$. Тогда с учетом полученных неравенств нетрудно заключить, что последовательности $(u_k)_{k=1}^{+\infty}$ и $(u_k')_{k=1}^{+\infty}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на каждом сегменте из интервала $]a, b[$, так что, не нарушая общности, их можно считать равномерно сходящимися на этих сегментах. Очевидно, функция

$$u(t) = \lim_{k\to+\infty} u_k(t) \text{ при } a < t < b$$

является решением уравнения (1.4) и, ввиду неравенств (1.11) (1.12), удовлетворяет (1.7) и (1.8).

Если $\tilde{u}$ — произвольное решение уравнения (1.4), линейно независимое с u, то

$$\tilde{u}(t) = \alpha_1 u(t) + \alpha_2 u(t) \int\limits_t^{a^*} \frac{\sigma(p_2)(\tau)}{u^2(\tau)}\,d\tau \text{ при } a < t \leqslant a^*,$$

где $\alpha_j = \mathrm{const}\,(j=1, 2)$, $\alpha_2 \neq 0$, а $a^* \in]a, b[$ таково, что

$$u(t) > 0 \text{ при } a < t \leqslant a^*.$$

Следовательно,

$$\tilde{u}(a+) = \alpha_2 \lim_{t\to a} \frac{\sigma(p_2)(t)}{u'(t)} = \alpha_2.$$

Наконец, предположим, что для некоторой непрерывно дифференцируемой функции $v:]a, b[\to \mathbf{R}$ равенство (1.9) не имеет места. Тогда найдутся числа δ и $a_0 \in]a, b[$ такие, что

$$u(t) > 0, \quad |v'(t)| > \delta \frac{u'(t)}{u(t)} \text{ при } a < t \leqslant a_0,$$

а значит

$$|v(t)| \geqslant \int\limits_t^{a_0} |v'(\tau)|\,d\tau - |v(a_0)| \geqslant \delta \ln \frac{u(a_0)}{u(t)} - |v(a_0)| \text{ при } a < t \leqslant a_0,$$

что невозможно, если только функция v ограничена. Лемма доказана.

С помощью элементарной замены в уравнении (1.4) независимой переменной из леммы 1.1 можно получить следующее утверждение.

Лемма 1.1′. Пусть выполнены условия (1.6_1). Тогда

1. Уравнение (1.4) имеет решение u, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(b-)=0, \quad \lim_{t\to b} \frac{u'(t)}{\sigma(p_2)(t)}=-1, \tag{1.13$_1$}$$

причем

$$u(t)=O\left(\int_t^b \sigma(p_2)(\tau)\,d\tau\right) \text{ при } t\to b.$$

2. Любое решение u этого уравнения, линейно независимое с u, имеет конечный ненулевой предел $\tilde{u}(b-)$.

3. Какова бы ни была ограниченная непрерывно дифференцируемая функция $v:]a, b[\to\mathbb{R}$,

$$\liminf_{t\to b} \frac{u(t)\,|v'(t)|}{\sigma(p_2)(t)}=0.$$

Заметим, что если выполнены условия (1.6_2), то коэффициенты уравнения (1.4) не имеют неинтегрируемых особенностей в точке b. Следовательно, в этой точке можно произвольно задавать значения решения и его первой производной. В частности, ниже нам понадобится решение этого уравнения при начальных условиях

$$u(b-)=1, \; u'(b-)=0. \tag{1.13$_2$}$$

Отметим также, что, как показано в работе [83], если второе из условий (1.2_2) заменить на

$$\lim_{t\to b} \frac{u'(t)}{\sigma(p_2)(t)}=c_2,$$

то задачу (1.1), (1.2_2) можно рассматривать и в случае, когда функции p_1, p_2 и p_0 не интегрируемы в точке b.

1.2. Функция Грина. Как и в регулярном случае, существует тесная связь между однозначной разрешимостью краевой задачи (1.1), (1.2_i) и отсутствием нетривиальных решений у однородной задачи (1.4), (1.5_i) $(i=1, 2)$. К изучению этой связи мы сейчас и переходим.

Определение 1.1. Пусть $i\in\{1, 2\}$. Функция $\mathcal{G}:]a, b[\times]a, b[\to\mathbb{R}$ называется функцией Грина задачи (1.4), (1.5_i), если для любого $\tau\in]a, b[$.

1. Функция $u(t)=\mathcal{G}(t, \tau)$ непрерывна на $]a, b[$ и удовлетворяет краевым условиям (1.5_i).

2. Сужения u на интервалы $]a, \tau[$ и $]\tau, b[$ являются решениями уравнения (1.4).

3. $u'(\tau+)-u'(\tau-)=1$.

Лемма 1.2. Пусть $i \in \{1,2\}$, выполняются условия (1.6_i), а задача (1.4), (1.5_i) не имеет нетривиальных решений. Тогда существует единственная функция Грина $\mathcal{G}$ этой задачи и

$$\mathcal{G}(t, \tau)=\begin{cases} -\dfrac{u_2(t)\, u_1(\tau)}{u_2(a+)\, \sigma(p_2)(\tau)} & \text{при } a<\tau<t<b, \\ -\dfrac{u_1(t)\, u_2(\tau)}{u_2(a+)\, \sigma(p_2)(\tau)} & \text{при } a<t<\tau<b, \end{cases} \tag{1.14}$$

где u_1 и u_2 — решения начальных задач (1.4), (1.7) и (1.4), (1.13_i) соответственно.

Доказательство. Как мы убедились выше, в условиях леммы решения u_1 и u_2 начальных задач (1.4), (1.7) и (1.4), (1.13_i) существуют. Поскольку краевая задача (1.4), (1.5_i) не имеет нетривиальных решений, $u_2(a+)\neq 0$.

Ясно, что функция $\mathcal{G}$, заданная равенством (1.14), удовлетворяет условиям 1 и 2 определения функции Грина. Покажем, что она удовлетворяет и условию 3 этого определения, т. е. что $w(t)\equiv u_2(a+)$, где

$$w(t)=\frac{u_1'(t)\, u_2(t)-u_2'(t)\, u_1(t)}{\sigma(p_2)(t)} \quad \text{при } a<t<b.$$

Действительно, по лемме 1.1, $w(a+)=u_2(a+)$, а по формуле Лиувилля, $w(t)=\mathrm{const}$. Таким образом, $\mathcal{G}$ — функция Грина задачи (1.4), (1.5_i). Единственность вытекает из однозначной разрешимости этой задачи. Лемма доказана.

Основное утверждение, относящееся к задачам (1.1), (1.2_1) и (1.1), (1.2_2), которое мы докажем, заключается в следующем.

Теорема 1.1. Если $i \in \{1,2\}$ и выполнены условия (1.3_i), то задача (1.1), (1.2_i) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда однородная задача (1.4), (1.5_i) не имеет нетривиальных решений. Если последнее выполнено, то решение u задачи (1.1), (1.2_i) может быть представлено формулой Грина

$$u(t)=u_0(t)+\int_a^b \mathcal{G}(t, \tau)\, p_0(\tau)\, d\tau \quad \text{при } a<t<b, \tag{1.15}$$

где u_0 — решение задачи (1.4), (1.2_i), а $\mathcal{G}$ — функция Грина задачи (1.4), (1.5_i).

Доказательство. Если задача (1.4), (1.5_i) имеет нетривиальное решение, то задача (1.1), (1.2_i) либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.

Предположим, что (1.4), (1.5_i) имеет только тривиальное решение. Тогда, очевидно, (1.1), (1.2_i) имеет не более одного решения. Кроме того, в силу леммы 1.2, существует функция Грина $\mathcal{G}$ задачи (1.4), (1.5_i), а поскольку решения u_1 и u_2

начальных задач (1.4), (1.7) и (1.4), (1.13_i) линейно независимы, то и решение u_0 краевой задачи (1.4), (1.2_i).

В силу лемм 1.1 и 1.1′, можно указать такую положительную постоянную A, что

$$|u_1(t)|\leqslant A\int_a^t \sigma(p_2)(\tau)\,d\tau,\quad |u_2(t)|\leqslant A\left[\int_t^b \sigma(p_2)(\tau)\,d\tau\right]^{2-i}$$

$$\text{при } a<t<b.$$

Поэтому, согласно (1.3_i) и (1.14), интеграл, стоящий в правой части (1.15), существует. Непосредственная подстановка подтверждает, что функция u, определенная равенством (1.15), является решением задачи (1.1), (1.2_i). Теорема доказана.

1.3. Леммы сравнения. Наряду с (1.4), рассмотрим уравнение

$$v''=q_1(t)v+q_2(t)v', \tag{1.16}$$

где либо

$$q_1,\ q_2\in L_{\mathrm{loc}}(]a,b[),\quad \sigma(q_2)\in L([a,b]),\quad q_1\sigma_1(q_2)\in L([a,b]), \tag{1.17_1}$$

либо

$$q_1, q_2\in L_{\mathrm{loc}}(]a,b]),\quad \sigma(q_2)\in L([a,b]),\quad q_1\sigma_2(q_2)\in L([a,b]). \tag{1.17_2}$$

В этом пункте мы приведем две леммы сравнения, т. е. утверждения, позволяющие сделать некоторые заключения относительно свойств уравнения (1.16) на основании свойств уравнения (1.4).

Лемма 1.3. Пусть $i\in\{1,2\}$, выполняются условия (1.6_i), (1.17_j), а u — решение уравнения (1.4), причем

$$u(t)>0 \text{ при } a<t<b;\quad u^{(i-1)}(b-)>0, \tag{1.18}$$

$$q_1(t)\geqslant p_1(t),\ [q_2(t)-p_2(t)]u'(t)\geqslant 0 \text{ при } a<t<b. \tag{1.19}$$

Тогда решение v уравнения (1.16) при начальных условиях

$$v(a+)=0,\quad \lim_{t\to a}\frac{v'(t)}{\sigma(q_2)(t)}=1 \tag{1.20}$$

удовлетворяет неравенствам

$$v(t)>0 \text{ при } a<t<b,\quad v^{(i-1)}(b-)>0. \tag{1.21}$$

Если же, кроме того,

$$u'(t)>0 \text{ при } a<t<b, \tag{1.22}$$

то и

$$v'(t)>0 \text{ при } a<t<b. \tag{1.23}$$

Доказательство. По лемме 1.1, решение v задачи (1.16), (1.20) существует.

Положим

$$w(t)=\frac{1}{\sigma(q_2)(t)}[u(t)v'(t)-v(t)u'(t)] \text{ при } a<t<b.$$

Тогда

$$w'(t)=\frac{1}{\sigma(q_2)(t)}\{[q_1(t)-p_1(t)]u(t)v(t)+[q_2(t)-p_2(t)]u'(t)v(t)\}$$

и, в силу (1.18) и (1.19), функция w не убывает в правой окрестности точки a. Значит, существует конечный или бесконечный предел $w(a+)$. С другой стороны, согласно лемме 1.1,

$$\liminf_{t\to a}\frac{v(t)\,|u'(t)|}{\sigma(q_2)(t)}=0.$$

Отсюда

$$w(a+)=u(a+)\geqslant 0. \qquad (1.24)$$

Допустим, что $t^*\in]a,b[$ и $v(t^*)=0$. Тогда, не нарушая общности, можно считать, что

$$v(t)>0 \text{ при } a<t<t^*.$$

В таком случае $w'(t)\geqslant 0$ при $a<t<t^*$ и $w(t^*)<0$, а это противоречит (1.24).

Итак,

$$v(t)>0 \text{ при } a<t<b. \qquad (1.25)$$

Следовательно,

$$w'(t)\geqslant 0 \text{ при } a<t<b \qquad (1.26)$$

и существует, быть может бесконечный, предел $w(b-)$.

Если $v(b-)=0$, то, согласно (1.25) и лемме 1.1′,

$$\lim_{t\to b}\frac{v'(t)}{\sigma(q_2)(t)}<0,\quad \liminf_{t\to b}\frac{v(t)\,|u'(t)|}{\sigma(q_2)(t)}=0.$$

Но так как, в силу (1.18), $u(b-)>0$, из этих соотношений находим $w(b-)<0$, что ввиду (1.26) противоречит (1.24). Значит, $v(b-)>0$. Используя это неравенство, в случае, когда $i=2$, легко получаем $v'(b-)>0$.

Наконец, если выполнено (1.22), то, поскольку $w(t)\geqslant 0$ при $a<t<b$, из (1.18) и (1.25) имеем (1.23). Лемма доказана.

Заметим, что когда коэффициенты уравнений (1.4) и (1.16) непрерывны на сегменте $[a,b]$, $p_2(t)\equiv q_2(t)$ и $i=1$, лемма 1.3 есть по сути не что иное как известная теорема сравнения Штурма ([56], стр. 394).

Лемма 1.3′. Пусть $i\in\{1,2\}$ и выполняются соотношения (1.6$_i$), (1.17$_i$) и (1.18), где u — решение уравнения (1.4). Пусть, далее, v — решение задачи (1.16), (1.20) и

$$q_1(t)\geqslant p_1(t),\ [q_2(t)-p_2(t)]v'(t)\geqslant 0 \text{ при } a<t<b.$$

Тогда имеют место неравенства (1.21). При этом, если нарушается условие (1.23), то не может соблюдаться и условие (1.22).

Для того чтобы убедиться в справедливости сформулированного утверждения, достаточно повторить доказательство леммы

1.3, заменив лишь в равенстве, определяющем функцию w, множитель $1/\sigma(q_2)(t)$ множителем $1/\sigma(p_2)(t)$.

1.4. Множества $V_1(]a,b[)$ и $V_2(]a,b[)$ и их структура. Мы будем рассматривать классы уравнений (1.4), коэффициенты p_1 и p_2 которых удовлетворяют неравенствам

$$p_{j1}(t) \leqslant p_j(t) \leqslant p_{j2}(t) \text{ при } a<t<b \quad (j=1,2), \tag{1.27}$$

налагая на вектор-функцию $(p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22})$ некоторые ограничения, гарантирующие отсутствие нетривиального решения задачи (1.4), (1.5_1) или (1.4), (1.5_2). Такой подход восходит к работе Валле Пуссена [103]. В ней установлены необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять неотрицательные постоянные l_1 и l_2, чтобы задача (1.4), (1.5_1) была однозначно разрешима, если только функции p_1 и p_2 непрерывны на сегменте $[a, b]$ и

$$|p_j(t)| \leqslant l_j \text{ при } a<t<b \quad (j=1,2).$$

В следующем пункте мы получим результат Валле Пуссена как следствие более общего утверждения.

Ниже под $\sigma^*(p_{21}, p_{22})$ и $\sigma_1{}^*(p_{21}, p_{22})$ соответственно подразумеваются $\sigma(p)$ и $\sigma_1(p)$, где функция p определена равенством

$$p(t)=\begin{cases} p_{21}(t) \text{ при } a<t\leqslant \frac{a+b}{2}, \\ p_{22}(t) \text{ при } \frac{a+b}{2}<t<b. \end{cases}$$

Кроме того, нам удобно положить $\sigma_2^*(p_{21}, p_{22})(t)=\sigma_2(p_{21})(t)$. Отметим, что если

$$\begin{gathered} p_{jm} \in L_{\mathrm{loc}}(]a, b[), \quad \sigma^*(p_{21}, p_{22}) \in L([a, b]), \\ p_{1m}\sigma_1^*(p_{21}, p_{22}) \in L([a, b]) \quad (j, m=1, 2) \end{gathered} \tag{1.28_1}$$

и

$$p_{j1}(t) \leqslant p_{j2}(t) \text{ при } a<t<b \quad (j=1,2), \tag{1.29}$$

то для любых измеримых функций $p_1, p_2:]a, b[\to \mathbf{R}$, удовлетворяющих неравенствам (1.27), справедливы соотношения (1.6_1), а если вместо (1.28_1) имеем

$$\begin{gathered} p_{jm} \in L_{\mathrm{loc}}(]a, b]), \sigma(p_{21}) \in L([a, b]), \\ p_{1m}\sigma_2(p_{21}) \in L([a, b]) \quad (j, m=1, 2), \end{gathered} \tag{1.28_2}$$

— то соотношения (1.6_2)

Определение 1.2. Пусть $i \in \{1, 2\}$. Скажем, что вектор-функция $(p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}):]a, b[\to \mathbf{R}^4$ принадлежит множеству $V_i(]a, b[)$, если выполнены условия (1.28_i), (1.29) и, кроме того, каковы бы ни были измеримые функции $p_1, p_2:]a, b[\to \mathbf{R}$, удовлетворяющие неравенствам (1.27), задача (1.4), (1.5_i) имеет только тривиальное решение.

Оказывается, что множества $V_1(]a,b[)$ и $V_2(]a,b[)$ распадаются на некоторые подмножества, которые, в свою очередь, определяют классы уравнений (1.4) с определенными осцилляционными свойствами.

Определение 1.3. Пусть $i\in\{1,2\}$. Скажем, что вектор-функция $(p_1, p_{21}, p_{22}):]a,b[\to\mathbf{R}^3$ принадлежит множеству $V_{i0}(]a\ b[)$, если

$$p_1, p_{21}, p_{22}\in L_{loc}(]a, b[),\ \sigma^*(p_{21}, p_{22})\in L([a, b]),$$
$$p_1\sigma_1^*(p_{21}, p_{22})\in L([a, b]) \tag{1.30$_1$}$$

при $i=1$,

$$p_1,\ p_{21},\ p_{22}\in L_{loc}(]a, b]),\ \sigma(p_{21})\in L([a, b]),$$
$$p_1\sigma_2(p_{21})\in L([a, b]) \tag{1.30$_2$}$$

при $i=2$, соблюдается неравенство

$$p_{21}(t)\leqslant p_{22}(t) \text{ при } a<t<b \tag{1.31}$$

и, какова бы ни была измеримая функция $p_2:]a,b[\to\mathbf{R}$, удовлетворяющая неравенству

$$p_{21}(t)\leqslant p_2(t)\leqslant p_{22}(t) \text{ при } a<t<b, \tag{1.32}$$

решение u начальной задачи (1.4), (1.7) не обращается в нуль в интервале $]a,b[$, причем $u^{(i-1)}(b-)>0$.

Очевидно,

$$V_{20}(]a, b[)\subset V_{10}(]a, b[).$$

Определение 1.4. Пусть $i\in\{1,2\}$, а k — натуральное число. Скажем, что вектор-функция $(p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}):]a,b[\to\mathbf{R}^4$ принадлежит множеству $V_{ik}(]a,b[)$, если выполнены условия (1.28_i) и (1.29) и, кроме того, каковы бы ни были измеримые функции $p_1, p_2:]a,b[\to\mathbf{R}$, удовлетворяющие неравенствам (1.27), решение u начальной задачи (1.4), (1.7) имеет в интервале $]a,b[$ ровно k нулей при $i=1$ и ровно $k-1$ или k нулей при $i=2$, причем $(-1)^k u^{(i-1)}(b-)>0$.

Ясно, что

$$V_{ik}(]a, b[)\subset V_i(]a, b[)\quad (i=1,2;\ k=1,2,\dots).$$

Более того, если $i\in\{1,2\}$ и

$$(p_1,\ p_{21},\ p_{22})\in V_{i0}(]a, b[),$$

то, в силу леммы 1.3,

$$(p_1,\ p,\ p_{21},\ p_{22})\in V_i(]a, b[)$$

для любой измеримой функции $p:]a,b[\to\mathbf{R}$ такой, что $p\sigma_i^*(p_{21}, p_{22})\in L([a,b])$ и $p(t)\geqslant p_1(t)$ при $a<t<b$. (Кстати, именно этим и объясняется то обстоятельство, что $V_{i0}(]a,b[)$, в отличие от $V_{ik}(]a,b[)$ $(k=1,2,\dots)$, определено нами как множество трехмерных, а не четырехмерных вектор-функций.)

Следующее утверждение показывает, что каждое множество $V_i(]a,b[)$ $(i=1,2)$ полностью состоит из вектор-функций, которые либо могут быть получены из элементов $V_{i0}(]a,b[)$ добавлением компоненты, удовлетворяющей указанным выше условиям, либо принадлежат некоторому множеству $V_{ik}(]a, b])$, $k\in\{1, 2, \ldots\}$.

Теорема 1.2. Пусть $i\in\{1, 2\}$ и

$$(p_{11},\ p_{12},\ p_{21},\ p_{22})\in V_i(]a, b[). \tag{1.33}$$

Тогда либо

$$(p_{11},\ p_{21},\ p_{22})\in V_{i0}(]a, b[),$$

либо найдется такое натуральное число k, что

$$(p_{11},\ p_{12},\ p_{21},\ p_{22})\in V_{ik}(]a, b[).$$

Для доказательства этой теоремы, а также для нужд дальнейшего изложения нам понадобятся леммы об априорных оценках.

Лемма 1.4. Пусть $i\in\{1, 2\}$ и

$$(p_{11},\ p_{12},\ p_{21},\ p_{22})\in V_i(]a, b[). \tag{1.34}$$

Тогда найдутся такие положительные постоянные c и δ, что каковы бы ни были измеримые функции p_1, $p_2:]a, b[\to\mathbf{R}$, удовлетворяющие неравенствам (1.27), имеют место оценки

$$|u(t)|\leqslant c\int_a^t \sigma(p_2)(\tau)\,d\tau, \tag{1.35}$$

$$\frac{|u'(t)|}{\sigma(p_2)(t)}\leqslant 1+c\int_a^t |p_1(\tau)|\,\sigma_2(p_2)(\tau)\,d\tau \text{ при } a<t<b$$

и, кроме того,

$$|u^{(i-1)}(b-)|\geqslant\delta,$$

где u — решение задачи (1.4), (1.7).

Доказательство. Если функции p_1 и p_2 удовлетворяют условиям леммы, а u — решение задачи (1.4), (1.7), то, как нетрудно проверить с учетом леммы 1.1, справедливо представление

$$u'(t)=\sigma(p_2)(t)\left[1+\int_a^t p_1(\tau)\frac{u(\tau)}{\sigma(p_2)(\tau)}\,d\tau\right] \text{ при } a<t<b, \tag{1.36}$$

откуда следует, что

$$w(t)\leqslant 1+c^*\int_a^t |p_1(\tau)|\,w(\tau)\,\sigma_1(p_2)(\tau)\,d\tau \text{ при } a<t<b,$$

где

$$w(t)=|u(t)|\left[\int_a^t \sigma(p_2)(\tau)\,d\tau\right]^{-1},$$

а

$$c^*=\left[\int\limits_a^{\frac{a+b}{2}}\sigma(p_{22})(\tau)\,d\tau\right]^{-1}+\left[\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b}\sigma(p_{21})(\tau)\,d\tau\right]^{-1}.$$

Полагая

$$c=\exp\left[c^*\int\limits_a^b(|p_{11}(\tau)|+|p_{12}(\tau)|)\,\sigma_1^*(p_{21},p_{22})(\tau)\,d\tau\right]$$

и применяя к последнему неравенству лемму Гронуолла—Беллмана, получаем первую, а затем с помощью (1.36) и вторую из оценок (1.35).

Теперь допустим, что постоянную δ, удовлетворяющую условиям леммы, указать нельзя. Тогда для любого натурального n существуют такие измеримые функции $q_j(\cdot;n):]a,b[\to\mathbf{R}$ $(j=1,2)$, что

$$p_{j1}(t)\leqslant q_j(t;n)\leqslant p_{j2}(t) \text{ при } a<t<b \quad (j=1,2) \tag{1.37}$$

и

$$|u^{(i-1)}(b-;n)|\leqslant\frac{1}{n}, \tag{1.38}$$

где $u(\cdot;n)$ — решение начальной задачи

$$u''=q_1(t;n)\,u+q_2(t;n)\,u',\quad u(a+)=0,\quad \lim_{t\to a}\frac{u'(t)}{\sigma(q_2(\cdot;n))(t)}=1.$$

Если

$$\tilde q_j(t;n)=\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{t}q_j(\tau;n)\,d\tau \text{ при } a<t<b \quad (j=1,2),$$

то, согласно (1.37), последовательности $(\tilde q_j(\cdot;n))_{n=1}^{+\infty}$ $(j=1,2)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на каждом сегменте из интервала $]a,b[$. Следовательно, в силу леммы Арцела—Асколи, их, не нарушая общности, можно считать равномерно сходящимися на любом таком сегменте.

Пусть

$$\tilde p_j(t)=\lim_{n\to+\infty}\tilde q_j(t;n) \text{ при } a<t<b \quad (j=1,2).$$

Тогда, ввиду (1.37),

$$\int\limits_s^t p_{j1}(\tau)\,d\tau\leqslant\tilde p_j(t)-\tilde p_j(s)\leqslant\int\limits_s^t p_{j2}(\tau)\,d\tau \text{ при } a<s<t<b \quad (j=1,2),$$

т. е. функции $\tilde p_1$ и $\tilde p_2$ абсолютно непрерывны на каждом сегменте из $]a,b[$, а функции $p_j:]a,b[\to\mathbf{R}$ $(j=1,2)$, определенные равенствами

$$p_j(t)=\widetilde{p}_j'(t) \text{ при } a<t<b$$

удовлетворяют (1.27).

Положим

$$v(t;\,n)=\frac{u'(t;\,n)}{\sigma(q_2(\cdot;\,n))(t)} \text{ при } a<t<b \quad (n=1,\,2,\,\ldots).$$

Как следует из доказанного выше,

$$|u(t;\,n)|\leqslant c\int\limits_a^t \sigma^*(p_{21},\,p_{22})(\tau)\,d\tau,$$

$$v(t;\,n)|\leqslant 1+c\int\limits_a^t(|p_{11}(\tau)|+|p_{12}(\tau)|)\,\sigma_2(p_{21})(\tau)\,d\tau \quad \text{при} \quad a<t<b$$

$$(n=1,\,2,\,\ldots).$$

Поэтому, воспользовавшись аналогом равенства (1.36), нетрудно убедиться, что последовательность $(u(\cdot;\,n))_{n=1}^{+\infty}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна в интервале $]a,\,b[$, а последовательность $(v(\cdot;\,n))_{n=1}^{+\infty}$ — в интервале $]a,\,b-\varepsilon[$, где ε — произвольное число из $]0,\,b-a[$, если $i=1$, и $\varepsilon=0$, если $i=2$. Таким образом, не нарушая общности, их можно считать равномерно сходящимися на этих множествах.

По теореме Красносельского—Крейна [27] (см. также лемму 2.3 из [18]), функция $u_0:\,]a,\,b[\to\mathbf{R}$, где

$$u_0(t)=\lim_{n\to+\infty}u(t;\,n) \text{ при } a<t<b,$$

является решением задачи (1.4), (1.7). С другой стороны, согласно (1.38)

$$u_0^{(i-1)}(b-)=0,$$

что противоречит (1.27) и (1.34). Лемма доказана.

Лемма 1.4′. *Пусть $i\in\{1,2\}$ и выполнено (1.33). Тогда найдутся такие положительные постоянные c и δ, что, каковы бы ни были измеримые функции $p_1,\,p_2:\,]a,\,b[\to\mathbf{R}$, удовлетворяющие неравенствам (1.27), имеют место оценки*

$$|u(t)|\leqslant c\left[\int\limits_t^b\sigma(p_2)(\tau)\,d\tau\right]^{2-i},$$

$$\frac{|u'(t)|}{\sigma(p_2)(t)}\leqslant 2-i+c\int\limits_t^b\frac{|p_1(\tau)|}{\sigma(p_2)(\tau)}\left[\int\limits_\tau^b\sigma(p_2)(s)\,ds\right]^{2-i}d\tau \text{ при } a<t<b$$

и, кроме того,

$$|u(a+)|\geqslant\delta,$$

где u — решение задачи (1.4), (1.13$_i$).

Это утверждение доказывается точно так же как предыдущее.

Доказательство теоремы 1.2. Мы проведем рассуждение для случая $i=1$. Случай $i=2$ рассматривается совершенно аналогично.

Пусть для $i=1$ теорема неверна. Тогда найдутся такие измеримые функции $p_j(\cdot;\lambda):]a,b[\to\mathbf{R}\,(j=1,2;\lambda=0,1)$, что

$$p_{j1}(t)\leqslant p_j(t;\lambda)\leqslant p_{j2}(t) \text{ при } a<t<b,$$

решение $u(\cdot;\lambda)$ начальной задачи

$$u''=p_1(t;\lambda)u+p_2(t;\lambda)u',\quad u(a+)=0, \tag{1.39}$$

$$\lim_{t\to a}\frac{u'(t)}{\sigma(p_2(\cdot;\lambda))(t)}=1,$$

имеет ровно k_λ нулей в интервале $]a,b[$ и $k_0\neq k_1$.

Для любого $\lambda\in]0,1[$ определим функцию $u(\cdot;\lambda)$ как решение задачи (1.39), где

$$p_j(t;\lambda)=\lambda p_j(t;1)+(1-\lambda)p_j(t;0) \text{ при } a<t<b\,(j=1,2).$$

Применив лемму 1.4, нетрудно показать, что

$$u(t;\lambda)\to u(t;\lambda_0),\quad \frac{u'(t;\lambda)}{\sigma(p_2(\cdot;\lambda))(t)}\to\frac{u'(t;\lambda_0)}{\sigma(p_2(\cdot;\lambda_0))(t)} \text{ при } \lambda\to\lambda_0,$$

причем первое соотношение выполняется равномерно по $t\in]a,b[$, а второе — по $t\in]a,b-\varepsilon]$, где $\varepsilon\in]0,b-a[$ произвольно. Поскольку, согласно (1.33), $u(b-;\lambda)\neq 0$ при $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, отсюда вытекает, что если $\lambda,\lambda_0\in[0,1]$ и λ достаточно близко к λ_0, то функции $u(\cdot;\lambda)$ и $u(\cdot;\lambda_0)$ имеют равное число нулей в интервале $]a,b[$.

Пусть λ^* — верхняя грань множества тех $\lambda\in[0,1]$, для которых $u(\cdot;\lambda)$ имеет ровно k_0 нулей в $]a,b[$. Тогда в силу сделанного допущения $\lambda^*<1$, а значит, при всех $\lambda^*<\lambda<1$ число нулей $u(\cdot;\lambda)$ в $]a,b[$ должно отличаться от k_0. Это, как мы показали выше, невозможно. Теорема доказана.

Теперь несколько подробнее рассмотрим множества $V_{10}(]a,b[)$ и $V_{20}(]a,b[)$.

Теорема 1.3. Пусть $i\in\{1,2\}$. Если

$$(p_1,\ p_{21},\ p_{22})\in V_{i0}(]a,b[), \tag{1.40}$$

то для любых измеримых функций $q_1,\ q_2:]a,b[\to\mathbf{R}$ таких, что

$$q_1\sigma_i(q_2)\in L([a,b]),\ q_1(t)\geqslant p_1(t),\ p_{21}(t)\leqslant q_2(t)\leqslant p_{22}(t)$$
$$\text{при } a<t<b, \tag{1.41}$$

решение u начальной задачи

$$u''=q_1(t)u+q_2(t)u', \tag{1.42}$$

$$u(a+)=0,\quad \lim_{t\to a}\frac{u'(t)}{\sigma(q_2)(t)}=1$$

не имеет нулей в интервале $]a,b[$, причем $u^{(i-1)}(b-)>0$. Более того, если выполнены соотношения (1.30_i) и (1.31) и для любых измеримых q, $q_2 :]a, b[\to \mathbf{R}$, удовлетворяющих (1.41), задача (1.42), (1.5_i) не имеет нетривиального решения, то справедливо (1.40).

Доказательство. Первая часть теоремы прямо следует из леммы 1.3, что впрочем мы уже отмечали выше. Докажем вторую часть.

Допустим, что выполнены (1.30_i) и (1.31) и задача (1.42), (1.5_i) не имеет нетривиального решения, если только коэффициенты уравнения (1.42) измеримы и удовлетворяют (1.41). Тогда, в частности,

$$(p_1,\ p_1+|p_1|,\ p_{21},\ p_{22}) \in V_i(]a, b[).$$

Но поскольку решение задачи

$$u''=[p_1(t)+|p_1(t)|]u+p_{21}(t)u',\ u(a+)=0,\ \lim_{t\to a}\frac{u'(t)}{\sigma(p_{21})(t)}=1$$

не имеет нулей в интервале $]a, b[$, отсюда, согласно теореме 1.2, получаем (1.40). Теорема доказана.

Чтобы выявить некоторые другие свойства множеств $V_{10}(]a, b[)$ и $V_{20}(]a, b[)$, введем следующие определения.

Определение 1.5. Пусть $c\in]a, b]$. Скажем, что вектор-функция $(p_1,\ p_2) :]a, b[\to \mathbf{R}^2$ принадлежит множеству $V_{10}'(]a, b[, c)$, если выполняются условия (1.6_1) и решение u задачи (1.4), (1.7) удовлетворяет неравенствам

$$u'(t)(c-t)\geqslant 0 \text{ при } a<t<b,\ u(b-)>0. \tag{1.43}$$

Определение 1.6. Скажем, что вектор-функция $(p_1,\ p_2) :]a, b[\to \mathbf{R}^2$ принадлежит множеству $V_{20}'(]a, b[)$, если выполняются условия (1.6_2) и решение u задачи (1.4), (1.7) удовлетворяет неравенствам

$$u'(t)>0 \text{ при } a<t<b,\ u'(b-)>0.$$

Ясно, что

$$V_{20}'(]a, b[)\subset V_{10}'(]a, b[, b).$$

Теорема 1.4_1. Если $c\in]a, b]$,

$$(p_1,\ p_2)\in V_{10}'(]a, b[, c), \tag{1.44}$$

а функции p_{21}, $p_{22}\in L_{loc}(]a, b[)$ таковы, что

$$\begin{gathered} p_{21}(t)=p_2(t),\ p_{22}(t)\geqslant p_2(t) \text{ при } a<t<c, \\ p_{21}(t)\leqslant p_2(t),\ p_{22}(t)=p_2(t) \text{ при } c\leqslant t<b \text{ (если } c<b) \end{gathered} \tag{1.45}$$

и

$$\sigma(p_{22})\in L([a, b]),\ p_1\sigma_1(p_{22})\in L([a, b]), \tag{1.46}$$

то

$$(p_1,\ p_{21},\ p_{22})\in V_{10}(]a, b[). \tag{1.47}$$

Более того, если выполнено (1.47), причем

$$p_1(t)\leqslant 0 \text{ при } a<t<b, \tag{1.48}$$

то найдется $c \in]a, b]$ такое, что имеет место (1.44), где

$$p_2(t) = \begin{cases} p_{21}(t) & \text{при } a < t < c, \\ p_{22}(t) & \text{при } c \leqslant t < b \text{ (если } c < b). \end{cases} \tag{1.49}$$

Заметим, что если $c < b$, то (1.46) вытекает из (1.44) и (1.45).

Доказательство теоремы 1.4$_1$. Первая часть теоремы прямо следует из леммы 1.3.

Допустим, что выполняются (1.47) и (1.48). Если производная решения u_0 начальной задачи

$$u'' = p_1(t)u + p_{21}(t)u', \; u(a+) = 0, \; \lim_{t \to a} \frac{u'(t)}{\sigma(p_{21})(t)} = 1$$

положительна в интервале $]a, b[$, то $(p_1, p_2) \in V_{10}'(]a, b[, b)$. Если же она имеет хотя бы один нуль в этом интервале, то найдется точка $c \in]a, b[$ такая, что

$$u_0'(t) > 0 \text{ при } a < t < c \text{ и } u_0'(c) = 0.$$

Положим (1.49) и обозначим через u решение задачи (1.4), (1.7). Тогда в силу (1.47)

$$u(t) > 0 \text{ при } a < t < b, \; u(b-) > 0.$$

С другой стороны, $u(t) = u_0(t)$ при $a < t < c$, а значит, $u'(c) = 0$. Поэтому из (1.36) и (1.48) получаем (1.43). Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 1.4$_2$. Если

$$(p_1, p_2) \in V_{20}'(]a, b[), \tag{1.50}$$

а функция $p \in L_{loc}(]a, b[)$ такова, что

$$p(t) \geqslant p_2(t) \text{ при } a < t < b,$$

то

$$(p_1, p_2, p) \in V_{20}(]a, b[). \tag{1.51}$$

Более того, если соблюдаются (1.48) и (1.51), то имеет место и (1.50).

В заключение этого пункта отметим, что при выполнении (1.47) уравнения (1.42), коэффициенты которых удовлетворяют (1.41), являются неосцилляционными на сегменте $[a, b]$, т. е. не имеют нетривиальных решений при краевых условиях

$$u(t_1+) = 0, \; u(t_2-) = 0,$$

каковы бы ни были $t_1, t_2 \in [a, b]$, $t_1 < t_2$. О регулярных неосцилляционных уравнениях существует обширная литература (см., например, [73, 94]).

Если же выполнено (1.50), то уравнения (1.42) такие, что

$$q_j \in L_{loc}(]a, b]), \; q_j(t) \geqslant p_j(t) \text{ при } a < t < b \; (j = 1,2),$$

ни при каких $t_1, t_2 \in [a, b[$, $t_1 < t_2$, не имеют нетривиальных решений, удовлетворяющих краевым условиям

$$u(t_1+)=0, \quad u'(t_2-)=0.$$

Эти факты следуют из леммы 1.3.

1.5. Некоторые вектор-функции, принадлежащие множествам $V_j(]a,b[)$. В этом пункте мы приведем ряд эффективных признаков, гарантирующих выполнение включения (1.33).

Лемма 1.5_1. Пусть выполнены соотношения (1.30_1) и (1.31) и пусть существует точка $d\in]a,b[$ такая, что

$$\begin{gathered}\int_a^d p_1^-(t)\int_a^t \exp\left[\int_t^\tau p_{21}(s)\,ds\right]d\tau dt\leqslant 1,\\ \int_d^b p_1^-(t)\int_t^b \exp\left[\int_t^\tau p_{22}(s)\,ds\right]d\tau dt\leqslant 1,\end{gathered}\tag{1.52}$$

где p_1^- — отрицательная часть функции p_1 (т. е.

$$p_1^-(t)\equiv\frac{|p_1(t)|-p_1(t)}{2}\Bigg).$$

Тогда справедливо включение (1.47).

Доказательство. Допустим противное, а именно, что существуют $b_0\in]a,b]$, измеримая функция $p_2:]a,b[\to\mathbf{R}$, удовлетворяющая неравенству (1.32), и решение u уравнения (1.4) такое, что

$$u(a+)=0,\ u(b_0-)=0,\ u(t)>0 \text{ при } a<t<b_0.$$

Тогда

$$u'(t)>0 \text{ при } a<t<t_0,\ u'(t_0)=0,$$

где t_0 — некоторая точка интервала $]a,b_0[$.

Предположим, что $t_0\in]a,d]$. В силу леммы 1.1,

$$\mu=\sup\left\{u'(t)\exp\left[\int_t^{t_0}p_2(\tau)\,d\tau\right]: a<t\leqslant t_0\right\}<+\infty.$$

Очевидно,

$$u(t)=\int_a^t u'(\tau)\,d\tau\leqslant\mu\int_a^t\exp\left[\int_{t_0}^\tau p_2(s)\,ds\right]d\tau \text{ при } a<t\leqslant t_0,$$

причем на множестве положительной меры выполняется строгое неравенство. Таким образом, согласно (1.32), равенству

$$u'(t)\exp\left[\int_t^{t_0}p_2(\tau)\,d\tau\right]=\int_{t_0}^t p_1(\tau)u(\tau)\exp\left[\int_\tau^{t_0}p_2(s)\,ds\right]d\tau$$

$$\text{при } a<t\leqslant t_0$$

и первому из неравенств (1.52), получаем

$$\mu<\mu\int_a^{t_1}p_1^-(t)\int_a^t\exp\left[\int_t^\tau p_{21}(s)\,ds\right]d\tau dt\leqslant\mu.$$

Следовательно, $t_0 \notin]a, d]$. Совершенно аналогично можно показать, что $t_0 \notin]d, b_0[$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Проведенное рассуждение свидетельствует о справедливости и следующего предложения.

Лемма 1.5$_2$. Пусть соблюдаются соотношения (1.6$_2$) и

$$\int_a^b p_1^-(t) \int_a^t \exp\left[\int_t^\tau p_2(s)\,ds\right] d\tau dt \leqslant 1,$$

где p_1^- — отрицательная часть функции p_1. Тогда справедливо включение (1.50).

Для любых l_1, $l_2 \in R$ положим

$$I(l_1, l_2) = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{l_1 + l_2 s + s^2}, \text{ если } l_1 + l_2 s + s^2 > 0 \text{ при всех } s \geqslant 0$$

и $I(l_1, l_2) = +\infty$ — в противном случае.

Лемма 1.6$_1$. Пусть l_1, $l_2 \in R$, а функция $g:]a, b[\to]0, +\infty[$ абсолютно непрерывна на каждом сегменте из интервала $]a, b[$ и суммируема на сегменте $[a, b]$. Тогда условие

$$I(l_1, l_2) \geqslant \int_a^b g(t)\,dt \tag{1.53}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы

$$\left(-l_1 g^2, \ -l_2 g + \frac{g'}{g}\right) \in V'_{10}(]a, b[, \ b). \tag{1.54}$$

Доказательство. Положим

$$p_1(t) = -l_1 g^2(t), \quad p_2(t) = -l_2 g(t) + \frac{g'(t)}{g(t)} \text{ при } a < t < b.$$

Тогда

$$\sigma(p_2)(t) = \frac{g(t)}{g\left(\frac{a+b}{2}\right)} \exp\left[-l_2 \int_{\frac{a+b}{2}}^t g(\tau)\,d\tau\right] \text{ при } a < t < b.$$

Отсюда следует условие (1.6$_1$).

Для любых постоянных l_1, $l_2 \in R$ равенство

$$\int_{z(t)}^{+\infty} \frac{ds}{l_1 + l_2 s + s^2} = \int_a^t g(\tau)\,d\tau$$

определяет непрерывную функцию $z:]a, b_0[\to R$, где

$$b_0 = \sup\left\{t \in]a, b[: \int_a^t g(\tau)\,d\tau < I(l_1, l_2) + I(l_1, -l_2)\right\}.$$

При этом

$$z'(t) = -g(t)[l_1 + l_2 z(t) + z^2(t)] \text{ при } a < t < b_0$$

и в достаточно малой правой окрестности точки a

$$z(t) > \left[2\int_a^t g(\tau)\,d\tau \right]^{-1}.$$

Поэтому функция $u:]a, b_0[\to \mathbf{R}$ такая, что

$$u(t) = \exp\left[\int_{\frac{a+b}{2}}^t g(\tau) z(\tau)\,d\tau \right],$$

является решением уравнения (1.4), причем $u(a+) = 0$.

Если соблюдается (1.53), то $b_0 = b$ и $z(t) > 0$ при $a < t < b$. Следовательно, $u'(t) > 0$ при $a < t < b$, т. е. справедливо (1.54).

Если же (1.53) нарушается, то найдется точка $c \in]a, b_0[$, для которой $z(t) < 0$ при $c < t < b_0$, а значит, $u'(t) < 0$ при $c < t < b$, так что (1.54) не может иметь места. Лемма доказана.

Точно так же доказывается

Лемма 1.6_2. Пусть $l_1, l_2 \in \mathbf{R}$, а функция $g:]a, b[\to]0, +\infty[$ абсолютно непрерывна на каждом сегменте из промежутка $]a, b]$ и суммируема на сегменте $[a, b]$. Тогда условие

$$I(l_1, l_2) > \int_a^b g(t)\,dt \tag{1.55}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы

$$\left(l_1 g^2, \quad -l_2 g + \frac{g'}{g} \right) \in V'_{20}(]a, b[).$$

Как показал Опяль [91], в случае неотрицательных l_1 и l_2 (1.55) следует из неравенства

$$l_1 h^2 + 2 l_2 h < \pi^2,$$

где

$$h = 2\int_a^b g(t)\,dt.$$

Полагая

$$g(t) = (t-a)^{-\lambda} \text{ при } a < t < b,$$

из лемм 1.6_1 и 1.6_2 получаем

Следствие. Пусть $\lambda \in [0, 1[$ и $l_1, l_2 \in \mathbf{R}$. Тогда условие

$$I(l_1, l_2) \geqslant \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda} \tag{1.56}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы вектор-функция $(p_1, p_2):]a, b[\to \mathbf{R}^2$, где

$$p_1(t)=-l_1(t-a)^{-2\lambda},\quad p_2(t)=-l_2(t-a)^{-\lambda}-\frac{\lambda}{t-a} \text{ при } a<t<b,$$

принадлежала множеству $V'_{10}(]a, b[, b)$, а если неравенство (1.56) — строгое, — то множеству $V'_{20}(]a, b[)$.

Лемма 1.7. Если $c\in]a, b[$, l_j, $m_j\in\mathbf{R}$ $(j=1, 2)$, а функция g — такая же, как в лемме 1.6_1, то включение

$$(p_1, p_2)\in V'_{10}(]a, b[, c), \tag{1.57}$$

где

$$p_1(t)=-l_1g^2(t),\quad p_2(t)=-l_2g(t)+\frac{g'(t)}{g(t)} \text{ при } a<t\leqslant c,$$

$$p_1(t)=-m_1g^2(t),\quad p_2(t)=m_2g(t)+\frac{g'(t)}{g(t)} \text{ при } c<t<b,$$

выполняется тогда и только тогда, когда $m_1\geqslant 0$,

$$I(l_1, l_2)=\int_a^c g(t)\,dt, \tag{1.58}$$

и

$$I(m_1, m_2)>\int_c^b g(t)\,dt. \tag{1.59}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть u — решение задачи (1.4), (1.7). Тогда, согласно (1.43), $(p_1, p_2)\in \in V'_{10}(]a, c[, c)\setminus V'_{20}(]a, c])$. Отсюда, учитывая леммы 1.6_1 и 1.6_2, получаем равенство (1.58). Кроме того, из (1.36) и (1.43) вытекает неотрицательность m_1.

Если (1.59) не имеет места, то, обозначив через b_0 точку промежутка $]c, b]$, для которой

$$I(m_1, m_2)=\int_c^{b_0} g(t)\,dt,$$

произведя в (1.4) замену переменной $t=b_0+c-t'$ и вновь применив леммы 1.6_1 и 1.6_2, убеждаемся, что $u(b_0-)=0$. Это, однако, противоречит (1.57). Следовательно, выполнено неравенство (1.59). Необходимость доказана.

Достаточность доказывается аналогичным путем.

Следствие. Если $c\in]a, b[$, $\lambda_j\in[0, 1[$, l_j, $m_j\in\mathbf{R}(j=1,2)$, то включение

$$(p_1, p_2)\in V'_{10}(]a, b[, c),$$

где

$$p_1(t)=-l_1(t-a)^{-2\lambda_1},\quad p_2(t)=-\frac{\lambda_1}{t-a}-l_2(t-a)^{-\lambda_1} \text{ при } a<t\leqslant c,$$

$$p_1(t)=-m_1(b-t)^{-2\lambda_2},\quad p_2(t)=\frac{\lambda_2}{b-t}+m_2(b-t)^{-\lambda_2} \text{ при } c<t<b,$$

выполняется тогда и только тогда, когда $m_1 \geqslant 0$,

$$I(l_1, l_2) = \frac{(c-a)^{1-\lambda_1}}{1-\lambda_1}, \quad I(m_1, m_2) > \frac{(b-c)^{1-\lambda_2}}{1-\lambda_2}.$$

Для доказательства достаточно положить

$$g(t) = \begin{cases} (b-c)^{-\lambda_2}(t-a)^{-\lambda_1} & \text{при } a < t \leqslant c, \\ (c-a)^{-\lambda_1}(b-t)^{-\lambda_2} & \text{при } c < t < b. \end{cases}$$

В сочетании с теоремами 1.4_1 и 1.4_2, леммы 1.6_1, 1.6_2 и 1.7 позволяют установить эффективные условия принадлежности вектор-функций множествам $V_{10}(]a, b[)$ и $V_{20}(]a, b[)$. Например, из теоремы 1.4_1 и лемм 1.6_1 и 1.7 вытекает следующее утверждение: если $l_1, l_2 \in \mathbf{R}$, $l_2 \geqslant 0$, а функция g — такая же, как в лемме 1.6_1, то включение

$$\left(-l_1 g^2, \ -l_2 g + \frac{g'}{g}, \ l_2 g + \frac{g'}{g}\right) \in V_{10}(]a, b[)$$

имеет место тогда и только тогда, если

$$2I(l_1, l_2) > b - a.$$

Заметим, что при $g(t) \equiv 1$ это утверждение представляет собой уже упоминавшуюся теорему Валле Пуссена [103].

Лемма 1.8. Пусть $i \in \{1,2\}$, k — натуральное число, функция g — такая же, как в лемме 1.6_i, а l_{11}, l_{12} и l_2 — постоянные, причем $l_{12} \leqslant l_{11}$ и $l_2 \geqslant 0$. Тогда условие

$$(2k+1-i)\, I(l_{12}, -l_2) < \int_a^b g(t)\, dt < (2k+3-i)\, I(l_{11}, l_2) \quad (1.60_i)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы

$$\left(-l_{11} g^2, -l_{12} g^2, -l_2 g + \frac{g'}{g}, \ l_2 g + \frac{g'}{g}\right) \in V_{ik}(]a, b[). \qquad (1.61_i)$$

Доказательство. Пусть $i = 1$. Для каждого $j \in \{1, 2\}$ подберем целое неотрицательное число n_j и точки t_{jn} $(n = 0, 1, \ldots, n_j + 1)$ так, чтобы выполнялись соотношения $a = t_{j0} < t_{j1} < \ldots < t_{jn_j+1} = b$,

$$\int_{t_{jn}}^{t_{jn+1}} g(t)\, dt = I(l_{1j}, (-1)^{j+1} l_2) \quad (n = 0, \ldots, n_j - 1) \text{ если } n_j \geqslant 1, \quad (1.62)$$

и

$$\int_{t_{jn_j}}^{b} g(t)\, dt \leqslant I(l_{1j}, (-1)^{j+1} l_2). \qquad (1.63)$$

Обозначим через $v_j :]a, b[\to \mathbf{R}$ $(j = 1, 2)$ решения начальных задач

$$v'' = q_{1j}(t)v + q_{2j}(t)v', \quad v(a+) = 0, \quad \lim_{t\to a} \frac{v'(t)}{\sigma(q_{2j})(t)} = 1,$$

где

$$q_{1j}(t) = -l_{1j}g^2(t) \text{ при } a < t < b,$$
$$q_{2j}(t) = (-1)^{j+n} l_2 g(t) + \frac{g'(t)}{g(t)} \text{ при } t_{jn} \leqslant t < t_{jn+1} \qquad (1.64)$$
$$(n = 0, 1, \ldots, n_j).$$

Тогда, воспользовавшись рассуждением, примененным при доказательстве леммы 1.7, нетрудно установить, что точки t_{jn} $(n=1, \ldots, n_j)$ с четным n и только они являются нулями функции v_j в интервале $]a, b[$, причем

$$(-1)^n v_j'(t) > 0 \text{ при } t_{jn} < t < t_{jn+1} \ (n=0, \ldots, n_j). \qquad (1.65)$$

Более того, $v_j(b-) = 0$ в том и только в том случае, когда n_j нечетно, а в (1.63) имеет место равенство.

Таким образом, если выполнено (1.61_1), то, согласно определению 1.3, для каждого $j \in \{1,2\}$ либо $n_j = 2k+1$ и левая часть (1.63) строго меньше правой, либо $n_j = 2k$. Отсюда вытекает (1.60_1).

Допустим теперь, что справедливо (1.60_1), а измеримые функции $p_1, p_2 :]a, b[\to \mathbf{R}$ удовлетворяют неравенствам

$$-l_{11}g^2(t) \leqslant p_1(t) \leqslant -l_{12}g^2(t), \left| p_2(t) - \frac{g'(t)}{g(t)} \right| \leqslant l_2 g(t) \text{ при } a < t < b.$$

Тогда из (1.64) и (1.65) следует, что

$$(-1)^j [q_{1j}(t) - p_1(t)] \geqslant 0, \ (-1)^j [q_{2j}(t) - p_2(t)] v_j'(t) \geqslant 0 \qquad (1.66)$$
$$\text{при } a < t < b \ (j = 1, 2).$$

В силу (1.62), (1.63) и первой части неравенства (1.60_1), $n_2 \geqslant 2k$. С другой стороны, согласно (1.66) и лемме 1.3′, решение u задачи (1.4), (1.7) имеет, по крайней мере, один нуль в каждом из промежутков $]t_{2n}, t_{2n+2}[$, где $n \in]0, n_2 - 2]$ — четное число. Значит, в интервале $]a, b[$ u обращается в нуль не менее k раз, и, вновь применив (1.66) и лемму 1.3′, получаем соотношение $n_1 \geqslant 2k$.

Таким образом, с учетом (1.62), (1.63) и второй части неравенства (1.60_1) убеждаемся, что либо $n_1 = 2k+1$ и

$$\int_{t_{1n_1}}^{b} g(t)\,dt < I(l_1, l_2),$$

либо $n_1 = 2k$. В обоих случаях, как мы показали выше, $v_1(b-) \neq 0$. Поэтому, в силу (1.66) и леммы 1.3, u имеет не более k нулей в интервале $]a, b[$ и $u(b-) \neq 0$.

Итак, выполняется (1.61_1), т. е. для $i=1$ лемма доказана. Аналогично рассуждая, можно рассмотреть и случай, когда $i=2$.

В лемме 1.8 допустимо, например, положить

$g(t)=(t-a)^{-\lambda_1}(b-t)^{-\lambda_2}$, если $i=1$, и $g(t)=(t-a)^{-\lambda}$, если $i=2$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda \in [0, 1[$.

В случае, когда $i=1$ и $g(t)\equiv 1$, лемма 1.8 установлена Е. Л. Тонковым [55].

1.6. Теоремы существования и единственности. Вопрос об однозначной разрешимости неоднородных задач (1.1), (1.2_1) и (1.1), (1.2_2) сводится теоремой 1.1 к вопросу об отсутствии нетривиальных решений у соответствующих однородных задач. Ниже для задач (1.1), (1.5_1) и (1.1), (1.5_2) мы переформулируем эту теорему в терминах множеств $V_1(]a, b[)$ и $V_2(]a, b[)$, а также установим априорные оценки решений, которые будут использованы в следующем параграфе.

Теорема 1.5_1. Пусть

$$(g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22}) \in V_1(]a, b[).$$

Тогда найдется такая постоянная c_0, что, каковы бы ни были измеримые функции $p_j :]a, b[\to \mathbf{R}$ $(j=0, 1, 2)$, удовлетворяющие неравенствам

$$g_{j1}(t) \leqslant p_j(t) \leqslant g_{j2}(t) \text{ при } a<t<b \quad (j=1,2) \tag{1.67}$$

и соотношению $p_0\sigma_1^*(g_{21}, g_{22}) \in L([a, b])$, задача (1.1), (1.5_1) имеет единственное решение u, причем

$$|u^{(j-1)}(t)| \leqslant \frac{c_0}{[\sigma_1^*(g_{21}, g_{22})(t)]^{j-1}} \int_a^b \mathcal{G}^*(t, \tau)\,|p_0(\tau)|\,d\tau$$

$$\text{при } a<t<b \quad (j=1, 2),$$

где

$$\mathcal{G}^*(t, \tau)=\begin{cases} \dfrac{1}{\mu(\tau)} \displaystyle\int_t^b \mu(s)\,ds \int_a^\tau \mu(r)\,dr & \text{при } a<\tau\leqslant t<b, \\ \dfrac{1}{\mu(\tau)} \displaystyle\int_a^t \mu(s)\,ds \int_\tau^b \mu(r)\,dr & \text{при } a<t<\tau<b \end{cases}$$

и $\mu(t)=\sigma^*(g_{21}, g_{22})(t)$.

Доказательство. По теореме 1.1, задача (1.1), (1.5_1) имеет единственное решение u и

$$u(t)=\int_a^b \mathcal{G}(t, \tau)\,p_0(\tau)\,d\tau \text{ при } a<t<b,$$

где $\mathcal{G}$ — функция Грина задачи (1.4), (1.5_1). Отсюда, в силу лемм 1.2, 1.4 и 1.4′, легко следует существование постоянной c_0, удовлетворяющей условиям теоремы.

Теорема 1.6_1. Пусть

$$(g_1, g_{21}, g_{22}) \in V_{10}(]a, b[).$$

Тогда найдется такая постоянная c_0, что, каковы бы ни были измеримые функции $p_j :]a, b[\to\mathbf{R}\,(j=0,1,2)$, удовлетворяющие соотношениям

$$p_1(t)\geqslant g_1(t),\ g_{21}(t)\leqslant p_2(t)\leqslant g_{22}(t) \text{ при } a<t<b \tag{1.68}$$

и

$$p_1\sigma_1(p_2)\in L([a, b]),\ p_0\sigma_1{}^*(g_{21}, g_{22})\in L([a, b]),$$

задача (1.1), (1.5_1) имеет единственное решение u, причем

$$|u^{(j-1)}(t)|\leqslant\frac{c_0}{[\sigma_1(g)(t)]^{j-1}}\int_a^b \mathcal{G}^*(t, \tau)\,p_0^*(\tau)\,d\tau$$

$$\text{при } a<t<b \ (j=1, 2),$$

где функция $\mathcal{G}^*$ — такая же, как в теореме 1.5_1,

$$p_0^*(t)=\frac{1}{2}\,[\,|p_0(t)|-p_0(t)\operatorname{sign}u(t)] \text{ при } a<t<b, \tag{1.69}$$

а

$$g(t)=\begin{cases} g_{22}(t) \text{ при } a<t\leqslant\dfrac{a+b}{2},\\ g_{21}(t) \text{ при } \dfrac{a+b}{2}<t<b.\end{cases} \tag{1.70}$$

Доказательство. Существование и единственность решения u задачи (1.1), (1.5_1) вытекает из теорем 1.1 и 1.3.

Пусть v — решение задачи

$$\begin{gathered} v''=g_1(t)\,v+p_2(t)\,v'-p_0{}^*(t),\\ v(a+)=0,\ v(b-)=0.\end{gathered} \tag{1.71}$$

Согласно лемме 1.2 и теореме 1.3, функция Грина $\mathcal{G}$ уравнения

$$v''=g_1(t)\,v+p_2(t)\,v' \tag{1.72}$$

при условиях (1.71) отрицательна в $]a, b[\times]a, b[$. Поэтому

$$v(t)=-\int_a^b \mathcal{G}(t, \tau)\,p_0^*(\tau)\,d\tau\geqslant 0 \text{ при } a<t<b. \tag{1.73}$$

Покажем, что

$$|u(t)|\leqslant v(t) \text{ при } a<t<b. \tag{1.74}$$

Действительно, в противном случае найдутся точки $t_1\in[a, b[$ и $t_2\in]t_1, b]$, для которых

$$|u(t)|>v(t) \text{ при } t_1<t<t_2,\quad |u(t_j)|=v(t_j)\ (j=1,2). \tag{1.75}$$

Определим функцию $z :]t_1, t_2[\to]0, +\infty[$ равенством

$$z(t)=|u(t)|-v(t).$$

Тогда z — решение уравнения

$$z''=g_1(t)\,z+p_2(t)\,z'+\tilde{p}(t),$$

где, в силу (1.68) и (1.69),

$$\tilde{p}(t) = [p_1(t) - g_1(t)]\,|u(t)| + p_0^*(t) + p_0(t)\,\mathrm{sign}\,u(t) \geqslant 0$$
$$\text{при } t_1 < t < t_2.$$

Если $\tilde{\mathcal{G}}$ — функция Грина уравнения (1.72) при краевых условиях $v(t_1^+) = v(t_2^-) = 0$, то

$$\tilde{\mathcal{G}}(t, \tau) < 0 \text{ при } t_1 < t,\ \tau < t_2,$$

а значит,

$$z(t) = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{\mathcal{G}}(t, \tau)\,\tilde{p}(\tau)\,d\tau \leqslant 0 \text{ при } t_1 < t < t_2,$$

что противоречит (1.75) и, таким образом, свидетельствует о справедливости (1.74).

Из (1.73) и (1.74), согласно леммам 1.2, 1.4 и 1.4′, следует существование такой не зависящей от выбора функций p_j ($j = 0, 1, 2$) постоянной d_1, что

$$|u(t)| \leqslant d_1 \int_a^b \mathcal{G}_0^*(t, \tau)\,p_0^*(\tau)\,d\tau \leqslant d_1 \int_a^b \mathcal{G}^*(t, \tau)\,p_0^*(\tau)\,d\tau$$
$$\text{при } a < t < b, \tag{1.76}$$

где

$$\mathcal{G}_0^*(t, \tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma(p_2)(\tau)} \displaystyle\int_t^b \sigma(p_2)(s)\,ds \int_a^\tau \sigma(p_2)(r)\,dr & \text{при } a < \tau \leqslant t < b, \\ \dfrac{1}{\sigma(p_2)(\tau)} \displaystyle\int_a^t \sigma(p_2)(s)\,ds \int_\tau^b \sigma(p_2)(r)\,dr & \text{при } a < t < \tau < b. \end{cases}$$

Теперь перейдем к оценке u'. Пусть $t_0 \in]a, b[$ — произвольная точка, в которой $u'(t_0) \neq 0$. Допустим, что $u(t_0)\,u'(t_0) \geqslant 0$. Тогда, ввиду (1.5$_1$), найдется $t_1 \in]t_0, b[$ такая, что

$$u(t)\,u'(t) > 0 \text{ при } t_0 < t < t_1,\quad u'(t_1) = 0. \tag{1.77}$$

Положим

$$w(t) = u'(t) \int_t^b \sigma(p_2)(\tau)\,d\tau \text{ при } a < t < b.$$

Поскольку w — решение уравнения

$$w' = p_2(t)\,w + [p_1(t)\,u(t) + p_0(t)] \int_t^b \sigma(p_2)(\tau)\,d\tau - u'(t)\,\sigma(p_2)(t),$$

применив (1.68), (1.69) и (1.77), получаем

$$w(t_0) \leqslant \sigma(p_2)(t_0) \times$$
$$\times \left\{ \int_{t_0}^{t_1} [\|g_1(\tau) u(\tau)| + p_0^*(\tau)] \frac{1}{\sigma(p_2)(\tau)} \int_{\tau}^{b} \sigma(p_2)(s)\, ds\, d\tau + u(t_1) \right\}.$$

Кроме того, в силу (1.76), имеем

$$|u(t)| \leqslant d_1 \frac{\int_a^t \sigma(p_2)(\tau)\, d\tau}{\int_a^{t_0} \sigma(p_2)(\tau)\, d\tau} \int_a^b \mathcal{G}_0^*(t_0, \tau)\, p_0^*(\tau)\, d\tau \text{ при } t_0 \leqslant t < b.$$

Поэтому с учетом оценки

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{p_0^*(\tau)}{\sigma(p_2)(\tau)} \int_{\tau}^{b} \sigma(p_2)(s)\, ds\, d\tau \leqslant \frac{1}{\int_a^{t_0} \sigma(p_2)(\tau)\, d\tau} \int_a^b \mathcal{G}_0^*(t_0, \tau)\, p_0^*(\tau)\, d\tau$$

легко убеждаемся, что

$$|u'(t_0)| \leqslant \frac{d_2}{\sigma_1(g)(t)} \int_a^b \mathcal{G}^*(t_0, \tau)\, p_0^*(\tau)\, d\tau,$$

где

$$d_2 = d_1 \left[\int_a^b |g_1(t)|\, \sigma_1^*(g_{21}, g_{22})(t)\, dt + \int_a^b \sigma^*(g_{21}, g_{22})(t)\, dt \right] + 1.$$

Внеся в приведенное рассуждение очевидные изменения, нетрудно показать, что это же неравенство справедливо и для тех $t_0 \in]a, b[$, в которых $u(t_0) u'(t_0) < 0$.

Таким образом, можно положить $c_0 = \max\{d_1, d_2\}$. Теорема доказана.

Для случая краевых условий (1.5_2) теоремы 1.5_1 и 1.6_1 принимают следующий вид.

Теорема 1.5_2. Пусть $(g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22}) \in V_2(]a, b[)$. Тогда найдется такая постоянная c_0, что, каковы бы ни были измеримые функции $p_j :]a, b[\to \mathbf{R}$ $(j = 0, 1, 2)$, удовлетворяющие неравенствам (1.67) и соотношению $p_0 \sigma_2(g_{21}) \in L([a, b])$, задача (1.1), (1.5_2) имеет единственное решение u, причем

$$|u^{(j-1)}(t)| \leqslant \frac{c_0}{[\sigma_2(g_{21})(t)]^{j-1}} \int_a^b \mathcal{G}^*(t, \tau) |p_0(\tau)|\, d\tau \text{ при } a < t < b \ (j = 1, 2),$$

где

$$\mathcal{G}^*(t, \tau) = \begin{cases} \sigma_2(g_{21})(\tau) \text{ при } a < \tau \leqslant t < b, \\ \dfrac{1}{\sigma(g_{21})(\tau)} \displaystyle\int_a^t \sigma(g_{21})(s)\, ds \text{ при } a < t < \tau < b \end{cases}$$

Теорема 1.6$_2$. Пусть $(g_1, g_{21}, g_{22}) \in V_{20}(]a, b[)$.

Тогда найдется такая постоянная c_0, что, каковы бы ни были измеримые функции $p_j:]a, b[\to \mathbf{R}$ $(j=0, 1, 2)$, удовлетворяющие неравенствам (1.68) и соотношениям

$$p_1\sigma_2(p_2) \in L([a, b]), \quad p_0\sigma_2(g_{21}) \in L([a, b]),$$

задача (1.1), (1.5$_2$) имеет единственное решение u, причем

$$|u^{(j-1)}(t)| \leqslant \frac{c_0}{|\sigma_2(g_{22})(t)|^{j-1}} \int_a^b \mathcal{G}^*(t, \tau) p_0^*(\tau) d\tau \text{ при } a<t<b \ (j=1, 2),$$

где функции $\mathcal{G}^*$ и p_0^* — такие же, как в теоремах 1.5$_2$ и 1.6$_1$ соответственно.

С помощью результатов предыдущего пункта из теорем 1.5$_1$, 1.5$_2$, 1.6$_1$ и 1.6$_2$ можно в качестве следствий получить довольно легко проверяемые признаки однозначной разрешимости линейных краевых задач.

§ 2. УРАВНЕНИЯ, СРАВНИМЫЕ С ЛИНЕЙНЫМИ

Перейдем теперь к рассмотрению краевых задач для нелинейного сингулярного дифференциального уравнения

$$u'' = f(t, u, u'). \tag{2.1}$$

Что же касается краевых условий, в этом параграфе нам удобно будет считать их однородными:

$$u(a+) = 0, \quad u^{(i-1)}(b-) = 0. \tag{2.2$_i$}$$

Ниже всюду предполагается, что

$$f \in K_{loc}(]a, b[\times \mathbf{R}^2). \tag{2.3$_1$}$$

Кроме того, при рассмотрении задачи (2.1), (2.2$_2$) в некоторых случаях на f будет налагаться более жесткое ограничение

$$f \in K_{loc}(]a, b[\times \mathbf{R}^2). \tag{2.3$_2$}$$

Мы систематически будем использовать операторы σ, σ_i, σ_i^* и множества $V_i(]a, b[)$, $V_{ik}(]a, b[)$, введенные в предыдущем параграфе.

2.1. Вспомогательные предложения. Начнем со случая, когда уравнение (2.1) — квазилинейное, т. е. имеет вид

$$u'' = p_1(t) u + p_2(t) u' + p(t, u, u'), \tag{2.4}$$

где

$$p \in K_{loc}(]a, b[\times \mathbf{R}^2), \quad |p(t, x, y)| \leqslant p_0(t) \text{ при } a<t<b, \ x, y \in \mathbf{R}. \tag{2.5}$$

Для таких уравнений вопрос о разрешимости краевых задач решается довольно просто с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке.

Лемма 2.1. Пусть $i\in\{1, 2\}$, выполняются условия (1.3_i) и (2.5), а задача (1.4), (1.5_i) не имеет нетривиального решения. Тогда задача (2.4), (2.2_i) разрешима.

Доказательство. Рассмотрим множество всех непрерывно дифференцируемых функций $w:]a, b[\to\mathbf{R}$ таких, что w и $w'\sigma_i(p_2)$ имеют конечные пределы в точках a и b, и обозначим через B банахово пространство этих функций с нормой

$$\|w\|=\sup\{|w(t)|+|w'(t)|\sigma_i(p_2)(t):\ a<t<b\}.$$

Если $\mathcal{G}$ — функция Грина задачи (1.4), (1.5_i), то, согласно леммам 1.2, 1.4 и 1.4',

$$\left|\frac{\partial^{j-1}\mathcal{G}(t,\tau)}{\partial t^{j-1}}\right|\leqslant\frac{c^*\sigma_i(p_2)(\tau)}{[\sigma_i(p_2)(t)]^{j-1}}\ \text{при}\ a<t,\ \tau<b,\ t\neq\tau\ (j=1,\ 2),$$

где c^* — некоторая постоянная. Поэтому, в силу (1.3_i) и (2.5), непрерывный оператор H, определенный равенством

$$H(w)(t)=\int_a^b\mathcal{G}(t,\tau)\,p(\tau,\ w(\tau),\ w'(\tau))\,d\tau\ \text{при}\ a<t<b,$$

отображает пространство B в его компактное подмножество. По теореме Шаудера, найдется $u\in B$ такая, что

$$u(t)=\int_a^b\mathcal{G}(t,\tau)\,p(\tau,\ u(\tau),\ u'(\tau))\,d\tau\ \text{при}\ a<t<b.$$

Как следует из теоремы 1.1, u — решение задачи (2.4), (2.2_i). Лемма доказана.

Приведем еще два утверждения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Лемма 2.2. Пусть

$$a<a_n<b_n<b\ (n=1,\ 2,\ \ldots),\ \lim_{n\to+\infty}a_n=a,\ \lim_{n\to+\infty}b_n=b, \tag{2.6}$$

а $u_n:[a_n,\ b_n]\to\mathbf{R}$ ($n=1,\ 2,\ \ldots$) — последовательность решений уравнения (2.1) такая, что для любого $[t_1,\ t_2]\subset]a,\ b[$

$$\sup\{|u_n(t)|+|u_n'(t)|: t\in[a_n,\ b_n]\cap[t_1,\ t_2],\ n=1,\ 2,\ \ldots\}<+\infty.$$

Тогда из последовательности $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ можно выбрать подпоследовательность $(u_{n_m})_{m=1}^{+\infty}$, равномерно сходящуюся вместе с $(u'_{n_m})_{m=1}^{+\infty}$ на каждом сегменте, содержащемся в интервале $]a,\ b[$, предел которой является решением (2.1) на этом интервале.

Доказательство. Положим

$$z_{jn}(t)=\begin{cases}u_n^{(j-1)}(a_n)\ \text{при}\ a\leqslant t\leqslant a_n,\\ u_n^{(j-1)}(t)\ \text{при}\ a_n<t<b_n\ (j=1,\ 2;\ n=1,\ 2,\ \ldots)\\ u_n^{(j-1)}(b_n)\ \text{при}\ b_n\leqslant t\leqslant b.\end{cases}$$

Ввиду (2.3_1) и сделанных предположений, последовательности $(z_{jn})_{n=1}^{+\infty}$ $(j=1, 2)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на каждом сегменте, содержащемся в $]a, b[$. Поэтому, согласно лемме Арцелла—Асколи, их, не нарушая общности, можно считать равномерно сходящимися на любом таком сегменте.

Пусть

$$u(t)=\lim_{n\to+\infty} z_{1n}(t) \text{ при } a<t<b.$$

Тогда

$$u'(t)=\lim_{n\to+\infty} z_{2n}(t) \text{ при } a<t<b.$$

Если t — произвольная точка интервала $]a, b[$, то согласно (2.6), при всех достаточно больших n

$$z_{2n}(t)=z_{2n}\left(\frac{a+b}{2}\right)+\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{t} f(\tau, z_{1n}(\tau), z_{2n}(\tau))\,d\tau.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n\to+\infty$, получаем

$$u'(t)=u'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{t} f(\tau, u(\tau), u'(\tau))\,d\tau.$$

Следовательно, u удовлетворяет (2.1) почти всюду в $]a, b[$. Лемма доказана.

Замечание. Легко видеть, что доказанное утверждение остается справедливым и тогда, когда либо $a=-\infty$, либо $b=+\infty$, либо выполнены оба этих равенства.

Из леммы 2.2 вытекают следующие предложения.

Лемма 2.3_1. Пусть $v_j :]a, b[\to\mathbf{R}_+$ $(j=1, 2)$ — непрерывные функции, $v_1(a+)=v_1(b-)=0$ и выполнены условия (2.6). Пусть, далее, для любого натурального n уравнение (2.1) имеет решение $u_n : [a_n, b_n]\to\mathbf{R}$, удовлетворяющее неравенствам

$$|u_n^{(j-1)}(t)|\leqslant v_j(t) \text{ при } a_n\leqslant t\leqslant b_n \ (j=1, 2). \tag{2.7}$$

Тогда задача (2.1), (2.2_1) разрешима.

Лемма 2.3_2. Пусть выполняется условие (2.3_2), $v_j :]a, b[\to\mathbf{R}_+$ $(j=1, 2)$ — непрерывные функции, $v_1(a+)=0$, а последовательность точек a_n $(n=1, 2, \ldots)$ интервала $]a, b[$ сходится к a. Пусть, кроме того, для любого натурального n уравнение (2.1) имеет решение $u_n : [a_n, b[\to\mathbf{R}$, удовлетворяющее неравенствам

$$|u_n^{(j-1)}(t)|\leqslant v_j(t) \text{ при } a_n\leqslant t<b \ (j=1, 2),$$

причем $u_n'(b-)=0$. Тогда задача (2.1), (2.2_2) разрешима.

2.2. Теоремы существования.

Теорема 2.1. Если $i \in \{1, 2\}$,

$$(g_{11},\ g_{12},\ g_{21},\ g_{22}) \in V_i(]a, b[) \tag{2.8}$$

и на множестве $]a, b[\times \mathbf{R}^2$ имеют место неравенства

$$|f(t, x, y) - g_1(t, x, y)x - g_2(t, x, y)y| \leqslant g_0(t) \tag{2.9}$$

и

$$g_{j1}(t) \leqslant g_j(t, x, y) \leqslant g_{j2}(t) \quad (j=1, 2), \tag{2.10}$$

где $g_j \in K^0(]a, b[\times \mathbf{R}^2)$ $(j=1, 2)$ и

$$g_0 \sigma_i^*(g_{21},\ g_{22}) \in L([a, b]), \tag{2.11}$$

то задача (2.1), (2.2$_i$) разрешима.

Доказательство. Пусть постоянная c_0 и функция $\mathcal{G}^*$ — такие же, как в заключении теоремы 1.5$_i$. Положим

$$v_j(t) = \frac{c_0}{\left[\sigma_i^*(g_{21},\ g_{22})(t)\right]^{j-1}} \int_a^b \mathcal{G}^*(t, \tau)\, g_0(\tau)\, d\tau$$

$$\text{при } a<t<b \ (j=1, 2)$$

и

$$a_n = a + \frac{b-a}{3n}, \quad b_n = \begin{cases} b - \dfrac{b-a}{3n}, & \text{если } i=1, \\ b, & \text{если } i=2, \end{cases} \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{2.12}$$

Определим функции $\xi_n:]a, b[\times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ $(n=1, 2, \ldots)$ соотношениями

$$\xi_n(t, x, y) = \\ = \psi_n(t)\, \chi_0(t, |x|+|y|)[f(t, x, y) - g_{11}(t)x - g_{21}(t)y], \tag{2.13}$$

где

$$\psi_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [a_n, b_n], \\ 0 & \text{при } t \notin [a_n, b_n], \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\chi_0(t; z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \leqslant r_0(t), \\ 2 - \dfrac{z}{r_0(t)} & \text{при } r_0(t) < z < 2r_0(t), \\ 0 & \text{при } z \geqslant 2r_0(t) \end{cases} \tag{2.15}$$

и

$$r_0(t) = v_1(t) + v_2(t) + 1. \tag{2.16}$$

В силу неравенств (2.9) и (2.10), ясно, что на $]a, b[\times \mathbf{R}^2$

$$|\xi_n(t, x, y)| \leqslant \psi_n(t)\left[g_0(t) + 2\sum_{j=1}^{2} r_0(t)\,(g_{j2}(t) - g_{j1}(t))\right].$$

Таким образом, по лемме 2.1, для любого натурального n уравнение

$$u'' = g_{11}(t)u + g_{21}(t)u' + \xi_n(t, u, u')$$

при краевых условиях (2.2_i) имеет решение u_n. Ввиду (2.13), u_n в то же время является решением уравнения (1.1), где при $a<t<b$

$$p_j(t)=g_{j1}(t)+\psi_n(t)\chi_0(t, |u_n(t)|\times$$
$$\times|u_n'(t)|[g_j(t, u_n(t), u_n'(t))-g_{j1}(t)]$$
$$(j=1, 2),$$
$$p_0(t)=\psi_n(t)\chi_0(t, |u_n(t)|+|u_n'(t)|)[f(t, u_n(t), u_n'(t))-$$
$$-g_1(t, u_n(t), u_n'(t))u_n(t)-g_2(t, u_n(t), u_n'(t))u_n'(t)].$$

Поэтому, с учетом выбора функций v_1 и v_2 и неравенств

$$g_{j1}(t)\leqslant p_j(t)\leqslant g_{j2}(t) \quad (j=1,2), \ |p_0(t)|\leqslant g_0(t) \text{ при } a<t<b,$$

вытекающих из (2.9) и (2.10), убеждаемся в справедливости оценок (2.7). Отсюда, согласно (2.14)—(2.16), следует, что u_n — решение уравнения (2.1) на $[a_n, b_n]$ $(n=1, 2, \ldots)$. Остается применить лемму 2.3_i. Теорема доказана.

Теорема 2.2. Если $i\in\{1, 2\}$,

$$(g_1, \ g_{21}, \ g_{22})\in V_{i0}(]a, b[), \tag{2.17}$$

выполнены условия (2.3_i) и (2.11), а на множестве $]a, b[\times\mathbf{R}^2$ имеют место неравенства

$$[f(t, x, y)-g_1(t)x-g_2(t, x, y)y]\operatorname{sign} x\geqslant -g_0(t) \tag{2.18}$$

и

$$g_{21}(t)\leqslant g_2(t, x, y)\leqslant g_{22}(t), \tag{2.19}$$

где $g_2\in K^0(]a, b[\times\mathbf{R}^2)$, то задача (2.1), (2.2_i) разрешима.

Доказательство. Пусть

$$v_j(t)=\frac{c_0}{[\sigma_i(g)(t)]^{j-1}}\int_a^b \mathcal{G}^*(t, \tau)g_0(\tau)d\tau \text{ при } a<t<b \ (j=1, 2),$$

где функция $\mathcal{G}^*$ — такая же, как в теореме 1.5_i, c_0 — постоянная, для которой справедливо заключение теоремы 1.6_i, а функция $g:]a, b[\to\mathbf{R}$ задана равенством (1.70) в случае, когда $i=1$, и тождественно равна g_{22} в случае, когда $i=2$.

Если справедливы (2.12), (2.14)—(2.16) и на $]a, b[\times\mathbf{R}^2$

$$\xi_n(t, x, y)=\psi_n(t)\chi_0(t, |x|+|y|)[f(t, x, y)-g_1(t)x-g_{21}(t)y]$$
$$(n=1,2,\cdots),$$

то, как следует из леммы 2.1, при любом натуральном n уравнение

$$u''=g_1(t)u+g_{21}(t)u'+\xi_n(t, u, u')$$

имеет решение u_n, удовлетворяющее краевым условиям (2.2_i). Тогда u_n является решением и уравнения (1.1), где при $a<$ $<t<b$

$$p_1(t)=g_1(t),$$

$$p_2(t)=g_{21}(t)+\psi_n(t)\chi_0(t,\ |u_n(t)|+|u_n'(t)|)[g_2(t,u_n(t),\ u_n'(t))-g_{21}(t)]$$

и

$$p_0(t)=\psi_n(t)\chi_0(t,\ |u_n(t)|+|u_n'(t)|)[f(t,u_n(t),u_n'(t))-\\ -g_1(t)u_n(t)-g_2(t,u_n(t),u_n'(t))u_n'(t)].$$

Но, согласно (2.18) и (2.19),

$$g_{21}(t)\leqslant p_2(t)\leqslant g_{22}(t),$$

$$\frac{1}{2}[|p_0(t)|-p_0(t)\operatorname{sign}u_n(t)]\leqslant g_0(t) \text{ при } a<t<b.$$

Значит, справедливы оценки (2.7), $u_n (n=1,2,\cdots)$ — решения уравнения (2.1) на сегментах $[a_n, b_n]$ и, по лемме 2.3_i, задача (2.1), (2.2_i) разрешима. Теорема доказана.

Отметим, что если в условиях теоремы 2.1 рост правой части уравнения (2.1) по фазовым переменным ограничен линейным, то в условиях теоремы 2.2 этот рост, вообще говоря, может быть любым. Например, из теоремы 2.2 вытекает разрешимость задачи (2.1), (2.2_i), $i\in\{1,2\}$, где

$$f(t,x,y)=g(t)x^{2n+1}y^{2m}+g_0(t),$$

n и m — произвольные натуральные числа, $g:]a,b[\to\mathbf{R}_+$ — функция из $L_{loc}(]a,b[)$ при $i=1$ и $L_{loc}(]a,b])$ при $i=2$, а

$$\int_a^b (t-a)(b-t)^{2-i}|g_0(t)|\,dt<+\infty.$$

2.3. Теоремы единственности.

Теорема 2.3. Если $i\in\{1,2\}$, выполняется условие (2.8) и на $]a,b[\times\mathbf{R}^2$

$$\begin{gathered} g_{11}(t)|x_1-x_2|\leqslant[f(t,x_1,y)-f(t,x_2,y)]\operatorname{sign}(x_1-x_2)\leqslant\\ \leqslant g_{12}(t)|x_1-x_2|,\\ g_{21}(t)|y_1-y_2|\leqslant[f(t,x,y_1)-f(t,x,y_2)]\operatorname{sign}(y_1-y_2)\leqslant\\ \leqslant g_{22}(t)|y_1-y_2|, \end{gathered} \tag{2.20}$$

то задача (2.1), (2.2_i) имеет не более одного решения.

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 — решения задачи (2.1), (2.2_i). Положим

$$u(t)=u_1(t)-u_2(t) \text{ при } a<t<b. \tag{2.21}$$

Тогда u — решение задачи (1.4), (1.5_i), где

$$p_1(t)=\begin{cases}\dfrac{f(t,u_1(t),u_1'(t))-f(t,u_2(t),u_1'(t))}{u(t)}, & \text{если } u(t)\neq0,\\ g_{11}(t), \text{ если } u(t)=0,\end{cases}$$

а

$$p_2(t)=\begin{cases}\dfrac{f(t,u_2(t),u_1'(t))-f(t,u_2(t),u_2'(t))}{u'(t)}, & \text{если } u'(t)\neq0,\\ g_{21}(t), \text{ если } u'(t)=0.\end{cases}$$

Из (2.20) следует, что

$$g_{j1}(t) \leqslant p_j(t) \leqslant g_{j2}(t) \text{ при } a<t<b \ (j=1,2),$$

а значит, в силу (2.8), $u(t)\equiv 0$. Теорема доказана.

Нетрудно убедиться, что из теорем 2.1 и 2.3 вытекает

Следствие. Пусть выполняются условия теоремы 2.3 и, кроме того,

$$\int_a^b |f(t, 0, 0)|\, \sigma_i^*(g_{21}, g_{22})(t)\, dt < +\infty. \tag{2.22}$$

Тогда задача (2.1), (2.2$_i$) имеет единственное решение.

Следующее утверждение показывает, что, усилив ограничение (2.8), можно отказаться от содержащегося в теореме 2.3 требования липшицевости функции f по второму аргументу.

Теорема 2.4. Если $i\in\{1,2\}$, выполняется условие (2.17) и на $]a, b[\times \mathbf{R}^2$

$$\begin{gathered}[f(t, x_1, y)-f(t, x_2, y)]\operatorname{sign}(x_1-x_2) \geqslant g_1(t)|x_1-x_2|,\\ g_{21}(t)\,|y_1-y_2| \leqslant [f(t, x, y_1)-f(t, x, y_2)]\operatorname{sign}(y_1-y_2) \leqslant \\ \leqslant g_{22}(t)\,|y_1-y_2|,\end{gathered} \tag{2.23}$$

то задача (2.1), (2.2$_i$) имеет не более одного решения.

Доказательство. Для определенности мы будем рассматривать случай, когда $i=1$.

Пусть u_1 и u_2 — решения задачи (2.1), (2.2$_1$). Положим (2.21). С помощью (2.23) нетрудно убедиться в существовании таких измеримых функций $g_2, h:]a, b[\to\mathbf{R}$, что

$$g_{21}(t) \leqslant g_2(t) \leqslant g_{22}(t), \quad h(t) \geqslant 0 \text{ при } a<t<b \tag{2.24}$$

и u является решением уравнения

$$u'' = (g_1(t)+h(t))\,u + g_2(t)\,u' \tag{2.25}$$

в интервале $]a, b[$.

Предположим, что функция u отлична от нуля в некоторой точке $t_0\in]a, b[$. Тогда найдутся $t_1\in[a, t_0[$ и $t_2\in]t_0, b]$, для которых

$$u(t)\neq 0 \text{ при } t_1<t<t_2, \quad u(t_1+) = u(t_2-) = 0. \tag{2.26}$$

Выберем из интервала $]t_1, t_2[$ точки t_{1n} и t_{2n} ($n=1,2,\cdots$) так, чтобы выполнялись соотношения

$$t_1 < t_{1n} < t_{2n} < t_2 \ (n=1,2,\cdots), \ t_{jn}\to t_j \text{ при } n\to+\infty \ (j=1,2).$$

Согласно (2.17), (2.24) и леммам 1.2 и 1.3, при любом натуральном n задача

$$\begin{gathered} v'' = g_1(t)\,v + g_2(t)\,v',\\ v(t_{1n}) = 0, \quad v(t_{2n}) = 0\end{gathered} \tag{2.27}$$

не имеет нетривиального решения, причем ее функция Грина $\mathcal{G}_n$ отрицательна на множестве $]t_{1n}, t_{2n}[\times]t_{1n}, t_{2n}[$. С другой стороны, из (2.25) и теоремы 1.1 вытекает представление

$$u(t)=c_{1n}v_1(t)+c_{2n}v_2(t)+\int\limits_{t_{1n}}^{t_{2n}}\mathcal{G}_n(t,\tau)\,h(\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

$$\text{при } t_{1n}\leqslant t\leqslant t_{2n}\quad (n=1,\,2,\,\ldots),$$

где v_1 и v_2 — произвольные линейно независимые решения (2.27), а

$$c_{jn}=(-1)^j\frac{u(t_{2n})\,v_{3-j}(t_{1n})-u(t_{1n})\,v_{3-j}(t_{2n})}{v_1(t_{1n})\,v_2(t_{2n})-v_1(t_{2n})\,v_2(t_{1n})}\quad (j=1,\,2).$$

(Заметим, что здесь, вообще говоря, нельзя воспользоваться формулой Грина на всем промежутке $]t_1,\ t_2[$, ибо его концы могут совпадать с точками a и b, интегральные свойства функции h в которых неизвестны.)

Таким образом, в силу (2.24) и (2.26),

$$|u(t)|\leqslant|c_{1n}v_1(t)+c_{2n}v_2(t)|\ \text{ при } t_{1n}\leqslant t\leqslant t_{2n}\ (n=1,2,\cdots),$$

а так как $c_{jn}\to 0$ при $n\to+\infty$ $(j=1,2)$, из этой оценки следует противоречащее сделанному допущению равенство $u(t_0)=0$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть выполняются условия теоремы 2.4, включение (2.3_i) и неравенство (2.22). Тогда задача (2.1), (2.2_i) имеет единственное решение.

2.4. Теоремы неединственности. В этом пункте всюду предполагается, что

$$f(t,\,0,\,0)=0 \text{ при } a<t<b$$

и, какова бы ни была точка $t_0\in]a,\,b[$, решение u уравнения (2.1), удовлетворяющее начальному условию

$$u(t_0)=0,\ \ u'(t_0)=0,$$

тождественно равно нулю.

Теорема 2.5. Пусть $i\in\{1,2\}$, k и m — натуральные числа, причем $k\neq m$,

$$(g_{11},\ g_{12},\ g_{21},\ g_{22})\in V_{ik}(]a,\,b[),\tag{2.28}$$

$$(h_{11},\ h_{12},\ h_{21},\ h_{22})\in V_{im}(]a,\,b[)\tag{2.29}$$

и на множестве $]a,\,b[\times\mathbf{R}^2$ имеют место неравенства (2.9), (2.10),

$$|f(t,x,y)-h_1(t,x,y)x-h_2(t,x,y)y|\leqslant h_0(t,\,|x|)\tag{2.30}$$

и

$$h_{j1}(t)\leqslant h_j(t,x,y)\leqslant h_{j2}(t)\ (j=1,2),\tag{2.31}$$

где $g_j,\ h_j\in K^0(]a,\ b[\times\mathbf{R}^2)$ $(j=1,2)$, выполняется (2.11), а функция $h_0:\,]a,\,b[\times\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ не убывает по второму аргументу и

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\int\limits_a^b h_0(t,\,x)\,\sigma_i^*(h_{21},\ h_{22})(t)\,dt=0.\tag{2.32}$$

Тогда для любого целого l такого, что

$$\min\{k,\,m\}\leqslant l<\max\{k,\,m\},\tag{2.33}$$

задача (2.1), (2.2_i) имеет, по крайней мере, два решения ровно с l нулями в интервале $]a, b[$.

Доказательство. Допустив противное и применив рассуждение, использованное при доказательстве леммы 1.4, легко убеждаемся в существовании числа $\varepsilon>0$, для которого

$$(g_{11}^*, g_{12}^*, g_{21}^*, g_{22}^*)\in V_{ik}(]a, b[),$$

если только

$$g_{j1}^*(t)=\begin{cases} g_{j1}(t) \text{ при } a<t\leqslant b-\varepsilon, \\ \min\{g_{j1}(t), h_{j1}(t)\} \text{ при } b-\varepsilon<t<b \ (j=1, 2), \end{cases}$$

$$g_{j2}^*(t)=\begin{cases} \max\{g_{j2}(t), h_{j2}(t)\} & \text{при } a<t<a+\varepsilon, \\ g_{j2}(t) & \text{при } a+\varepsilon\leqslant t<b. \end{cases}$$

Аналогичным путем в окрестности точек a и b можно изменить и вектор-функцию $(h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22})$, оставив ее во множестве $V_{lm}(]a, b[)$. Это обстоятельство позволяет нам, не нарушая общности, считать, что

$$g_{j1}(t)=h_{j1}(t) \text{ при } b-\varepsilon<t<b, \quad g_{j2}(t)=h_{j2}(t),$$
$$\text{при } a<t<a+\varepsilon \quad (j=1, 2), \tag{2.34}$$

где $\varepsilon\in\left]0, \frac{b-a}{2}\right[$.

Зададим целое число l, удовлетворяющее неравенствам (2.33). Пусть $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ — последовательность точек интервала $]a, a+\varepsilon[$, сходящаяся к a, а $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ — последовательность точек интервала $]b-\varepsilon, b[$, сходящаяся к b. Пусть, кроме того, функции v_j $(j=1, 2)$ — такие же, как при доказательстве теоремы 2.1, и

$$r_0(t)=v_1(t)+v_2(t)+2 \text{ при } a<t<b.$$

В силу (2.32),

$$d_0\int_a^b h_0(t, x)\,\sigma_l^*(h_{21}, h_{22})(t)\,dt<x \text{ при } 0<x\leqslant x_0, \tag{2.35}$$

где $x_0\in]0, 1[$ — некоторое число, а d_0 — постоянная, выбранная для вектор-функции $(h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22})$ по теореме 1.5_l. Поскольку уравнение (2.1) не имеет ненулевых решений, обращающихся на $]a, b[$ в нуль одновременно со своей производной, для любого натурального n можно подобрать $r_n\in]0, x_0[$ так, чтобы, каковы бы ни были решение u этого уравнения и точка $t_0\in[a_n, b_n]$, из неравенства

$$|u(t_0)|+|u'(t_0)|\leqslant r_n$$

следовали неравенства

$$|u(t)|\leqslant x_0, \ |u'(t)|\leqslant 1 \text{ при } a_n<t<b_n.$$

Положим (2.14), (2.15),

$$\chi_n(z)=\begin{cases} 0 \text{ при } z\leqslant\frac{r_n}{2}, \\ \frac{2z}{r_n}-1 \text{ при } \frac{r_n}{2}<z<r_n \end{cases} \quad (n=1, 2, \ldots),$$

$$g_{j0}(t)=\begin{cases} g_{j2}(t) \text{ при } a<t\leqslant b-\varepsilon, \\ g_{j1}(t) \text{ при } b-\varepsilon<t<b, \end{cases}$$

$$h_{j0}(t)=\begin{cases} h_{j2}(t) \text{ при } a<t\leqslant b-\varepsilon, \\ h_{j1}(t) \text{ при } b-\varepsilon<t<b, \end{cases}$$

и определим функции $f_n:]a, b[\times \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ $(n=1, 2, \ldots)$ равенствами

$$f_n(t, x, y)=\begin{cases} g_{10}(t)\,x+g_{20}(t)\,y+\psi_n(t)\,\chi_0(t, |x|+|y|)\,[f(t, x, y)- \\ -g_{10}(t)\,x-g_{20}(t)y] \text{ при } a<t<b, \quad |x|+|y|\geqslant r_n, \\ h_{10}(t)\,x+h_{20}(t)\,y+\psi_n(t)\,\chi_n(|x|+|y|)\,[f(t, x, y)- \\ -h_{10}(t)\,x-h_{20}(t)\,y] \text{ при } a<t<b, \quad |x|+|y|<r_n. \end{cases}$$

Легко видеть, что $f_n\in K_{loc}(]a, b[\times\mathbf{R}^2)$, если $i=1$ и $f_n\in K_{loc}(]a, b]\times\mathbf{R}^2)$, если $i=2$.

Произвольно зафиксируем натуральное n. Если γ_1 и γ_2 — положительные числа, причем γ_1 достаточно велико, γ_2 — достаточно мало, а u_{10} и u_{20} — решения начальных задач

$$u''=g_{10}(t)\,u+g_{20}(t)\,u', \quad u(a+)=0, \quad \lim_{t\to a}\frac{u'(t)}{\sigma(g_{20})(t)}=\gamma_1$$

и

$$u''=h_{10}(t)\,u+h_{20}(t)\,u', \quad u(a+)=0, \quad \lim_{t\to a}\frac{u'(t)}{\sigma(h_{20})(t)}=\gamma_2,$$

то u_{10} и u_{20} являются решениями и уравнения

$$u''=f_n(t, u, u'). \tag{2.36}$$

Запишем это уравнение в полярных координатах, т. е. произведем замену переменных

$$u=\rho\cos\varphi, \quad u'=\rho\sin\varphi. \tag{2.37}$$

Получим систему

$$\begin{aligned} \rho' &= f_n(t, \rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sin\varphi+\frac{1}{2}\rho\sin 2\varphi, \\ \varphi' &= \frac{1}{\rho}f_n(t, \rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\cos\varphi-\sin^2\varphi. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Под ее решением будем понимать вектор-функцию (ρ, φ) : $]a, b[\to\mathbf{R}^2$, первая компонента которой положительна. Тогда каждому решению системы (2.38) преобразование (2.37) ставит в соответствие определенное ненулевое решение уравнения (2.36), а каждому ненулевому решению (2.36) — решение (2.38), единственное с точностью до кратного 2π слагаемого во второй компоненте.

Пусть $(\rho_{10}, \varphi_{10})$ и $(\rho_{20}, \varphi_{20})$ — решения системы (2.38), соответствующие u_{10} и u_{20}, причем

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_{j0}(t) < \frac{\pi}{2} \quad (j=1, 2)$$

в некоторой окрестности точки a. Тогда, с учетом (2.28) и (2.29), нетрудно проверить, что

$$\frac{\pi}{2}(i-2)-\pi k < \varphi_{10}(t) < \frac{\pi}{2}(i-2)-\pi(k-1)$$

и

$$\frac{\pi}{2}(i-2)-\pi m < \varphi_{20}(t) < \frac{\pi}{2}(i-2)-\pi(m-1)$$

в некоторой окрестности точки b. Выбрав $\alpha\in]a, a_n[$ и $\beta_\nu\in]b_n, b[$ $(\nu=1, 2,\dots)$ из этих окрестностей так, чтобы $\beta_\nu\to b$, когда $\nu\to+\infty$, рассмотрим множество решений системы (2.38) при начальных условиях

$$\rho(\alpha)=z, \quad \varphi(\alpha)=\varphi_{10}(\alpha), \tag{2.39}$$

где $\rho_{20}(\alpha)\leqslant z\leqslant\rho_{10}(\alpha)$. Поскольку, в силу (2.34), $\varphi_{20}(\alpha)=\varphi_{10}(\alpha)$, то, по теореме Кнезера о структуре интегральной воронки (м., например, [56], стр. 28), для любого натурального ν это множество содержит решение $(\tilde\rho_\nu, \tilde\varphi_\nu)$, удовлетворяющее равенству

$$\tilde\varphi_\nu(\beta_\nu)=\frac{\pi}{2}(i-2)-\pi l.$$

Ясно, что если решение $\tilde u_\nu$ $(\nu=1, 2,\dots)$ уравнения (2.36) соответствует $(\tilde\rho_\nu, \tilde\varphi_\nu)$, то

$$\tilde u_\nu(a+)=0, \quad \tilde u_\nu^{(i-1)}(\beta_\nu)=0,$$

$\tilde u_\nu(t)>0$ в малой правой окрестности точки a и $\tilde u_\nu$ имеет ровно l нулей в интервале $]a, \beta_\nu[$. Свойства функции f_n позволяют выделить из $(\tilde u_\nu)_{\nu=1}^{+\infty}$ равномерно сходящуюся в интервале $]a, b[$ подпоследовательность. Ее предел u_n, очевидно, является решением задачи (2.36), (2.2_i) ровно с l нулями в интервале $]a, b[$ и положителен вблизи точки a.

Допустим, что $t_0\in[a_n, b_n]$ и

$$|u_n(t_0)|+|u_n'(t_0)|\leqslant r_n.$$

Тогда, в силу определения постоянной r_n,

$$|u_n(t)|\leqslant x_0, \quad |u_n'(t)|\leqslant 1 \text{ при } a_n<t<b_n. \tag{2.40}$$

Следовательно, u_n — решение уравнения

$$u''=h_{10}(t)u+h_{20}(t)u'+\psi_n(t)\chi_n(|u|\times$$
$$\times|u'|)[f(t, u, u')-h_{10}(t)u-h_{20}(t)u'].$$

Отсюда, согласно (2.30) и (2.31), вытекает (см. доказательство теоремы 2.1), что u_n — решение некоторого уравнения (1.1), где измеримые функции $p_0, p_1, p_2 :]a, b[\to\mathbf{R}$ удовлетворяют неравенствам

$$h_{j1}(t)\leqslant p_j(t)\leqslant h_{j2}(t) \quad (j=1,2), \quad |p_0(t)|\leqslant h_0(t, x_n),$$

а

$$x_n = \sup\{|u_n(t)|: a_n<t<b_n\}. \tag{2.41}$$

Но тогда, ввиду выбора постоянной d_0, имеем

$$x_n\leqslant d_0\int_a^b h_0(t, x_n)\,\sigma_i^*(h_{21}, h_{22})(t)\,dt, \tag{2.42}$$

что противоречит (2.35), ибо, как следует из (2.40), $x_n\leqslant x_0$.

Итак,

$$|u_n(t)|+|u_n'(t)|>r_n \text{ при } a_n\leqslant t\leqslant b_n$$

и u_n — решение уравнения

$$u''=g_{10}(t)\,u+g_{20}(t)\,u'+\psi_n(t)\,\chi_0(t, |u|\times$$
$$\times|u'|)[f(t, u, u')-g_{10}(t)\,u-g_{20}(t)\,u'].$$

Отсюда точно так же, как при доказательстве теоремы 2.1, получаем (2.7).

Таким образом, построенные нами решения u_n $(n=1, 2,\dots)$ удовлетворяют на сегментах $[a_n, b_n]$ уравнению (2.1) и общность не будет нарушена, если считать, что последовательность $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ равномерно в интервале $]a, b[$ сходится к решению u задачи (2.1), (2.2$_i$). Следовательно, из (2.30), (2.31) и (2.34) получаем неравенство (2.42), где x_n определено соотношением (2.41). Отсюда вытекает отличие u от тождественного нуля, ибо в противном случае $x_n\leqslant x_0$ при достаточно больших n, что противоречит (2.35).

Обозначим через l^* число нулей функции u в интервале $]a, b[$. Очевидно, $l^*\leqslant l$.

Пусть $l^*<l$, а $t_{jn}\in]a, b[$ $(j=1,\dots, l)$ — нули решения u_n, пронумерованные в порядке возрастания. Тогда, поскольку предположение о сходимости последовательностей $(t_{jn})_{n=1}^{+\infty}$ $(j=1,\dots, l)$ не нарушает общности, нам достаточно рассмотреть три возможности:

а) $t_{jn}\to t^*$, $t_{j+1n}\to t^*$ при $n\to+\infty$, где $t^*\in]a, b[$, а $j\in\{1,\dots, l-1\}$;

б) $t_{1n}\to a$ при $n\to+\infty$;

в) $t_{ln}\to b$ при $n\to+\infty$.

В случае а) $u(t^*)=u'(t^*)=0$, т. е. $u(t)\equiv 0$, а это противоречит доказанному.

Если имеет место б), то для любого n найдется точка $\tau_n\in]a, t_{1n}[$, в которой $u'(\tau_n)=0$. Но, как в этом легко убедиться,

$$(h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22})\in V_2(]a, \tau_n[)$$

при достаточно больших n. Поэтому, воспользовавшись (2.30), (2.31), леммой 1.2 и теоремой 1.1, мы имеем

$$|u_n(t)| \leqslant d \int_a^{\tau_n} h_0(\tau, |u_n(\tau)|)\, \sigma_2^*(h_{21}, h_{22})(\tau)\, d\tau \text{ при } a < t < \tau_n,$$

где d — постоянная, не зависящая от n (опущенные здесь детали нетрудно восстановить по работе [60]). С другой стороны, h_0 не убывает по второму аргументу и, в силу (2.7),

$$\sup\{|u_n(t)| : a < t < \tau_n\} \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Значит, полученное неравенство противоречит (2.32).

Аналогичным путем можно показать, что случай в) также не может иметь места.

Итак, $l^* = l$, т. е. u — решение задачи (2.1), (2.2$_i$) ровно с l нулями в $]a, b[$. Заменив в (2.39) второе равенство на $\varphi(\alpha) = \varphi_{10}(\alpha) + \pi$ и повторив приведенное рассуждение, покажем, что эта задача имеет еще одно решение, которое в отличие от u отрицательно вблизи точки a. Теорема доказана.

Несколько модифицируя доказательство предыдущей теоремы с учетом теорем 1.6$_1$ и 1.6$_2$, убеждаемся в справедливости следующих утверждений.

Теорема 2.6. Пусть $i \in \{1, 2\}$, m — натуральное число и на множестве $]a, b[\times \mathbf{R}^2$ имеют место неравенства (2.18), (2.19), (2.30) и (2.31), где g_2, $h_j \in K^0$, $a, b[\times \mathbf{R}^2)$ ($j=1, 2$), соблюдаются условия (2.11), (2.17) и (2.29), а функция $h_0 :]a, b[\times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ не убывает по второму аргументу и удовлетворяет (2.32). Тогда, каково бы ни было целое $l \in [0, m[$, задача (2.1) (2.2$_i$) имеет по крайней мере два решения ровно с l нулями в интервале $]a, b[$.

Теорема 2.7. Пусть $i \in \{1, 2\}$, k — натуральное число и на множестве $]a, b[\times \mathbf{R}^2$ имеют место неравенства (2.9), (2.10),

$$[f(t, x, y) - h_1(t)x - h_2(t, x, y)y] \operatorname{sign} x \geqslant -h_0(t, |x|)$$

и

$$h_{21}(t) \leqslant h_2(t, x, y) \leqslant h_{22}(t),$$

где g_j, $h_2 \in K^0(]a, b[\times \mathbf{R}^2)$ ($j=1, 2$), соблюдаются условия (2.11), (2.28) и

$$(h_1, h_{21}, h_{22}) \in V_{i0}(]a, b[),$$

а функция $h_0 :]a, b[\times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ не убывает по второму аргументу и удовлетворяет (2.32). Тогда, каково бы ни было целое $l \in [0, k[$, задача (2.1); (2.2$_i$) имеет по крайней мере два решения ровно с l нулями в интервале $]a, b[$.

В качестве примера уравнения, к которому применимы результаты этого пункта, рассмотрим уравнение

$$u'' = g(t) \sin u, \tag{2.43}$$

где функция $g :]a, b[\to \mathbf{R}$ такова, что

$$\int_a^b (t-a)(b-t)^{2-i}|g(t)|\,dt<+\infty,$$

а $i\in\{1,2\}$. Обозначим через m число нулей решения линейной задачи

$$u''=g(t)u,\ u(a+)=0,\ u'(a+)=1$$

в интервале $]a,b[$ (такое решение существует в силу леммы 1.1). Тогда, по теореме 2.6, для любого целого $l\in[0,m[$ задача (2.43), (2.2_i) имеет решение ровно с l нулями в $]a,b[$.

С учетом утверждений пункта 1.5, из теорем 2.1—2.7 можно получить ряд следствий путем замены требований о принадлежности вектор-функций множествам $V_i(]a,b[)$ или $V_{ik}(]a,b[)$ ($i=1,2$; $k=0,1,\dots$) эффективными условиями, обеспечивающими выполнение этих требований.

Метод сравнения, описанный в §§ 1 и 2, применим и к двухточечным краевым задачам для двумерных сингулярных дифференциальных систем [97]. Этим же методом А. Г. Ломтатидзе [33, 34, 37] для уравнения (2.1) изучена трехточечная краевая задача

$$u(a+)=0,\ u(t_0)=u(b-),$$

где $t_0\in]a,b[$.

В заключение отметим, что за пределами настоящей работы остались вопросы численного решения сингулярных двухточечных краевых задач. Читателя, интересующегося этими вопросами, отсылаем к статьям Жаме [79] и Г. С. Табидзе [53, 54].

§ 3. УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ТИПА БЕРНШТЕЙНА — НАГУМО

В этом параграфе, как и в предыдущем, исследуются краевые задачи

$$u''=f(t,u,u'), \tag{3.1}$$

$$u(a+)=c_1,\ u^{(i-1)}(b-)=c_2, \tag{3.2$_i$}$$

где $i\in\{1,2\}$, $c_1,c_2\in\mathbf{R}$. При этом всюду предполагается, что

$$f\in K_{\mathrm{loc}}(]a,b[\times\mathbf{R}^2).$$

Случаи, когда

$$f\in K_{\mathrm{loc}}(]a,b]\times\mathbf{R}^2),$$

будут оговорены особо.

3.1. Леммы об априорных оценках. Для любого $r\in R_+$ положим

$$\eta_r(y)=\begin{cases}0 \text{ при } |y|\leqslant r,\\ \operatorname{sign} y \text{ при } |y|>r.\end{cases}$$

Определение 3.1. $\omega:\mathbf{R}\to]0,+\infty[$ называется функцией Нагумо, если она непрерывна и

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{\omega(y)} = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{\omega(-y)} = +\infty. \tag{3.3}$$

Лемма 3.1. Пусть r_0 и r — неотрицательные числа, $h:[a, b] \to \mathbf{R}_+$ — суммируемая функция, а ω — функция Нагумо. Тогда найдется такая положительная постоянная r^*, что, каковы бы ни были число $j \in \{1, 2\}$, сегмент $[t_1, t_2] \subset [a, b]$ и функция $u \in \widetilde{C}^1([t_1, t_2])$, из неравенств

$$(-1)^{j-1} u''(t)\, \eta_r(u'(t)) \leqslant \omega(u'(t))(h(t) + |u'(t)|) \text{ при } t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \tag{3.4}$$

$$|u(t)| \leqslant r_0 \text{ при } t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \tag{3.5}$$

и

$$|u'(t_j)| \leqslant r \tag{3.6}$$

следует оценка

$$|u'(t)| \leqslant r^* \text{ при } t_1 \leqslant t \leqslant t_2. \tag{3.7}$$

Доказательство. Пусть

$$\Omega_i(y) = \int_0^y \frac{dz}{\omega((-1)^i z)} \quad (i = 0, 1), \quad \Omega(y) = \min\{\Omega_0(y), \Omega_1(y)\}.$$

Ввиду (3.3), функция $\Omega: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ имеет обратную $\Omega^{-1}: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$. Положим

$$r^* = \Omega^{-1}\left(\int_a^b h(t)\, dt + 2r_0 + \Omega_0(r) + \Omega_1(r)\right). \tag{3.8}$$

Допустим, что лемма неверна. Тогда существуют $[t_1, t_2] \subset [a, b]$, $j \in \{1, 2\}$, $t^* \in]t_1, t_2[$ и удовлетворяющая неравенствам (3.4)—(3.6) функция $u \in \widetilde{C}^1([t_1, t_2])$, такая, что

$$|u'(t^*)| > r^*. \tag{3.9}$$

Пусть для определенности $j = 1$. Тогда, в силу (3.6) и (3.9), для некоторых $t_* \in]t_1, t^*[$ и $i \in \{0, 1\}$ будем иметь

$$(-1)^i u'(t) > r \text{ при } t_* < t \leqslant t^*, \quad |u'(t_*)| = r.$$

Согласно (3.4),

$$\frac{|u'(t)|'}{\omega((-1)^i |u'(t)|)} \leqslant h(t) + (-1)^i u'(t) \text{ при } t_* < t < t^*.$$

Интегрируя обе части этого неравенства от t_* до t^* и учитывая (3.5), получаем

$$\Omega(|u'(t^*)|) \leqslant \Omega_i(|u'(t^*)|) \leqslant \Omega_i(r) + \int_{t_*}^{t^*} h(t)\, dt + |u(t^*) - u(t_*)| \leqslant$$

$$\leqslant \Omega_0(r) + \Omega_1(r) + \int_a^b h(t)\, dt + 2r_0.$$

Отсюда, ввиду (3.8),

$$|u'(t^*)|\leqslant r^*,$$

что противоречит (3.9). Лемма доказана.

Лемма 3.2. Пусть r_0 и r — неотрицательные числа, $h:[a,b]\to\mathbf{R}_+$ — суммируемая функция, а ω — функция Нагумо. Тогда найдется такая положительная постоянная r^*, что, каковы бы ни были сегмент $[t_1,t_2]\subset[a,b]$ и функция $u\in\widetilde{C}_1([t_1,t_2])$, из неравенств (3.5),

$$u''(t)\eta_r(|u'(t)|)\operatorname{sign}u(t)\geqslant-\omega(u'(t))(h(t)+ +|u'(t)|) \text{ при } t_1\leqslant t\leqslant t_2 \tag{3.10}$$

и

$$u(t_1)\eta_r(u'(t_1))\geqslant 0,\quad u(t_2)\eta_r(u'(t_2))\leqslant 0 \tag{3.11}$$

следует оценка (3.7).

Доказательство. Подберем положительную постоянную r^* таким образом, чтобы было верно утверждение леммы 3.1.

Пусть $u\in\widetilde{C}^1([t_1,t_2])$ и выполнены условия (3.5), (3.10) и (3.11). Если $t_0\in]t_1,t_2[$ и $u'(t_0)\neq 0$, то возможны два случая: либо

$$u(t_0)u'(t_0)\geqslant 0, \tag{3.12}$$

либо

$$u(t_0)u'(t_0)<0. \tag{3.13}$$

Предположим, что выполняется (3.12). Тогда, согласно (3.11), *найдется точка* $t^*\in]t_0,t_2]$ *такая, что*

$$u(t)u'(t)>0 \text{ при } t_0<t<t^*,\ |u'(t^*)|\leqslant r.$$

Значит, из (3.10) следует неравенство

$$u''(t)\eta_r(u'(t))\geqslant-\omega(u'(t))(h(t)+|u'(t)|) \text{ при } t_0<t<t^*.$$

Отсюда, ввиду выбора постоянной r^*, получаем

$$|u'(t_0)|\leqslant r^*.$$

Совершенно аналогично можно показать, что это неравенство справедливо и в случае, когда выполнено (3.13). Лемма доказана.

Лемма 3.3. Пусть $a<\alpha<a_0<b_0<\beta<b$, r_0 и r — неотрицательные числа, $h:[a,b]\to\mathbf{R}_+$ — суммируемая функция, а ω — функция Нагумо. Тогда найдется такая положительная постоянная r^*, что, каковы бы ни были точки $t_1\in[a,\alpha]$, $t_2\in[\beta,b]$ и функция $u\in\widetilde{C}^1([t_1,t_2])$ из неравенств (3.5),

$$u''(t)\eta_r(u'(t))\operatorname{sign}(t-a_0)\leqslant\omega(u'(t))(h(t)+|u'(t)|) \text{ при } t\in]t_1,a_0[\cup]b_0,t_2[\tag{3.14}$$

и

$$u''(t)\eta_r(|u'(t)|)\operatorname{sign}u(t)\geqslant-\omega(u'(t))(h(t)+|u'(t)|) \text{ при } \alpha<t<\beta \tag{3.15}$$

следует оценка (3.7).

Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать, что

$$r \geqslant \max\left\{\frac{2r_0}{a_0-\alpha},\ \frac{2r_0}{\beta-b_0}\right\}.$$

Подберем положительное число r^* таким образом, чтобы были верны утверждения лемм 3.1 и 3.2.

Согласно (3.5), существуют точки $t_*\in]\alpha, a_0[$ и $t^*\in]b_0, \beta[$ такие, что

$$|u'(t_*)| \leqslant \frac{2r_0}{a_0-\alpha} \leqslant r, \quad |u'(t^*)| \leqslant \frac{2r_0}{\beta-b_0} \leqslant r. \tag{3.16}$$

В силу выбора r^*, из неравенств (3.5), (3.14) и (3.16) вытекает оценка

$$|u'(t)| \leqslant r^* \text{ при } t\in[t_1, t_*]\cup[t^*, t_2],$$

а из неравенств (3.5), (3.15) и (3.16) — оценка

$$|u'(t)| \leqslant r^* \text{ при } t_* \leqslant t \leqslant t^*.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.4. Пусть $\lambda\in[0, 1[$, $\mu\geqslant 0$, $h_2\geqslant 0$, $r_0\geqslant 0$ — постоянные, $h_0\in L_{loc}(]a, b[)$ и $h_1\in([a, b])$ — неотрицательные функции, причем h_0 суммируема с весом $(t-a)(b-t)^{-\mu}$. Тогда найдется такая неотрицательная функция $r^*\in C(]a, b])\cap L([a, b])$, что $(b-t)^{-\mu}r^*(t)\to 0$ при $t\to b$ и имеет место оценка

$$|u'(t)| \leqslant r^*(t) \quad \text{при } t_1 < t \leqslant t_2, \tag{3.17}$$

если только $[t_1, t_2]\subset[a, b]$, а функция $u\in\widetilde{C}^1([t_1, t_2])$, наряду с (3.5), удовлетворяет условиям

$$u''(t)\operatorname{sign} u'(t) \geqslant -h_0(t) - \left[\frac{\lambda}{t-a} + \frac{\mu}{b-t} + h_1(t)\right]|u'(t)| - \\ - h_2|u'(t)|^2 \quad \text{при } t_1 < t < t_2 \tag{3.18}$$

и

$$u'(t_2) = 0 \tag{3.19}$$

Доказательство. Положим

$$l = \exp\left(\int_a^b h_1(\tau)\,d\tau + 2h_2r_0\right)$$

и

$$r^*(t) = l\,(b-t)^{\mu}(t-a)^{-\lambda}\int_t^b (b-\tau)^{-\mu}(\tau-a)^{\lambda}h_0(\tau)\,d\tau.$$

Ввиду суммируемости h_0 с весом $(t-a)(b-t)^{-\mu}$, ясно, что $r^*\in C(]a, b[)\cap L([a, b])$.

Пусть t — произвольная точка из интервала $]t_1, t_2[$, в которой u' отлична от нуля. Тогда, ввиду (3.19), найдется точка $t^*\in]t_1, t_2]$ такая, что

$$u'(s)\neq 0 \text{ при } t\leqslant s<t^*,\quad u'(t^*)=0. \qquad (3.20)$$

Поэтому из (3.18) имеем

$$|u'(s)|'\geqslant -h_0(s)-g(s)\,|u'(s)| \quad \text{при } t<s<t^*$$

и

$$|u'(t)|\leqslant \int\limits_t^{t^*} \exp\left(\int\limits_t^{\tau} g(s)\,ds\right) h_0(\tau)\,d\tau, \qquad (3.21)$$

где

$$g(s)=\frac{\lambda}{s-a}+\frac{\mu}{b-s}+h_1(s)+h_2\,|u'(s)|.$$

Однако, согласно (3.5) и (3.20),

$$\int\limits_t^{\tau} g(s)\,ds=\lambda\ln\frac{\tau-a}{t-a}+\mu\ln\frac{b-t}{b-\tau}+\int\limits_t^{\tau} h_1(s)\,ds+$$
$$+h_2\,|u(\tau)-u(t)|\leqslant\lambda\ln\frac{\tau-a}{t-a}+\mu\ln\frac{b-t}{b-\tau}+\ln l,$$

в силу чего из (3.21) получаем $|u'(t)|\leqslant r^*(t)$. Лемма доказана.

Аналогично доказывается

Лемма 3.5. Пусть $\lambda\in[0,1[$, $r_0\geqslant 0$, $r\geqslant 0$, $h_2\geqslant 0$ — постоянные, а $h_0\in L_{\mathrm{loc}}(]a,b])$ и $h_1\in L([a,b])$ — неотрицательные функции, причем h_0 суммируема с весом $t-a$. Тогда найдется такая неотрицательная функция $r^*\in C(]a,b])\cap L([a,b])$, что имеет место оценка (3.17), если только $[t_1,t_2]\subset[a,b]$, а функция $u\in\tilde{C}^1([t_1,t_2])$, наряду с (3.5), удовлетворяет условиям

$$u''(t)\eta_r(u'(t))\geqslant -h_0(t)-\left[\frac{\lambda}{t-a}+h_1(t)\right]|u'(t)|-h_2\,|u'(t)|^2$$
$$\text{при } t_1<t<t_2$$

и

$$|u'(t_2)|\leqslant r.$$

Из лемм 3.3 и 3.5 вытекает

Лемма 3.6. Пусть $a<\alpha<a_0<b_0<\beta<b$, $\lambda\in[0,b-a[$, $r_0\geqslant 0$, $r\geqslant 0$, $h_2\geqslant 0$ — постоянные, а $h_0\in L]_{\mathrm{oc}}(]a,b[)$, $h_1\in L([a,b])$ — неотрицательные функции, причем h_0 суммируема с весом $(t-a)\times\times(b-t)$. Тогда найдется такая неотрицательная функция $r^*\in C(]a,b[)\cap L([a,b])$, что имеет место оценка (3.17), если только $t_1\in]a,\alpha]$, $t_2\in[\beta,b[$, а функция $u\in\tilde{C}^1([t_1,t_2])$, наряду с (3.5), удовлетворяет условиям

$$u''(t)\,\eta_r(u'(t))\,\mathrm{sign}\,(t-a_0)\leqslant$$
$$\leqslant h_0(t)+\left[\frac{\lambda}{(t-a)(b-t)}+h_1(t)\right]|u'(t)|+h_2\,|u'(t)|^2$$
$$\text{при } t\in]t_1,a_0[\,\cup\,]b_0,t_2[$$

и

$$u''(t)\,\eta_r(|u'(t)|)\,\mathrm{sign}\,u(t)\geqslant$$
$$\geqslant -h_0(t)-\left[\frac{\lambda}{(t-a)(b-t)}+h_1(t)\right]|u'(t)|-h_2|u'(t)|^2$$
$$\text{при } \alpha<t<\beta.$$

3.2. Нижние и верхние функции. Лемма Скорца—Драгони. При исследовании краевых задач вида (3.1), (3.2_i) $(i=1,2)$ довольно удобными оказались понятия нижней и верхней функций, введенные Нагумо [88] и нашедшие дальнейшее развитие в работах [14, 30, 75]. Приводимые ниже определения взяты из [14].

Определение 3.2. $s:\,]a,b[\to\mathbf{R}$ называется нижней (верхней) функцией уравнения (3.1), если 1) s локально абсолютно непрерывна[1], причем s' допускает представление $s'(t)=\alpha(t)+\sigma(t)$, где $\alpha:\,]a,b[\to\mathbf{R}$ локально абсолютно непрерывна, а $\sigma:\,]a,b[\to\mathbf{R}$ — неубывающая (невозрастающая) функция, производная которой почти всюду равна нулю; 2) почти всюду на $]a,b[$ соблюдается неравенство

$$f(t,s(t),s'(t))\leqslant s''(t)\quad (f(t,s(t),s'(t))\geqslant s''(t)).$$

Определение 3.3. Пусть $i\in\{1,2\}$, а s является нижней (верхней) функцией уравнения (3.1), имеющей конечные пределы $s(a+)$ и $s^{(i-1)}(b-)$, причем

$$s(a+)\leqslant c_1,\ s^{(i-1)}(b-)\leqslant c_2\quad (s(a+)\geqslant c_1,\ s^{(i-1)}(b-)\geqslant c_2).$$

Тогда s называется нижней (верхней) функцией задачи (3.1), (3.2_i)

Имеет место следующая лемма, представляющая собой простую модификацию теоремы Скорца—Драгони (см. [51], стр. 110).

Лемма 3.7. Пусть $i\in\{1,2\}$ и существуют нижняя s_1 и верхняя s_2 функции задачи (3.1), (3.2_i) такие, что

$$s_1(t)\leqslant s_2(t)\ \text{ при } a<t<b \tag{3.22}$$

и

$$|f(t,x,y)|\leqslant f^*(t)\ \text{ при } a<t<b,\ s_1(t)\leqslant x\leqslant s_2(t),\ y\in\mathbf{R}, \tag{3.23}$$

где $f^*\in L([a,b])$. Тогда задача (3.1), (3.2_i) имеет решение u, удовлетворяющее условию

$$s_1(t)\leqslant u(t)\leqslant s_2(t)\ \text{ при } a<t<b. \tag{3.24}$$

Доказательство. Положим

$$w(t,\rho)=\sup\Big\{|f(t,x,y)-f(t,x,z)|:|x|+|y|\leqslant$$
$$\leqslant 1+\sum_{j,k=1}^{2}|s_k^{(j-1)}(t)|,\quad |y-z|\leqslant\rho\Big\}\ \text{ при } a<t<b,\ 0\leqslant\rho\leqslant 1.$$

[1] Т. е. абсолютно непрерывна на каждом сегменте из $]a,b[$.

Ясно, что $w:]a, b[\times[0,1]\to\mathbf{R}_+$ удовлетворяет условиям Каратеодори, не убывает по второму аргументу, $w(t,0)\equiv 0$ и

$$|f(t, s_j(t), s_j'(t))-f(t, s_j(t), y)|\leqslant w(t, |y-s_j'(t)|) \tag{3.25}$$
$$\text{при } a<t<b, \ |y-s_j'(t)|\leqslant 1 \ (j=1,2).$$

Построим функцию $\tilde f:]a, b[\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, положив

$$\tilde f(t, x, y)=\begin{cases} f(t, s_2(t), y)+w\left(t, \dfrac{x-s_2(t)}{x-s_2(t)+1}\right) \text{ при } x>s_2(t), \\ f(t, x, y) \quad \text{при } s_1(t)\leqslant x\leqslant s_2(t), \\ f(t, s_1(t), y)-w\left(t, \dfrac{s_1(t)-x}{s_1(t)-x+1}\right) \text{ при } x<s_1(t). \end{cases} \tag{3.26}$$

В силу неравенства (3.23) и суммируемости функции f^*, ясно, что $\tilde f$ измерима по первому аргументу, непрерывна по второму и третьему и

$$\sup\{|\tilde f(\cdot, x, y)|: x, y\in\mathbf{R}\}\in L([a, b]).$$

Таким образом, сделав в уравнении

$$u''=\tilde f(t, u, u') \tag{3.27}$$

замену переменной, приводящую краевые условия (3.2_i) к однородным, и применив лемму 2.1, убеждаемся, что задача (3.27), (3.2_i) имеет решение u.

Для завершения доказательства леммы остается показать, что u удовлетворяет условию (3.24).

Согласно определению 3.2, для каждого $k\in\{1,2\}$ имеем

$$s_k'(t)=\alpha_k(t)+(-1)^{k-1}\sigma_k(t),$$

где $\alpha_k:]a, b[\to\mathbf{R}$ локально абсолютно непрерывна, а $\sigma_k:]a, b[\to\mathbf{R}$ — неубывающая функция, производная которой почти всюду равна нулю.

Пусть

$$z_k(t)=(-1)^k[u(t)-s_k(t)].$$

Тогда

$$z_k(a+)\leqslant 0 \ (k=1, 2), \tag{3.28}$$
$$z_k^{(i-1)}(b-)\leqslant 0 \ (k=1, 2) \tag{3.29}$$

и

$$z_k'(t)=\zeta_k(t)+\sigma_k(t) \ (k=1, 2), \tag{3.30}$$

где $\zeta_k(t)=(-1)^k[u'(t)-\alpha_k(t)]$.

Предположим теперь, что нарушается условие (3.24). Тогда, ввиду (3.28), существуют $j\in\{1,2\}$ и $t_1\in]a, b[$ такие, что

$$z_j(t_1)>0, \ z_j'(t_1)>0, \tag{3.31}$$

причем σ_j непрерывна в точке t_1.

Так как σ_j не убывает, а ζ_j непрерывна, условия (3.29)—(3.31) гарантируют существование такой точки $t_2 \in]t_1, b]$, что

$$z_j(t) > 0,\ z_j'(t) > 0 \text{ при } t_1 \leqslant t < t_2$$

и

$$z_j'(t_2-) = 0. \tag{3.32}$$

Не ограничивая общности, можем считать, что

$$0 < z_j'(t) < \frac{z_j(t)}{1 + z_j(t)} \text{ при } t_1 < t < t_2.$$

Тогда, согласно (3.25) и (3.26),

$$\zeta_j'(t) = (-1)^j [u''(t) - s_j''(t)] = (-1)^j [f(t, s_j(t), u'(t)) - s_j''(t)] +$$
$$+ w\left(t, \frac{z_j(t)}{1 + z_j(t)}\right) \geqslant (-1)^j [f(t, s_j(t), s_j'(t)) - s_j''(t)] -$$
$$- w(t, z_j'(t)) + w(t, z_j'(t)) \geqslant 0 \text{ при } t_1 < t < t_2.$$

Следовательно, ζ_j не убывает на $[t_1, t_2[$. Поэтому из (3.30) заключаем, что z_j' также не убывает на упомянутом промежутке и

$$z_j'(t_2-) \geqslant z_j'(t_1) > 0.$$

Но это противоречит равенству (3.32). Лемма доказана.

3.3. Теоремы существования.

Теорема 3.1_1. Пусть s_1 и s_2 — нижняя и верхняя функции задачи (3.1), (3.2_1), удовлетворяющие неравенству (3.22). Пусть, кроме того,

$$f(t, x, y) \operatorname{sign}[(t - a_0) y] \leqslant \omega(y) [h(t) + |y|]$$
$$\text{при } t \in]a, a_0[\cup]b_0, b[,\ s_1(t) \leqslant x \leqslant s_2(t),\ |y| > r \tag{3.33}$$

и

$$f(t, x, y) \operatorname{sign} x \geqslant -\omega(y) [h(t) + |y|]$$
$$\text{при } \alpha < t < \beta,\ s_1(t) \leqslant x \leqslant s_2(t),\ |y| > r, \tag{3.34}$$

где $r \in \mathbf{R}_+$, $a < \alpha < a_0 < b_0 < \beta < b$, $h : [a, b] \to \mathbf{R}_+$ — суммируемая функция, а ω — функция Нагумо. Тогда задача (3.1), (3.2_1) имеет решение, удовлетворяющее условию (3.24).

Доказательство. Положим

$$r_0 = \sup\{|s_1(t)| + |s_2(t)| : a < t < b\}. \tag{3.35}$$

Очевидно, не нарушая общности, можно считать, что

$$r \geqslant \max\left\{\frac{2r_0}{a_0 - \alpha},\ \frac{2r_0}{\beta - b_0}\right\}. \tag{3.36}$$

Обозначим через r^* постоянную, для которой справедливо заключение леммы 3.3, и рассмотрим уравнение

$$u'' = \chi(t, u') f(t, u, u'), \tag{3.37}$$

где

$$\chi(t, y)=\begin{cases}1 \text{ при } |y|\leqslant\rho(t),\\ 2-\frac{|y|}{\rho(t)} \text{ при } \rho(t)<|y|<2\rho(t),\\ 0 \text{ при } |y|\geqslant 2\rho(t),\end{cases}$$

а

$$\rho(t)=r^*+|s_1'(t)|+|s_2'(t)|.$$

Пусть

$t_{1n}\in]a, \alpha[$, $t_{2n}\in]\beta, b[$ и $c_{jn}\in[s_1(t_{jn}), s_2(t_{jn})]$ $(j=1, 2;\ n=1, 2, \ldots)$, причем

$$t_{1n}\to a,\ t_{2n}\to b,\ c_{jn}\to c_j \text{ при } n\to+\infty\ (j=1,2).$$

По лемме 3.7, для любого натурального n уравнение (3.37) имеет решение u_n такое, что

$$u_n(t_{jn})=c_{jn}\,(j=1,2),\quad s_1(t)\leqslant u_n(t)\leqslant s_2(t) \text{ при } t_{1n}\leqslant t\leqslant t_{2n}. \tag{3.38}$$

Ввиду (3.33)—(3.35) и (3.38), при любом натуральном n функция $u(t)\equiv u_n(t)$ удовлетворяет неравенствам (3.5), (3.14) и (3.15), где $t_1=t_{1n}$, $t_2=t_{2n}$. Поэтому, в силу выбора постоянной r^*,

$$|u_n'(t)|\leqslant r^* \text{ при } t_{1n}\leqslant t\leqslant t_{2n}\,(n=1,2, \ldots) \tag{3.39}$$

и, следовательно, каждая u_n является решением уравнения (3.1) на сегменте $[t_{1n}, t_{2n}]$. С другой стороны,

$$\begin{gathered}|u_n(t)-c_{1n}|\leqslant r^*(t-a),\ |u_n(t)-c_{2n}|\leqslant r^*(b-t)\\ \text{при } t_{1n}\leqslant t\leqslant t_{2n}\ (n=1,2, \ldots).\end{gathered} \tag{3.40}$$

Согласно лемме 2.2, неравенства (3.39) и (3.40) гарантируют существование подпоследовательности $(u_{n_m})_{m=1}^{+\infty}$, равномерно сходящейся вместе с $(u_{n_m}')_{m=1}^{+\infty}$ на каждом сегменте, содержащемся в $]a, b[$, предел которой

$$u(t)=\lim_{m\to+\infty} u_{n_m}(t)$$

является решением уравнения (3.1) на $]a, b[$. Ввиду (3.38) и (3.40), ясно, что u удовлетворяет условиям (3.2_1) и (3.24). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Легко видеть, что утверждение теоремы 3.1_1 справедливо и в том случае, когда вместо (3.34) выполнено неравенство

$$\begin{gathered}f(t, x, y)\operatorname{sign}[(t-t_0)y]\geqslant-\omega(y)[h(t)+|y|]\\ \text{при } \alpha<t<\beta,\ s_1(t)\leqslant x\leqslant s_2(t),\ |y|>r,\end{gathered}$$

где t_0 — некоторая точка из сегмента $[\alpha, \beta]$.

Теорема 3.1$_2$. Пусть s_1 и s_2 — нижняя и верхняя функции задачи (3.1), (3.2$_2$), удовлетворяющие неравенству (3.22). Пусть, кроме того, $f\in K_{loc}(]a, b]\times\mathbf{R}^2)$ и

$$f(t, x, y)\operatorname{sign} y\geqslant -\omega(y)[h(t)+|y|]$$
$$\text{при } a<t<b,\ s_1(t)\leqslant x\leqslant s_2(t),\ |y|>r,$$

где $r\in\mathbf{R}_+$, $h:[a, b]\to\mathbf{R}_+$ — суммируемая функция, а ω — функция Нагумо. Тогда задача (3.1), (3.2$_2$) имеет решение, удовлетворяющее условию (3.24).

Теорема 3.2$_1$. Пусть s_1 и s_2 — нижняя и верхняя функции задачи (3.1), (3.2$_1$), удовлетворяющие неравенству (3.22). Пусть, кроме того,

$$f(t, x, y)\operatorname{sign}[(t-a_0)y]\leqslant h_0(t)+\left[\frac{\lambda}{(t-a)(b-t)}+h_1(t)\right]|y|+h_2y^2$$
$$\text{при } t\in]a, a_0[\cup]b_0, b[,\quad s_2(t)\leqslant x\leqslant s_2(t),\quad |y|>r$$

и

$$f(t, x, y)\operatorname{sign} x\geqslant -h_0(t)-\left[\frac{\lambda}{(t-a)(b-t)}+h_1(t)\right]|y|-h_2y^2$$
$$\text{при } \alpha<t<\beta,\quad s_1(t)\leqslant x\leqslant s_2(t),\quad |y|>r,$$

где $a<\alpha<a_0<b_0<\beta<b$, $\lambda\in[0, b-a[$, $r\geqslant0$, $h_2\geqslant0$, а $h_0\in L_{loc}(]a, b[)$ и $h_1\in L([a, b])$ — неотрицательные функции, причем h_0 суммируема с весом $(t-a)(b-t)$. Тогда задача (3.1), (3.2$_1$) имеет решение, удовлетворяющее условию (3.24).

Теорема 3.2$_2$. Пусть s_1 и s_2 — нижняя и верхняя функции задачи (3.1), (3.2$_2$), удовлетворяющие неравенству (3.22). Пусть, кроме того, $f\in K_{loc}(]a, b]\times\mathbf{R}^2)$ и

$$f(t, x, y)\operatorname{sign} y\geqslant -h_0(t)-\left[\frac{\lambda}{t-a}+h_1(t)\right]|y|-h_2y^2$$
$$\text{при } a<t<b,\quad s_1(t)\leqslant x\leqslant s_2(t),\quad |y|>r,$$

где $\lambda\in[0,1[$, $r\geqslant0$, $h_2\geqslant0$, а $h_0\in L_{loc}(]a, b])$ и $h_1\in L([a, b])$ — неотрицательные функции, причем h_0 суммируема с весом $t-a$. Тогда задача (3.1), (3.2$_2$) имеет решение, удовлетворяющее условию (3.24).

Сформулированные теоремы доказываются аналогично теореме 3.1$_1$. Разница состоит лишь в том, что вместо леммы 3.3 соответственно применяются леммы 3.1, 3.6 и 3.5.

Теорема 3.3. Пусть s_1 и s_2 — нижняя и верхняя функции задачи (3.1), (3.2$_i$), удовлетворяющие неравенству (3.22), причем либо $i=1$ и $c_1=c_2=0$, либо $i=2$, $c_1=0$ и $f\in K_{loc}(]a, b]\times\mathbf{R}^2)$. Пусть, кроме того,

$$\begin{gathered}f(t, x, y)\operatorname{sign} x\geqslant -\omega(y)[h(t)+|y|]\\ \text{при } a<t<b,\ s_1(t)\leqslant x\leqslant s_2(t),\ |y|\geqslant r,\end{gathered}\tag{3.41}$$

где $r \in \mathbf{R}_+$, $h :]a, b[\to \mathbf{R}_+$ — суммируемая функция, а ω — функция Нагумо. Тогда задача (3.1), (3.2_i) имеет решение, удовлетворяющее условию (3.24).

Доказательство проведем для случая $i=1$.

Пусть r_0 — число, заданное равенством (3.35), а $r^*>0$ — постоянная, фигурирующая в лемме 3.2. В силу определения 3.3, существуют последовательности $(t_{kn})_{n=1}^{+\infty}$ $(k=1, 2)$ такие, что

$$a<t_{1n}<t_{2n}<b \quad (n=1, 2, \ldots), \quad \lim_{n\to+\infty} t_{1n}=a, \quad \lim_{n\to+\infty} t_{2n}=b$$

и для любого $j \in \{1, 2\}$ выполняется одно из следующих трех условий:

1. $s_1(t_{jn}) \leqslant 0 \leqslant s_2(t_{jn})$ $(n=1, 2, \ldots)$;
2. $s_1(t_{jn})>0$, $(-1)^{j-1}s_1'(t_{jn})>0$ $(n=1, 2, \ldots)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_1(t_{jn})=0$;
3. $s_2(t_{jn})<0$, $(-1)^{j-1}s_2'(t_{jn})<0$ $(n=1, 2, \ldots)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_2(t_{jn})=0$.

Пусть

$$c_{jn}=\begin{cases} 0 \text{ в случае } 1, \\ s_1(t_{jn}) \text{ в случае } 2 \ (j=1, 2;\ n=1, 2, \ldots), \\ s_2(t_{jn}) \text{ в случае } 3. \end{cases}$$

По лемме 3.7, для любого натурального n уравнение (3.37), где χ и ρ — такие же, как при доказательстве теоремы 3.1_1, имеет решение u_n, удовлетворяющее условиям (3.38). Очевидно, что

$$u_n(t_{1n})\,u_n'(t_{1n}) \geqslant 0, \quad u_n(t_{2n})\,u_n'(t_{2n}) \leqslant 0 \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{3.42}$$

В силу (3.35), (3.38), (3.41) и (3.42), при любом натуральном n функция $u(t) \equiv u_n(t)$ удовлетворяет неравенствам (3.5), (3.10) и (3.11). Поэтому, ввиду выбора постоянной r^*, справедливы оценки (3.39). Остается лишь дословно повторить конец доказательства теоремы 3.1_1.

Теорема 3.4. Пусть $c_2=0$, а s_1 и s_2 — нижняя и верхняя функции задачи (3.1), (3.2_2), удовлетворяющие неравенству (3.22), причем для некоторой сходящейся к b последовательности $b_n \in]a, b[$ $(n=1,2,\cdots)$ имеем

$$s_1'(b_n-) \leqslant 0 \leqslant s_2'(b_n-) \quad (n=1,2,\cdots). \tag{3.43}$$

Пусть, кроме того,

$$f(t, x, y)\operatorname{sign} y \geqslant -h_0(t) - \left[\frac{\lambda}{t-a} + \frac{\mu}{b-t} + h_1(t)\right]|y| - h_2 y^2$$
$$\text{при } a<t<b, \quad s_1(t) \leqslant x \leqslant s_2(t), \quad y \in \mathbf{R}, \tag{3.44}$$

где $\lambda \in [0, 1[$, $\mu \geqslant 0$, $h_2 \geqslant 0$, а $h_0 \in L_{\mathrm{loc}}(]a, b[)$ и $h_1 \in L([a, b])$ — неотрицательные функции, причем h_0 суммируема с весом $(t-a)(b-t)^{-\mu}$. Тогда уравнение (3.1) имеет решение, удовлетворяющее условиям (3.24) и

$$u(a+)=c_1, \lim_{t\to b}(b-t)^{-\mu}u'(t)=0. \tag{3.45}$$

Доказательство. Согласно условиям (3.43), (3.44) и теореме 3.2_2, при любом натуральном n уравнение (3.1) имеет решение $u_n:]a, b_n] \to \mathbf{R}$ такое, что

$$u_n(a+)=c_1,\ u_n'(b_n)=0, \quad s_1(t)\leqslant u_n(t)\leqslant s_2(t) \text{ при } a<t\leqslant b_n \tag{3.46}$$

и

$$u_n''(t)\operatorname{sign} u_n'(t) \geqslant -h_0(t)-\left[\frac{\lambda}{t-a}+\frac{\mu}{b-t}+h_1(t)\right]|u_n'(t)|-$$
$$-h_2|u_n'(t)|^2 \text{ при } a<t\leqslant b_n.$$

В силу леммы 3.4,

$$|u_n'(t)|\leqslant r^*(t) \text{ при } a<t\leqslant b_n, \tag{3.47}$$

где $r^* \in C(]a, b]) \cap L([a, b])$ — не зависящая от n функция, причем $\lim\limits_{t\to b}(b-t)^{-\mu}r^*(t)=0$.

Согласно лемме 2.2, из (3.46) и (3.47) следует существование решения $u:]a, b[\to \mathbf{R}$, удовлетворяющего, наряду с (3.24), неравенствам

$$|u'(t)|\leqslant r^*(t), \quad |u(t)-c_1|\leqslant \int_a^t r^*(\tau)\,d\tau \text{ при } a<t<b.$$

Отсюда ясно, что u удовлетворяет и условиям (3.45). Теорема доказана.

Этим же методом можно доказать справедливость утверждения теоремы 3.1_2 в случае, когда $f \notin K_{\mathrm{loc}}(]a, b] \times \mathbf{R}^2)$, но $c_2=r=0$ и для некоторой сходящейся к b последовательности $(b_n)_{n=1}^{+\infty} \subset]a, b[$ соблюдаются неравенства (3.43).

Заметим, что сингулярная задача (3.1), (3.2_1) изучалась и в случае, когда правая часть уравнения (3.1) разрывна по фазовым переменным [62]. Признаки разрешимости в обобщенном смысле задачи (3.1), (3.2_2) установлены Я. В. Цепитисом [57]. Результаты, аналогичные приведенным в этом параграфе, для трехточечных задач получены А. Г. Ломтатидзе [38]. Здесь же уместно упомянуть работы Н. И. Васильева и А. И. Ломакиной [5], Г. Д. Гаприндашвили [6], И. Т. Кигурадзе [19] и А. Я. Лепина [29], посвященные сингулярным краевым задачам для дифференциальных уравнений высших порядков и систем дифференциальных уравнений второго порядка.

3.4. Теоремы единственности.

Теорема 3.5_1. Пусть функция f не убывает по второму аргументу и для любого $r \in \mathbf{R}_+$ удовлетворяет условию

$$[f(t, x, y_1)-f(t, x, y_2)]\operatorname{sign}(y_1-y_2)\geqslant -l_r(t)|y_1-y_2|$$
$$\text{при } a<t<b,\ |x|\leqslant r,\ |y_j|\leqslant r\ (j=1,2), \tag{3.48}$$

где $l_r \in L_{\mathrm{loc}}(]a, b[)$. Тогда задача (3.1), (3.2_1) имеет не более одного решения.

Доказательство. Допустим, что (3.1), (3.2_1) имеет два различных решения u_1 и u_2. Тогда, не нарушая общности, можем считать, что функция $u(t)=u_1(t)-u_2(t)$ положительна в некоторой точке интервала $]a, b[$. Поскольку $u(a+)=u(b-)=0$, найдутся $t_1\in]a, b[$ и $t_2\in]t_1, b[$ такие, что

$$u(t_1)>0,\ u'(t)>0 \text{ при } t_1\leqslant t<t_2$$

и

$$u'(t_2)=0. \tag{3.49}$$

Так как f не убывает по второму аргументу, из (3.48) имеем

$$u''(t)=f(t, u_1(t), u_1'(t))-f(t, u_2(t), u_1'(t))+$$
$$+f(t, u_2(t), u_1'(t))-f(t, u_2(t), u_2'(t))\geqslant -l_r(t)u'(t)$$
$$\text{при } t_1<t<t_2,$$

где

$$r=\max\left\{\sum_{j=1}^{2}(|u_j(t)|+|u_j'(t)|):\ t_1\leqslant t\leqslant t_2\right\}.$$

Значит,

$$u'(t_2)\geqslant u'(t_1)\exp\left(-\int_{t_1}^{t_2} l_r(\tau)\,d\tau\right)>0,$$

что противоречит условию (3.49). Теорема доказана.

Аналогично доказываются и следующие предложения.

Теорема 3.5_2. Пусть функция f не убывает по второму аргументу и для любого $r\in\mathbf{R}_+$ удовлетворяет условию (3.48), где $l_r\in L_{\mathrm{loc}}(]a, b[)$ и

$$\limsup_{t\to b}\int_{t_0}^{t} l_r(\tau)\,d\tau<+\infty \text{ при } a<t_0<b.$$

Тогда задача (3.1), (3.2_2) имеет не более одного решения.

Теорема 3.6. Пусть $\mu\in\mathbf{R}_+$, а функция f не убывает по второму аргументу и для любого $r\in\mathbf{R}_+$ удовлетворяет условию (3.48), где $l_r\in L_{\mathrm{loc}}(]a, b[)$ и

$$\liminf_{t\to b}(b-t)^{-\mu}\exp\left(-\int_{t_0}^{t} l_r(\tau)\,d\tau\right)>0 \text{ при } a<t_0<b.$$

Тогда задача (3.1), (3.45) имеет не более одного решения.

§ 4. УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНОСТЯМИ ОТНОСИТЕЛЬНО ФАЗОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В этом параграфе рассматривается вопрос о существовании и единственности решения дифференциального уравнения

$$u''=f(t, u, u'), \tag{4.1}$$

удовлетворяющего условиям

$$u(a+)=0,\ u^{(i-1)}(b-)=0,\ u(t)>0 \text{ при } a<t<b, \qquad (4.2_i)$$

где $i\in\{1,2\}$. Всюду в дальнейшем предполагается, что

$$f\in K_{\mathrm{loc}}(]a,b[\times]0,+\infty[\times\mathbf{R})$$

и

$$f(t,x,y)\leqslant 0 \text{ при } a<t<b,\ x>0,\ y\in\mathbf{R}, \qquad (4.3)$$

при этом допускается возможность наличия у f особенностей как по независимой (в точках a и b), так и по первой фазовой переменной (в точке 0).

Типичным представителем рассматриваемого в этом параграфе класса уравнений является уравнение Эмдена—Фаулера

$$u''=h(t)\,u^{-\lambda}, \qquad (4.4)$$

где $\lambda>0$, а $h\in L_{\mathrm{loc}}(]a,b[)$ — неположительная функция. Частными случаями (4.4) служат упомянутые во введении уравнения

$$u''=-\frac{t^2}{32u^2} \qquad (4.5)$$

и

$$u''=-\frac{1-t}{u}. \qquad (4.6)$$

4.1. Осцилляционные леммы. В этом пункте приводятся необходимые для дальнейшего изложения утверждения об осцилляционных свойствах уравнения

$$v''=g(t)\,v, \qquad (4.7)$$

где функция $g:]a,b[\to\mathbf{R}_-$ суммируема либо с весом $(t-a)(b-t)$, либо с весом $t-a$.

Через v_g обозначим решение уравнения (4.7), удовлетворяющее начальным условиям

$$v(a+)=0,\ v'(a+)=1.$$

За значения v_g и v_g' в точке b будем принимать их левые пределы.

Из лемм 1.5_1 и 1.5_2 непосредственно следует

Лемма 4.1. Пусть $i\in\{1,2\}$ и

$$\int_a^b (t-a)(b-t)^{2-i}\,|g(t)|\,dt\leqslant(b-a)^{2-i}.$$

Тогда $v_g^{(i-1)}$ не имеет нулей на $]a,b]$.

Интегральные признаки наличия у v_g и v_g' хотя бы одного нуля на $]a,b]$ установлены Н. Л. Коршиковой [24, 25] и А. Г. Ломтатидзе [36]. Приведем две леммы из [36].

Лемма 4.2_1. Пусть $g:]a,b[\to R_-$ суммируема с весом $(t-a)(b-t)$ и

$$\frac{1}{t-a}\int_a^t (\tau-a)^2(b-\tau)\,|g(\tau)|\,d\tau+\frac{1}{b-t}\int_t^b (\tau-a)(b-\tau)^2|g(\tau)|\,d\tau\geqslant b-a$$

$$\text{при } a<t<b. \tag{4.8}$$

Тогда v_g имеет хотя бы один нуль на $]a, b]$.

Доказательство. Допустим противное — что

$$v_g(t)>0 \text{ при } a<t\leqslant b.$$

Тогда, согласно теореме 1.1 и неположительности функции g, имеем

$$v_g(t)=\delta(b-a)(t-a)+$$

$$+\frac{b-t}{b-a}\int_a^t (\tau-a)\,|g(\tau)|\,v_g(\tau)\,d\tau+\frac{t-a}{b-a}\int_t^b (b-\tau)\,|g(\tau)|\,v_g(\tau)\,d\tau,$$

где $\delta=v_g(b)(b-a)^{-2}>0$. Полагая

$$r=\inf\left\{\frac{v_g(t)}{(t-a)\ (b-t)}:a<t<b\right\}$$

и учитывая условие (4.8), из последнего неравенства находим $r\geqslant\delta+r$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Аналогично доказывается

Лемма 4.2$_2$. Пусть $g:\,]a,b[\to R_-$ суммируема с весом $t-a$ и

$$\int_a^b (\tau-a)^2\,|g(\tau)|\,d\tau\geqslant b-a. \tag{4.9}$$

Тогда v'_g имеет хотя бы один нуль на $]a, b]$.

4.2. Теоремы существования и единственности.

Теорема 4.1$_1$. Пусть для любого $\delta\in]0, 1[$ найдутся суммируемые функции $l_{j\delta}:[a, b]\to R_+$ $(j=0, 1)$ и постоянные $\mu_\delta\in[0, b-a[$, $l_{2\delta}\geqslant 0$ и $r_\delta\geqslant 0$ такие, что

$$|f(t, x, y)|\leqslant\frac{l_{0\delta}(t)}{(t-a)(b-t)}+\left[\frac{\mu_\delta}{(t-a)(b-t)}+l_{1\delta}(t)\right]|y|+l_{2\delta}y^2 \tag{4.10}$$

$$\text{при } a<t<b,\ \delta\leqslant x\leqslant\frac{1}{\delta},\ |y|>r_\delta.$$

Пусть, далее, для некоторого $\delta_0\in]0, 1[$ выполнены неравенства

$$f(t, x, y)\leqslant g(t)\,x \text{ при } a<t<b,\ 0<x<\delta_0,\ y\in R \tag{4.11}$$

и

$$f(t, x, y)\geqslant h(t)\,x \text{ при } a<t<b,\ x>\frac{1}{\delta_0},\ y\in R, \tag{4.12}$$

где g и $h:\,]a, b[\to R_-$ суммируемы с весом $(t-a)\cdot(b-t)$, причем v_g имеет хотя бы один нуль на $]a, b]$, а v_h не имеет нулей на $]a, b]$. Тогда задача (4.1), (4.2$_1$) разрешима.

Доказательство. В силу теоремы 1.1, уравнение

$$v''=h(t)v$$

имеет решение v такое, что

$$v(a+)=v(b-)=\frac{1}{\delta_0},\ v(t)>\frac{1}{\delta_0} \text{ при } a<t<b.$$

Ввиду (4.12), очевидно, что v является верхней функцией уравнения (4.1).

Согласно лемме 4.1, при любом достаточно малом $\varepsilon>0$ имеем

$$v_{\varepsilon g}(t)>0 \text{ при } a<t\leqslant b.$$

Обозначим точную верхнюю грань множества таких ε через ε_0. Поскольку v_g имеет хотя бы один нуль на $]a,b]$, ясно, что $\varepsilon \in]0,1]$ и

$$v_{\varepsilon_0 g}(t)>0 \text{ при } a<t<b,\quad v_{\varepsilon_0 g}(b-)=0.$$

Подберем положительное число c_0 таким образом, чтобы

$$w(t)=c_0 v_{\varepsilon_0 g}(t)<\delta_0 \text{ при } a<t\leqslant b.$$

Тогда, ввиду (4.11), w будет нижней функцией уравнения (4.1). С другой стороны, поскольку

$$w(a+)=w(b-)=0,\quad w(t)>0,\quad w''(t)\leqslant 0 \text{ при } a<t<b,$$

найдется такая точка $t_0 \in]a,b[$, что

$$w'(t)\geqslant 0 \text{ при } a<t\leqslant t_0,\ w'(t)\leqslant 0 \text{ при } t_0\leqslant t<b. \tag{4.13}$$

Пусть

$$\gamma=\frac{1}{2}\min\{t_0-a,\ b-t_0\},$$

$$t_{1n}=a+\frac{\gamma}{n},\quad t_{2n}=b-\frac{\gamma}{n}$$

и

$$w_n(t)=\begin{cases} w(t_{1n}) \text{ при } a\leqslant t\leqslant t_{1n}, \\ w(t) \text{ при } t_{1n}<t<t_{2n}\ (n=1,2,\ldots), \\ w(t_{2n}) \text{ при } t_{2n}\leqslant t\leqslant b. \end{cases}$$

С учетом неравенств (4.3) и (4.13) легко заключим, что для каждого натурального n w_n является нижней функцией уравнения (4.1),

$$w(t)\leqslant w_{n+1}(t)\leqslant w_n(t)<v(t) \text{ при } a<t<b\ (n=1,2,\ldots) \tag{4.14}$$

и

$$\lim_{n\to+\infty} w_n(a)=\lim_{n\to+\infty} w_n(b)=0. \tag{4.15}$$

Если $\rho=\sup\{v(t): a<t<b\}$ и $\delta=\min\left\{w_1(a),\ w_1(b),\ \frac{1}{\rho}\right\}$, то, очевидно, на множестве $\{(t,x,y): a<t<b,\ w_1(t)\leqslant x\leqslant v(t),\ |y|>r_\delta\}$ выполнено неравенство (4.10). Поэтому, согласно теореме 3.2_1, уравнение (4.1) имеет решение u_1 такое, что

$$u_1(a+)=w_1(a),\ u_1(b-)=w_1(b),\ w_1(t)\leqslant u_1(t)\leqslant v(t)$$
$$\text{при } a<t<b.$$

Будучи решением уравнения (4.1), u_1 в то же время является его верхней функцией. С другой стороны, ввиду (4.14) $w_2(t)\leqslant u_1(t)$ при $a<t<b$. Вновь применив теорему 3.2$_1$, убедимся в существовании решения u_2 уравнения (4.1) такого, что

$$u_2(a+)=w_2(a),\ u_2(b-)=w_2(b),\ w_2(t)\leqslant u_2(t)\leqslant u_1(t)$$
$$\text{при } a<t<b.$$

Продолжая этот процесс, получим последовательность $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ решений уравнения (4.1) такую, что

$$u_n(a+)=w_n(a),\ u_n(b-)=w_n(b),\ w_n(t)\leqslant u_n(t)\leqslant u_{n-1}(t)$$
$$\text{при } a<t<b\ (n=2,3,\cdots). \tag{4.16}$$

Из (4.14) и (4.16) находим

$$w(t)\leqslant u_n(t)<\rho \text{ при } a<t<b\ (n=1,2,\cdots). \tag{4.17}$$

Пусть $[t_*, t^*]$ — произвольный сегмент, содержащийся в $]a, b[$, и $\delta=\min\left\{w(t_*),\ w(t^*),\ \frac{1}{\rho}\right\}$. Тогда, согласно (4.10) и (4.17), для каждого n будем иметь

$$|u_n''(t)|\,\eta_{r_\delta}(|u_n'(t)|)\leqslant\frac{l_{0\delta}(t)}{(t-a)(b-t)}+\left[\frac{\mu_\delta}{(t-a)(b-t)}+l_{1\delta}(t)\right]|u_n'(t)|+$$
$$+l_{2\delta}|u_u'(t)|^2 \text{ при } t_*<t<t^*.\ ^{1)} \tag{4.18}$$

В силу леммы 3.6, неравенства (4.17) и (4.18) гарантируют равномерную ограниченность $(u_n')_{n=1}^{+\infty}$ на $[t_*, t^*]$. Следовательно, выполнены условия леммы 2.2. Поэтому $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ содержит подпоследовательность $(u_{n_k})_{k=1}^{+\infty}$, равномерно сходящуюся вместе с $(u_{n_k}')_{k=1}^{+\infty}$ на каждом сегменте из $]a, b[$, причем

$$u(t)=\lim_{k\to+\infty} u_{n_k}(t)$$

является решением уравнения (4.1). С другой стороны, ввиду (4.16),

$$u(t)\geqslant w(t)>0 \text{ при } a<t<b$$

и

$$\limsup_{t\to a}|u(t)|\leqslant w_n(a),\quad \limsup_{t\to b}|u(t)|\leqslant w_n(b)\ (n=1, 2, \ldots).$$

Отсюда, согласно (4.15), вытекает, что $u(a+)=u(b-)=0$. Следовательно, u есть решение задачи (4.1), (4.2$_1$). Теорема доказана.

---

1) η_{r_δ} — функция, введенная в § 3.

Аналогично доказывается

Теорема 4.1$_2$. Пусть для любого $\delta\in]0,1[$ найдутся суммируемые функции $l_{j\delta}:[a,b]\to\mathbf{R}_+ (j=0,1)$ и постоянные $\mu_\delta\in]0,1]$, $l_{2\delta}\geqslant 0$ и $r_\delta\geqslant 0$ такие, что

$$|f(t,x,y)|\leqslant\frac{l_{0\delta}(t)}{t-a}+\left[\frac{\mu_\delta}{t-a}+l_{1\delta}(t)\right]|y|+l_{2\delta}y^2$$

$$\text{при } a<t<b,\ \delta\leqslant x\leqslant\frac{1}{\delta},\ |y|>r_\delta.$$

Пусть, далее, для некоторого $\delta_0\in]0,1[$ выполнены неравенства (4.11) и (4.12), где g и $h:]a,b]\to\mathbf{R}_-$ суммируемы с весом $t-a$, причем v_g' имеет хотя бы один нуль на $]a,b]$, а v_h' не имеет нулей на $]a,b]$. Тогда задача (4.1), (4.2$_2$) разрешима.

Аналогично теореме 3.5$_1$ доказываются

Теорема 4.2$_1$. Пусть функция f не убывает по второму аргументу и для любого $r\in]1,+\infty[$ удовлетворяет условию

$$|f(t,x,y_1)-f(t,x,y_2)|\leqslant l_r(t)|y_1-y_2|$$
$$\text{при } a<t<b,\ \frac{1}{r}\leqslant x\leqslant r,\ |y_j|\leqslant r\ (j=1,2), \tag{4.19}$$

где $l_r\in L_{loc}(]a,b[)$. Тогда задача (4.1), (4.2$_1$) имеет не более одного решения.

Теорема 4.2$_2$. Пусть функция f не убывает по второму аргументу и для любого $r\in]1,+\infty[$ удовлетворяет условию (4.19), где $l_r\in L_{loc}(]a,b])$. Тогда задача (4.1), (4.2$_2$) имеет не более одного решения.

В заключение рассмотрим уравнение

$$u''=f(t,u), \tag{4.20}$$

где

$$f\in K_{loc}(]a,b[\times]0,+\infty[),$$

и

$$f(t,x)\leqslant 0 \text{ при } a<t<b,\ x>0. \tag{4.21}$$

Положим

$$f^*_\delta(t)=\max\left\{|f(t,x)|:\delta\leqslant x\leqslant\frac{1}{\delta}\right\} \text{ при } \delta\in]0,1[.$$

Теоремы 4.1$_1$ и 4.1$_2$ для уравнения (4.20) принимают следующий вид.

Следствие 4.1 Пусть $i\in\{1,2\}$,

$$\int_a^b (t-a)(b-t)^{2-i}f^*_\delta(t)\,dt<+\infty \text{ при } \delta\in]0,1[\tag{4.22}$$

и для некоторого $\delta_0\in]0,1[$ выполнены неравенства

$$f(t,x)\leqslant g(t)x \text{ при } a<t<b,\ 0<x<\delta_0 \tag{4.23}$$

и

$$f(t,x)\geqslant h(t)x \text{ при } a<t<b,\ x>\frac{1}{\delta_0}, \tag{4.24}$$

где g и $h:]a, b[\to \mathbf{R}_-$ суммируемы с весом $(t-a)(b-t)^{2-i}$, причем $v_g^{(i-1)}$ имеет хотя бы один нуль на $]a, b]$, а $v_h^{(i-1)}$ не имеет нулей на $]a, b]$. Тогда задача (4.20), (4.2$_i$) разрешима.

Теорема 4.3$_1$. Пусть f не убывает по второму аргументу и для некоторого $x_0 \in]0, 1[$

$$\operatorname{mes}\{t \in]a, b[: f(t, x_0) < 0\} > 0. \tag{4.25}$$

Тогда для однозначной разрешимости задачи (4.20), (4.2$_1$) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_a^b (t-a)(b-t)\,|f(t, x)|\,dt < +\infty \quad \text{при } x > 0. \tag{4.26}$$

Доказательство. Докажем сперва достаточность. Поскольку f неположительна и не убывает по второму аргументу, для любого $\delta \in]0, 1[$ имеем

$$f_\delta^*(t) = |f(t, \delta)|.$$

Поэтому из условия (4.26) вытекает условие (4.22).

Согласно (4.25) и (4.26), найдется такое число $\delta_0 \in]0, x_0[$, что функция $g(t) = \frac{1}{\delta_0} f(t, x_0)$ удовлетворяет условию (4.8), а функция $h(t) = \delta_0 f(t, x_0)$ — условию

$$\int_a^b (t-a)(b-t)\,|h(t)|\,dt < b-a.$$

С другой стороны, ввиду (4.21) и монотонности f по второму аргументу, ясно, что g и h неположительны и выполнены неравенства (4.23) и (4.24). Теперь, в силу лемм 4.1, 4.2$_1$ и следствия 4.1, разрешимость задачи (4.20), (4.2$_1$) становится очевидной. Единственность решения вытекает из теоремы 4.2$_1$.

Перейдем к доказательству необходимости. Пусть задача (4.20), (4.2$_1$) разрешима и u — ее решение. Тогда

$$\liminf_{t \to a} (t-a)|u'(t)| = 0, \quad \liminf_{t \to b} (b-t)|u'(t)| = 0. \tag{4.27}$$

Для произвольно заданного $x > 0$ подберем $a_0, b_0 \in]a, b[$ таким образом, чтобы

$$u(t) < x \quad \text{при} \quad t \in]a, a_0] \cup [b_0, b[.$$

Тогда

$$\int_t^{a_0} (\tau - a)\,|f(\tau, x)|\,d\tau \leqslant \int_t^{a_0} (\tau - a)\,|f(\tau, u(\tau))|\,d\tau =$$

$$= -\int_t^{a_0} (\tau - a)\,u''(\tau)\,d\tau = (t-a)\,u'(t) - u(t) -$$

$$-(a_0 - a)\,u'(a_0) + u(a_0) \quad \text{при} \quad a < t < a_0$$

и

$$\int\limits_{b_0}^{t} (b-\tau)\,|\,f(\tau, x)\,|\,d\tau \leqslant (t-b)\,u'(t)-u(t)+$$
$$+(b-b_0)\,u'(b_0)+u(b_0) \quad \text{при} \quad b_0<t<b.$$

Поэтому, ввиду (4.27), находим

$$\int\limits_{a}^{a_0} (\tau-a)\,|\,f(\tau, x)\,|\,d\tau<+\infty, \quad \int\limits_{b_0}^{b} (b-\tau)\,|\,f(\tau, x)\,|\,d\tau<+\infty.$$

Отсюда, поскольку $f(\cdot, x)\in L_{\mathrm{loc}}(]a, b[)$, вытекает (4.26). Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 4.3$_2$. Пусть f не убывает по второму аргументу, $f(\cdot, x)\in L]_{\mathrm{oc}}(]a, b])$ при $x>0$ и для некоторого $x_0\in]0,1]$ выполнено условие (4.25). Тогда для однозначной разрешимости задачи (4.20), (4.2$_2$) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{a}^{b} (t-a)\,|\,f(t, x)\,|\,dt<+\infty \quad \text{при} \quad x>0.$$

Из теорем 4.3$_1$ и 4.3$_2$ вытекает следующий результат Талиаферро [100].

Следствие 4.2. Пусть $i\in\{1,2\}$, $\lambda>0$, а функция $h\in L_{\mathrm{loc}}(]a, b[)$ неположительна и отлична от нуля на множестве положительной меры. Тогда условие

$$\int\limits_{a}^{b} (t-a)\,(b-t)^{2-i}\,|\,h(t)\,|\,dt<+\infty$$

необходимо и достаточно для однозначной разрешимости задачи (4.4), (4.2$_i$).

Из последнего предложения, в частности, следует однозначная разрешимость задач (4.5), (4.2$_i$) и (4.6), (4.2$_i$) ($i=1,2$) при $a=0$, $b=1$ [45, 70, 71].

Отметим, что задачи, аналогичные рассмотренным в этом параграфе, для уравнений высших порядков изучались Г. Г. Квиникадзе [10].

Глава 2

ЗАДАЧИ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

§ 5. ЗАДАЧИ ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ И МОНОТОННЫХ РЕШЕНИЯХ

В этом параграфе для дифференциального уравнения

$$u''=f(t,u,u') \tag{5.1}$$

рассмотрены следующие задачи об ограниченных и монотонных решениях

$$s_1(t)\leqslant u(t)\leqslant s_2(t) \quad \text{при } a<t<b, \tag{5.2}$$

$$u^{(i-1)}(a+)=c, \ s_1(t)\leqslant u(t)\leqslant s_2(t) \quad \text{при } a<t<b, \tag{5.3$_i$}$$

$$u^{(i-1)}(0+)=c, \ u(t)\geqslant 0, \ u'(t)\leqslant 0 \quad \text{при } t\in \mathbf{R}_+, \tag{5.4$_i$}$$

где $i\in\{1,2\}$, $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$, $c\in\mathbf{R}$, а $s_k:]a,b[\to\mathbf{R}$ $(k=1,2)$ — функции, удовлетворяющие неравенству

$$s_1(t)\leqslant s_2(t) \quad \text{при } a<t<b. \tag{5.5}$$

Как уже было отмечено выше, с (5.1), (5.2) и (5.1), (5.3$_1$) тесно связаны поставленные А. А. Логуновым и А. А. Власовым [32] краевые задачи

$$u''=-\frac{2}{t}u'+\frac{u'^2}{u(u-2)}+\frac{u-2}{u}\left(u^{-2}+\frac{2}{t^2}u\right), \tag{5.6}$$

$$u(0+)=2, \quad \lim_{t\to+\infty}\frac{u(t)}{t}=1, \quad u(t)>2 \quad \text{при} \quad t>0 \tag{5.7}$$

и

$$u''=\frac{2u'}{b-t}-\frac{u}{\rho^2-u^2}\left[u'^2+\left(1-\frac{u^2}{\rho^2}\right)^2\right]+$$

$$+\frac{2u}{(b-t)^2}\left(1-\frac{u^2}{\rho^2}\right)+\frac{3u}{\rho^2}\left[\left(1-\frac{b^2}{\rho^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{\rho^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{5.8}$$

$$u(0+)=2, \quad u(b-)=0, \quad 0<u(t)<2 \quad \text{при} \quad 0<t<b, \tag{5.9}$$

где $b^3=2\rho^2$, $\rho\geqslant 2$. Частными случаями задач (5.1), (5.4$_i$) $(i=1,2)$ служат задача Томаса—Ферми [76, 101]

$$u''=t^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}}, \tag{5.10}$$

$$u(0+)=1, \quad u(+\infty)=0 \tag{5.11}$$

и задача из теории капиллярных явлений [80]

$$u''=(1+u'^2)^{3/2}\left(ru-\frac{\alpha u'}{(t+a)\sqrt{1+u'^2}}\right), \tag{5.12}$$

$$u'(0+)=c, \quad u(+\infty)=0, \tag{5.13}$$

где $r>0$, $\alpha\geqslant 0$, $a>0$ и $c<0$.

5.1. Задачи (5.1), (5.2) и (5.1), (5.3_i) ($i=1,2$). Всюду в этом пункте предполагается, что выполнено условие

$$f \in K_{\mathrm{loc}}(]a, b[\times \mathbf{R}^2).$$

Теорема 5.1. Пусть s_1 — нижняя, а s_2 — верхняя функции уравнения (5.1). Пусть, кроме того, выполнено одно из следующих трех неравенств

$$f(t, x, y)\,\mathrm{sign}\, x \geqslant -\omega(y)\,[h_1(t) + h_2(t)\,|y|]$$
$$\text{при } a < t < b,\ s_1(t) \leqslant x \leqslant s_2(t),\ |y| > r, \tag{5.14}$$

$$f(t, x, y)\,\mathrm{sign}[(t - t_0)\,y] \geqslant -\omega(y)\,[h_1(t) + h_2(t)\,|y|]$$
$$\text{при } a < t < b,\ s_1(t) \leqslant x \leqslant s_2(t),\ |y| > r \tag{5.15}$$

или

$$(-1)^{i-1} f(t, x, y)\,\mathrm{sign}\, y \geqslant -\omega(y)\,[h_1(t) + h_2(t)\,|y|]$$
$$\text{при } a < t < b,\ s_1(t) \leqslant x \leqslant s_2(t),\ |y| > r, \tag{5.16_i}$$

где $i \in \{1, 2\}$, $t_0 \in]a, b[$, $r \in \mathbf{R}_+$, $h_1 \in L_{\mathrm{loc}}(]a, b[)$, $h_2 \in C(]a, b[)$, а ω — функция Нагумо[1]. Тогда задача (5.1), (5.2) разрешима.

Доказательство мы проведем для случая, когда выполнено условие (5.14). Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Пусть $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ и $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ — убывающая и возрастающая последовательности, удовлетворяющие условиям

$$a < a_n < b_n < b \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = a, \quad \lim_{n \to +\infty} b_n = b.$$

Для любого натурального n подберем точки $a_n' \in]a, a_n[$ и $b_n' \in]b_n, b[$ таким образом, чтобы

$$s_1(a_n) + (t - a_n)\, s_1'(a_n+) \leqslant s_2(a_n) + (t - a_n)\, s_2'(a_n+) \text{ при } a_n' \leqslant t \leqslant a_n,$$
$$s_1(b_n) + (t - b_n)\, s_1'(b_n-) \leqslant s_2(b_n) + (t - b_n)\, s_2'(b_n-) \text{ при } b_n \leqslant t \leqslant b_n'.$$

Положим

$$f_n(t, x, y) = \begin{cases} f(t, x, y) & \text{при } t \in [a_n, b_n], \\ 0 & \text{при } t \notin [a_n, b_n], \end{cases} \tag{5.17}$$

$$s_{kn}(t) = \begin{cases} s_k(a_n) + (t - a_n)\, s_k'(a_n+) & \text{при } a_n' \leqslant t \leqslant a_n, \\ s_k(t) & \text{при } a_n < t < b_n \quad (k = 1, 2), \\ s_k(b_n) + (t - b_n)\, s_k'(b_n-) & \text{при } b_n \leqslant t \leqslant b_n', \end{cases}$$

и

$$c_{1n} = s_{1n}(a_n'), \quad c_{2n} = s_{1n}(b_n').$$

s_{1n} и s_{2n} являются нижней и верхней функциями задачи

$$u'' = f_n(t, u, u'), \quad u(a_n'+) = c_{1n}, \quad u(b_n'-) = c_{2n}.$$

---

[1] По поводу понятий функции Нагумо, а также нижней и верхней функции уравнения (5.1) см. определения 3.1 и 3.2.

Поскольку, кроме того, выполнены условия (5.14) и (5.17), по теореме 3.1_1 при любом n упомянутая задача имеет решение u_n, удовлетворяющее неравенствам

$$s_{1n}(t) \leqslant u_n(t) \leqslant s_{2n}(t) \quad \text{при} \quad a'_n \leqslant t \leqslant b'_n.$$

Ясно, что u_n является решением уравнения (5.1) на $[a_n, b_n]$ и

$$s_1(t) \leqslant u_n(t) \leqslant s_2(t) \quad \text{при} \quad a_n \leqslant t \leqslant b_n \ (n=1, 2, \ldots). \tag{5.18}$$

Пусть $[t_*, t^*]$ — произвольный сегмент из $]a, b[$, а n_0 настолько велико, что

$$\delta = \min\{t_* - a_{n_0}, b_{n_0} - t^*\} > 0.$$

Введем числа

$$\rho_0 = \max\{|s_1(t)| + |s_2(t)| : t_* - \delta \leqslant t \leqslant t^* + \delta\}, \quad \rho = \frac{2\rho_0}{\delta} + r.$$

Согласно (5.14) и (5.18), для любого $n \geqslant n_0$ найдутся точки $t_{1n} \in [t_* - \delta, t_*]$ и $t_{2n} \in [t^*, t^* + \delta]$ такие, что

$$|u_n(t)| \leqslant \rho_0 \text{ при } t_{1n} \leqslant t \leqslant t_{2n}, \quad |u'_n(t_{1n})| \leqslant \rho, \quad |u'_n(t_{2n})| \leqslant \rho$$

и

$$u''_n(t)\,\eta_\rho(|u'_n(t)|)\operatorname{sign} u_n(t) \geqslant -\omega_0(u'_n(t))\,[h(t) + |u'_n(t)|] \text{ при } t_{1n} \leqslant t \leqslant t_{2n},$$

где

$$\omega_0(y) = \omega(y)\max\{1 + h_2(t) : t_* \leqslant t \leqslant t^*\}, \quad h(t) = |h_1(t)|.$$

В силу леммы 3.2, из этих неравенств вытекают оценки

$$|u_n'(t)| \leqslant \rho^* \text{ при } t_* \leqslant t \leqslant t^* \quad (n = n_0, n_0+1, \ldots), \tag{5.19}$$

где ρ^* — не зависящая от n постоянная.

Согласно лемме 2.2, оценки (5.18) и (5.19), ввиду произвольности $[t_*, t^*] \subset]a, b[$, гарантируют существование решения $u :]a, b[\to \mathbf{R}$ уравнения (5.1), удовлетворяющего условию (5.2). Теорема доказана.

Теорема 5.2. Пусть функция f для любого $\rho \in \mathbf{R}_+$ удовлетворяет условию

$$|f(t, x, y_1) - f(t, x, y_2)| \leqslant g_\rho(t)\,|y_1 - y_2|$$
$$\text{при } a < t < b, \ s_1(t) \leqslant x \leqslant s_2(t), \ |y_i| \leqslant \rho \ (i = 1, 2), \tag{5.20}$$

где $g_\rho \in L_{\mathrm{loc}}(]a, b[)$. Пусть, кроме того, существуют $t_0 \in]a, b[$ и локально суммируемые функции $l_1 :]a, b[\to \mathbf{R}_+$ и $l_2 :]a, b[\to \mathbf{R}$ такие, что

$$f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2) \geqslant l_1(t)(x_1 - x_2) + l_2(t)(y_1 - y_2)$$
$$\text{при } a < t < b, \ s_1(t) \leqslant x_2 \leqslant x_1 \leqslant s_2(t), \ (y_1 - y_2)(t - t_0) \geqslant 0 \tag{5.21}$$

и

$$\liminf_{t \to a} \frac{s_2(t) - s_1(t)}{1 + |l(t)|} = \liminf_{t \to b} \frac{s_2(t) - s_1(t)}{1 + l(t)} = 0, \tag{5.22}$$

где

$$l(t)=\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} \exp\left(\int_{\xi}^{\tau} l_2(\zeta)\, d\zeta\right) l_1(\xi)\, d\xi.$$

Тогда задача (5.1), (5.2) имеет не более одного решения.

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 — произвольные решения рассматриваемой задачи. Положим

$$u(t)=u_1(t)-u_2(t).$$

Покажем, прежде всего, что

$$u(t)\,u'(t)\leqslant 0 \text{ при } t_0\leqslant t<b. \tag{5.23}$$

Допустим противное — что для некоторого $t_1\in[t_0, b[$

$$u(t_1)\,u'(t_1)>0.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $u(t_1)>0$ и $u'(t_1)>0$. Обозначим через b_0 точную верхнюю грань множества тех $t_2\in]t_1, b[$, для которых в промежутке $[t_1, t_2[$ выполнены неравенства

$$u(t)>0,\ u'(t)>0.$$

Тогда, ввиду (5.21), будем иметь

$$u''(t)\geqslant l_1(t)\,u(t)+l_2(t)\,u'(t) \text{ при } t_1<t<b_0$$

и

$$u'(t)\geqslant\delta\left[\exp\left(\int_{t_1}^{t} l_2(\zeta)\, d\zeta\right)+\int_{t_1}^{t}\exp\left(\int_{\xi}^{t} l_2(\zeta)\, d\zeta\right) l_1(\xi)\, d\xi\right]$$

$$\text{при } t_1\leqslant t<b_0,$$

где $\delta=\min\{u(t_1),\ u'(t_1)\}>0$. Отсюда, ввиду определения b_0, очевидно, что $b_0=b$ и

$$s_2(t)-s_1(t)\geqslant u(t)\geqslant\delta l_0(t) \text{ при } t_1\leqslant t<b_0,$$

где

$$l_0(t)=1+\int_{t_1}^{t}\left[\exp\left(\int_{t_1}^{\tau} l_2(\zeta)\, d\zeta\right)+\int_{t_1}^{\tau}\exp\left(\int_{\xi}^{t} l_2(\zeta)\, d\zeta\right) l_1(\xi)\, d\xi\right] d\tau.$$

Однако, последнее неравенство противоречит условию (5.22), ибо

$$\lim_{t\to b}\frac{1+l(t)}{l_0(t)}<+\infty.$$

Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (5.23). Аналогично доказывается и неравенство

$$u(t)\,u'(t)\geqslant 0 \text{ при } a<t\leqslant t_0. \tag{5.24}$$

Покажем теперь, что

$$u(t_0)=0. \tag{5.25}$$

Допустим противное. Тогда, ввиду (5.23) и (5.24), будем иметь

$$u'(t_0)=0. \tag{5.26}$$

С другой стороны, без ограничения общности, можем считать, что

$$u(t) \geqslant 0, \; u'(t) \leqslant 0 \text{ при } t_0 \leqslant t < b. \tag{5.27}$$

Тогда, ввиду (5.21),

$$f(t, u_1(t), u_1'(t)) - f(t, u_2(t), u_1'(t)) \geqslant 0 \text{ при } t_0 \leqslant t < b.$$

Кроме того, согласно (5.20), существует неотрицательная функция $g \in L_{\text{loc}}([t_0, b[)$ такая, что

$$f(t, u_2(t), u_1'(t)) - f(t, u_2(t), u_2'(t)) \geqslant g(t) u'(t) \text{ при } t_0 \leqslant t < b.$$

Поэтому

$$u''(t) \geqslant g(t) u'(t) \text{ при } t_0 \leqslant t < b.$$

Отсюда, в силу (5.26), следует неравенство

$$u'(t) \geqslant 0 \text{ при } t_0 \leqslant t < b,$$

согласно которому из (5.21) и (5.27) находим

$$s_2(t) - s_1(t) \geqslant u(t) = \delta_0 \text{ и } \delta_0 l_1(t) \leqslant 0 \text{ при } t_0 \leqslant t < b,$$

где $\delta_0 = u(t_0) > 0$. Следовательно, $l_1(t) = 0$, $l(t) = 0$ при $t_0 \leqslant t < b$ и

$$\liminf_{t \to b} \frac{s_2(t) - s_1(t)}{1 + l(t)} \geqslant \delta_0 > 0,$$

что противоречит условию (5.22). Тем самым установлена справедливость равенства (5.25). Однако из условий (5.23) — (5.25) следует, что $u(t) \equiv 0$. Теорема доказана.

Замечание. Из (5.21) вытекает неравенство (5.15), где $\omega(y) = 1 + |y|$, $h_2(t) = 0$, $r = 0$ и

$$h_1(t) = |l_2(t)| + |f(t, s_1(t), 0)| + |f(t, s_2(t), 0)|.$$

Поэтому, если s_1 и s_2 являются нижней и верхней функциями уравнения (5.1), то, в силу теоремы 5.1, условие (5.21) гарантирует и разрешимость задачи (5.1), (5.2).

С помощью результатов § 3, аналогично теоремам 5.1 и 5.2, доказываются следующие предложения о существовании и единственности решений задач (5.1), (5.3_i) ($i = 1, 2$)

Теорема 5.3_1. Пусть $a > -\infty$, s_1 и s_2 — нижняя и верхняя функции уравнения (5.1), имеющие конечные пределы $s_k(a+)$ ($k = 1, 2$), причем $s_1(a+) \leqslant c \leqslant s_2(a+)$. Пусть, кроме того, либо выполнено условие (5.16_1), либо $c = 0$ и выполнено условие (5.14), либо существуют точки $\alpha \in]a, b[$, $a_0 \in]\alpha, b[$, $b_0 \in]a_0, b[$ и $\beta \in]b_0, b[$ такие, что

$$f(t, x, y) \operatorname{sign}[(t - a_0) y] \leqslant \omega(y) [h_1(t) + h_2(t) |y|]$$
$$\text{при } t \in]a, a_0[\cup]b_0, b[, \; s_1(t) \leqslant x \leqslant s_2(t), \; |y| > r,$$

и

$$f(t, x, y) \operatorname{sign} x \geqslant -\omega(y) [h_1(t) + h_2(t) |y|]$$
$$\text{при } \alpha < t < \beta, \; s_1(t) \leqslant x \leqslant s_2(t), \; |y| > r,$$

где $r \in \mathbf{R}_+$, $h_1 \in L_{loc}([a, b[)$, $h_2 \in C([a, b[)$, а ω — функция Нагумо. Тогда задача (5.1), (5.3_1) разрешима.

Теорема 5.3_2. Пусть $a > -\infty$, а s_1 и s_2 — нижняя и верхняя функции уравнения (5.1), производные которых имеют конечные пределы $s_k'(a+)$ $(k=1, 2)$, причем $s_1'(a+) \geqslant c \geqslant s_2'(a+)$. Пусть, кроме того, $f \in K_{loc}([a, b[\times \mathbf{R}^2)$ и соблюдается либо условие (5.14), либо условие (5.16_2), где $r \in \mathbf{R}_+$, $h_1 \in L_{loc}([a, b[)$, $h_2 \in C([a, b[)$, а ω — функция Нагумо. Тогда задача (5.1), (5.3_2) разрешима.

Теорема 5.4_1. Пусть $a > -\infty$, а s_1 и s_2 — нижняя и верхняя функции уравнения (5.1), имеющие конечные пределы $s_k(a+)$ $(k=1, 2)$, причем $s_1(a+) \leqslant c \leqslant s_2(a+)$. Пусть, кроме того, либо

$$f(t, x, y)\operatorname{sign} y \geqslant -\frac{h_0(t)}{t-a} - \left[\frac{\lambda}{t-a} + h_1(t)\right]|y| - h_2(t)\,y^2$$

$$\text{при } a < t < b,\ s_1(t) \leqslant x \leqslant s_2(t),\ |y| > r,$$

либо существуют точки $\alpha \in]a, b[$, $a_0 \in]\alpha, b[$, $b_0 \in]a_0, b[$ и $\beta \in]b_0, b]$ такие, что

$$f(t, x, y)\operatorname{sign}[(t-a_0)y] \leqslant \frac{h_0(t)}{t-a} + \left[\frac{\lambda}{t-a} + h_1(t)\right]|y| + h_2(t)\,y^2$$

$$\text{при } t \in]a, a_0[\,\cup\,]b_0, b[,\ s_1(t) \leqslant x \leqslant s_2(t),\ |y| > r$$

и

$$f(t, x, y)\operatorname{sign} x \geqslant -\frac{h_0(t)}{t-a} - \left[\frac{\lambda}{t-a} + h_1(t)\right]|y| - h_2(t)\,y^2$$

$$\text{при } \alpha < t < \beta,\ s_1(t) \leqslant x \leqslant s_2(t),\ |y| > r,$$

где $\lambda \in [0, 1[$, $r \in \mathbf{R}_+$, $h_k \in L_{loc}([a, b[)$ $(k=0, 1)$ и $h_2 \in C([a, b[)$. Тогда задача (5.1), (5.3_1) разрешима.

Теорема 5.4_2. Пусть $a > -\infty$, а s_1 и s_2 — нижняя и верхняя функции уравнения (5.1), причем

$$\limsup_{t \to a} |s_k(t)| < +\infty \quad (k=1, 2)$$

и для некоторой сходящейся к a последовательности $a_n \in]a, b[$ $(n=1, 2, \ldots)$ имеем

$$s_1'(a_n+) \geqslant 0 \geqslant s_2'(a_n+) \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Пусть, кроме того,

$$f(t, x, y)\operatorname{sign} y \leqslant (t-a)^{\mu} h_0(t) + \left[\frac{\mu}{t-a} + h_1(t)\right]|y| + h_2(t)\,y^2$$

$$\text{при } a < t < b,\ s_1(t) \leqslant x \leqslant s_2(t),\ y \in \mathbf{R},$$

где $\mu \in \mathbf{R}_+$, $h_k \in L_{loc}([a, b[)$ $(k=0, 1)$ и $h_2 \in C([a, b[)$. Тогда уравнение (5.1) имеет, хотя бы одно, решение, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{t \to a}(t-a)^{-\mu} u'(t) = 0,\quad s_1(t) \leqslant u(t) \leqslant s_2(t) \text{ при } a < t < b. \quad (5.28)$$

Теорема 5.5$_1$. Пусть $a>-\infty$, а функция f удовлетворяет условию

$$f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)\geqslant l_1(t)(x_1-x_2)+l_2(t)(y_1-y_2)$$
$$\text{при } a<t<b,\ s_1(t)\leqslant x_2\leqslant x_1\leqslant s_2(t),\ y_2\leqslant y_1; \tag{5.29}$$

при этом $l_k\in L_{\text{loc}}(]a, b[)$ $(k=1, 2)$, l_1 неотрицательна и для некоторого $t_0\in]a, b[$

$$\liminf_{t\to b}\frac{s_2(t)-s_1(t)}{l(t, t_0)}=0, \tag{5.30}$$

где

$$l(t, t_0)=\int_{t_0}^{t}\left[\exp\left(\int_{t_0}^{\tau}l_2(s)\,ds\right)+\int_{t_0}^{\tau}\exp\left(\int_{\xi}^{\tau}l_2(\zeta)\,d\zeta\right)l_1(\xi)\,d\xi\right]d\tau.$$

Тогда задача (5.1), (5.3$_1$) имеет не более одного решения.

Замечание. Если s_1 и s_2 являются нижней и верхней функциями уравнения (5.1), имеющими конечные пределы $s_k(a+)$ $(k=1, 2)$,

$$s_1(a+)\leqslant c\leqslant s_2(a+),$$

$$\int_a^t(\tau-a)|f(\tau, s_k(\tau), 0)|\,d\tau<+\infty \text{ при } a<t<b$$

и $l_2(t)=\frac{\lambda}{t-a}+l_{02}(t)$, где $\lambda\in[0, 1[$ и $l_{02}\in L_{\text{loc}}([a, b[)$, то, согласно теореме 5.4$_1$, условие (5.29) гарантирует и разрешимость задачи (5.1). (5.3$_1$).

Теорема 5. 5$_2$. Пусть $a>-\infty$, а функция f удовлетворяет условию (5.29); при этом $l_k\in L_{\text{loc}}(]a, b[)(k=1, 2)$, l_1 неотрицательна и для некоторого $t_0\in]a, b[$ имеет место равенство (5.30), где

$$l(t, t_0)=1+\int_{t_0}^{t}d\tau\int_{t_0}^{\tau}\exp\left(\int_{\xi}^{\tau}l_2(\zeta)\,d\zeta\right)l_1(\xi)\,d\xi.$$

Пусть, кроме того, для любого $\rho\in\mathbf{R}_+$ выполнено условие (5.20) где $g_\rho\in L_{\text{loc}}([a, b[)\left(g_\rho(t)=\frac{\mu}{t-a}+g_{0\rho}(t),\ \mu\in\mathbf{R}_+,\ g_{0\rho}\in L_{\text{loc}}([a, b[)\right)$, то задача (5.1), (5,3$_2$) (задача (5.1), (5.28)) имеет не более одного решения.

5.2. Задачи (5.6), (5.7) и (5.8), (5.9). Приведенные в этом пункте теоремы существования принадлежат Е. И. Моисееву и В. А. Садовничему [40, 43], а доказательства этих результатов взяты из [31].

Теорема 5.6. Задача (5.6), (5.7) разрешима.

Доказательство. Пусть

$$s_2(t)=t+2,\quad s_1(t)=\begin{cases}2+\frac{t^2}{8} \text{ при } 0<t\leqslant 4,\\ t \text{ при } t>4,\end{cases}$$

$$f(t, x, y) = -\frac{2}{t}y + \frac{y^2}{x(x-2)} + \frac{x-2}{x}\left(x^{-2} + \frac{2}{t^2}x\right)$$
$$\text{при } s_1(t) \leqslant x \leqslant s_2(t)$$

и

$$f(t, x, y) = \begin{cases} f(t, s_2(t), y) \text{ при } x > s_2(t), \\ f(t, s_1(t), y) \text{ при } x < s_1(t). \end{cases} \tag{5.31}$$

Тогда $f \in K]_{oc}(]0, +\infty[\times \mathbf{R}^2)$ и выполнено неравенство (5.14), где $a=0$, $b=+\infty$, $\omega(y)=1$, $h_1(t)=0$, $h_2(t)=-\frac{2}{t}$, $r=0$. С другой стороны, легко проверить, что s_1 и s_2 являются нижней и верхней функциями уравнения (5.1), удовлетворяющими неравенству (5.5). В силу теоремы 5.1, задача (5.1), (5.2) имеет решение, которое, очевидно, является и решением задачи (5.6), (5.7). Теорема доказана.

Замечание. В [43] доказано, что решение u задачи (5.6), (5.7) единственно и допускает асимптотическое представление

$$u(t) = t + 1 + \frac{2}{t} + \frac{2}{3}\frac{\ln t}{t^2} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ при } t \to +\infty.$$

Кроме того, из (5.6) и (5.7) непосредственно следует, что

$$(t^2 u'(t))' > 0, \ u'(t) > 0 \text{ при } t > 0.$$

Теорема 5.7. Задача (5.8), (5.9) разрешима.

Доказательство. Сперва рассмотрим случай, когда $\rho > 2$. Положим $s_1(t) = 0$, $s_2(t) = 2$, а функцию f зададим равенствами

$$f(t, x, y) = \frac{2y}{b-t} - \frac{x}{\rho^2 - x^2}\left[y^2 + \left(1 - \frac{x^2}{\rho^2}\right)^2\right] + \frac{2x}{(b-t)^2}\left(1 - \frac{x^2}{\rho^2}\right) +$$
$$+ \frac{3x}{\rho^2}\left[\left(1 - \frac{b^2}{\rho^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\rho^2}\right)\right]^{1/2} \text{ при } s_1(t) \leqslant x \leqslant s_2(t)$$

и (5.31). Ясно, что $f \in K_{loc}([0, b[\times \mathbf{R}^2)$, s_1 и s_2 являются нижней и верхней функциями уравнения (5.1) и выполнено неравенство (5.16$_1$), где $a=0$, $r=0$, $\omega(y) = 1 + |y|$, $h_1(t) = \frac{4}{(b-t)^2} + \frac{6}{\rho^2}$ и $h_2(t) = \frac{2}{\rho^2 - 4}$. Поэтому согласно теореме 5.3$_1$, уравнение (5.8) имеет решение u, удовлетворяющее условиям

$$u(0+) = 2, \quad 0 \leqslant u(t) \leqslant 2 \text{ при } 0 < t < b. \tag{5.32}$$

Ясно, что

$$u(t) > 0 \text{ при } 0 < t < b, \tag{5.33}$$

ибо в противном случае для некоторого $t_0 \in]0, b[$ имели бы $u(t_0) = u'(t_0) = 0$, но таким начальным условиям удовлетворяет лишь нулевое решение уравнения (5.8).

Ввиду (5.32) и (5.33),

$$\liminf_{t\to b}(b-t)\,|u'(t)|=0$$

и

$$\left[\frac{(b-t)^2u'(t)}{\sqrt{\rho^2-u^2(t)}}\right]'=\left[\frac{1}{\rho^2}\left(2-\frac{(b-t)^2}{\rho^2}\right)(\rho^2-u^2t)^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{\rho^2}(b-t)^2\left(1-\frac{b^2}{\rho^2}\right)^{1/2}\right]u(t)\geqslant\delta u(t)>0 \text{ при } 0<t<b,$$

где $\delta=\frac{1}{\rho^2}\left(2-\frac{b^2}{\rho^2}\right)(\rho^2-4)^{1/2}>0$. Отсюда непосредственно вытекает, что

$$u'(t)<0 \text{ при } 0<t<b \text{ и } u(b-)=0.$$

Следовательно, u удовлетворяет условиям (5.9).

Несколько проще доказать разрешимость задачи (5.8), (5.9) в случае $\rho=2$, выбрав в качестве нижней и верхней функций $s_1(t)=2-t$ и $s_2(t)=2-2^{-6}t^7$.

Замечание. Из вышеприведенного рассуждения ясно, что произвольное решение задачи (5.8), (5.9) является убывающей функцией.

5.3. Задачи (5.1), (5.4$_i$) ($i=1,2$). Задачи Кнезера (5.1), (5.4$_1$) и (5.1), (5.4$_2$) мы будем исследовать при условии, что

$$f\in K_{loc}(]0,+\infty[\times\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_-)$$

и

$$f(t,0,0)=0,\ f(t,x,0)\geqslant 0 \text{ при } t>0,\ x>0. \tag{5.34}$$

Теорема 5.8$_1$. Пусть либо
$f(t,x,y)\leqslant\omega(y)\,(h_1(t)+h_2(t)\,|y|)$ при $t>0$, $0\leqslant x\leqslant r_0$, $y\leqslant -r$, либо существуют числа $\alpha\in\mathbf{R}_+$ и $\beta\in]\alpha,+\infty[$ такие, что
$f(t,x,y)\leqslant\omega(y)\,(h_1(t)+h_2(t)\,|y|)$ при $0<t<\beta$, $0\leqslant x\leqslant r_0$, $y\leqslant -r$ и
$f(t,x,y)\geqslant-\omega(y)\,(h_1(t)+h_2(t)\,|y|)$ при $t>\alpha$, $0\leqslant x\leqslant r_0$, $y\leqslant -r$, где $r_0>0$, $r\geqslant 0$, $h_1\in L_{loc}(\mathbf{R}_+)$, $h_2\in C(\mathbf{R}_+)$, а ω — функция Нагумо. Тогда при любом $c\in[0,r_0]$ задача (5.1), (5.4$_1$) имеет, хотя бы одно, решение.

Доказательство. Продолжим f на $]0,+\infty[\times\mathbf{R}^2$ с помощью равенств

$$f(t,x,y)=f(t,x,0) \text{ при } t>0,\ x\geqslant 0,\ y>0.$$

и

$$f(t,x,y)=f(t,0,y) \text{ при } t>0,\ x<0,\ y\in\mathbf{R}.$$

Тогда, ввиду (5.34),

$$f\in K_{loc}(]0,+\infty[\times\mathbf{R}^2)$$

и

$$f(t,x,y)\geqslant 0 \text{ при } t>0,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0. \tag{5.35}$$

С другой стороны, $s_1(t)=0$ является нижней, а $s_2(t)=r_0$ — верхней функцией уравнения (5.1).

Пусть $c \in [0, r_0]$. Тогда, согласно теореме 5.3_1, уравнение (5.1) имеет решение u, удовлетворяющее условиям

$$u(0+)=c, \ 0 \leqslant u(t) \leqslant r_0 \text{ при } t>0.$$

Если $u'(t_0)>0$ при некотором $t_0>0$, то в силу (5.35), находим

$$u'(t) \geqslant u'(t_0) \text{ и } r_0 \geqslant u(t) \geqslant u'(t_0)(t-t_0) \text{ при } t>t_0.$$

Полученное противоречие показывает, что u удовлетворяет условиям (5.4_1). Теорема доказана.

Следствие 5.1. Пусть

$$f(t, x, y) \leqslant \rho t^{\lambda-2}|y|^{\lambda} \text{ при } 0<t<a, \ 0 \leqslant x \leqslant r_0, \ y \leqslant -r \tag{5.36}$$

и

$$f(t, x, y) \geqslant -\omega(y)(h_1(t)+h_2(t)|y|) \text{ при } t>0, \ 0 \leqslant x \leqslant r_0, \ y \leqslant -r, \tag{5.37}$$

где a, ρ, r_0 и r — положительные числа, $\lambda \in]1, +\infty[$, $h_1 \in L_{loc}(]0, +\infty[)$, $h_2 \in C(]0, +\infty[)$, а ω — функция Нагумо. Тогда при любом $c \in [0, r_0]$ задача (5.1), (5.4_1) имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. Подберем $\varepsilon>0$ и $\beta \in]0, a[$ таким образом, чтобы

$$\int_{\beta}^{a} z(t)\,dt > r_0, \tag{5.38}$$

где

$$z(t)=[\varepsilon+\rho t^{\lambda-1}]^{\frac{1}{1-\lambda}}.$$

Не ограничивая общности, можем считать, что

$$z(a)>r.$$

Положим $r_1=z(0)$,

$$\sigma(y)=\begin{cases} 1 \text{ при } y \geqslant -r_1, \\ 2-\dfrac{y}{r_1} \text{ при } -2r_1<y<-r_1, \\ 0 \text{ при } y \leqslant -2r_1, \end{cases} \tag{5.39}$$

$$\tilde{f}(t, x, y)=\begin{cases} \sigma(y) f(t, x, y) \text{ при } 0<t<\beta, \\ f(t, x, y) \text{ при } t \geqslant \beta \end{cases} \tag{5.40}$$

и рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u''=\tilde{f}(t, u, u'). \tag{5.41}$$

Поскольку $r_1>r$, из (5.37) и (5.40) следуют неравенства

$$\tilde{f}(t, x, y) \leqslant \omega(y)(\tilde{h}_1(t)+\tilde{h}_2(t)|y|)$$

$$\text{при } 0<t<\beta, \ 0 \leqslant x \leqslant r_0, \ y \leqslant -2r_1$$

и

$$\tilde{f}(t, x, y) \geqslant -\omega(y)(\tilde{h}_1(t)+\tilde{h}_2(t)|y|)$$
$$\text{при } t>0,\ 0\leqslant x\leqslant r_0,\ y\leqslant -2r_1,$$

где $\tilde{h}_1(t)=0$, $\tilde{h}_2(t)=|h_2(\beta)|$ при $0<t\leqslant\beta$ и $\tilde{h}_k(t)=|h_k(t)|$ при $t>\beta$ $(k=1, 2)$.

Согласно теореме 5.8_1, если $c\in[0, r_0]$, то задача (5.41), (5.4_1) имеет решение u. Покажем, что

$$u'(t)\geqslant -z(t) \text{ при } 0<t<\beta. \tag{5.42}$$

Допустим противное — что для некоторого $t_0\in]0, \beta[$

$$u'(t_0)<-z(t_0). \tag{5.43}$$

Обозначим через t_1 точную верхнюю грань множества тех $s\in$ $\in]t_0, a[$, для которых на отрезке $[t_0, s]$ имеет место неравенство

$$u'(t)<-z(t). \tag{5.44}$$

Ввиду (5.36) и (5.40),

$$|u'(t)|'\geqslant -\rho t^{\lambda-2}|u'(t)|^{\lambda} \text{ при } t_0<t<t_1.$$

Отсюда с учетом (5.43) находим:

$$|u'(t_1)|\geqslant[\rho t_1^{\lambda-1}+|u'(t_0)|^{1-\lambda}-\rho t_0^{\lambda-1}]^{\frac{1}{1-\lambda}}>z(t_1).$$

Поэтому ясно, что $t_1=a$ и неравенство (5.44) выполнено на $[t_0, a]$. С другой стороны, согласно (5.38) и (5.44),

$$r_0>u(t_0)-u(a)=-\int_{t_0}^{a}u'(\tau)\,d\tau>\int_{\beta}^{a}z(\tau)\,d\tau>r_0.$$

Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (5.42). Но из (5.40) и (5.42) следует, что u является решением уравнения (5.1). Следствие доказано.

Следствие 5.2. Пусть $f\in K_{\text{loc}}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_-)$ и

$$f(t, x, y)\geqslant 0 \text{ при } t>0,\ x\geqslant 0,\ y\leqslant -r,$$

где $r\geqslant 0$. Тогда найдется положительное число r_0 такое, что при любом $c\in[0, r_0]$ задача (5.1), (5.4_1) имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. Пусть r_1 — произвольное положительное число и

$$h(t)=\sup\{|f(t, x, y)|: 0\leqslant x\leqslant r_1,\ -2r_1\leqslant y\leqslant 0\}. \tag{5.45}$$

Подберем числа $\beta>0$ и $r_0\in]0, r_1[$ таким образом, чтобы

$$\frac{r_0}{\beta}+\int_0^{\beta}h_1(t)\,dt<r_1, \tag{5.46}$$

а функцию $\tilde{f}$ определим с помощью равенств (5.39) и (5.40).

Ясно, что

$$\tilde{f}(t, x, y)=0 \text{ при } 0<t<\beta,\ 0\leqslant x\leqslant r_0,\ y\leqslant -2r_1$$

и

$$\tilde{f}(t, x, y)\geqslant 0 \text{ при } t>0,\ 0\leqslant x\leqslant r_0,\ y\leqslant -2r_1.$$

Поэтому, согласно теореме 5.8_1, задача (5.41), (5.4_1) имеет решение u, если только $c\in[0, r_0]$. Ввиду (5.4_1) и (5.45),

$$\min\{|u'(t)|:0\leqslant t\leqslant\beta\}\leqslant\frac{r_0}{\beta},\quad |u''(t)|\leqslant h(t) \text{ при } 0\leqslant t\leqslant\beta.$$

Из этих неравенств, в силу (5.46), имеем

$$|u'(t)|<r_1 \text{ при } 0\leqslant t\leqslant\beta.$$

Согласно полученной оценке, из (5.40) вытекает, что u является и решением уравнения (5.1). Следствие доказано.

Теорема 5.8_2. Пусть $f\in K_{loc}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_-)$,

$$f(t, x, y)\geqslant-\omega(y)(h_1(t)+h_2(t)|y|) \text{ при } t>0,\quad 0\leqslant x\leqslant r_0,\ y\leqslant -r$$

и

$$f(t, x, y)\geqslant\delta(t)\geqslant 0 \text{ при } 0<t<a,\ x\geqslant r_0,\ y\leqslant -r, \tag{5.47}$$

где r_0, r и a — положительные числа, ω — функция Нагумо, $h_1\in L_{loc}(\mathbf{R}_+)$, $h_2\in C(\mathbf{R}_+)$, $\delta\in L([0, a])$ и

$$-\int_0^a\delta(t)\,dt\leqslant c\leqslant 0.$$

Тогда задача (5.1), (5.4_2) разрешима.

Доказательство. Ввиду (5.34) и (5.47) $s_1(t)=0$ является нижней, а

$$s_2(t)=\begin{cases} r_0+\int_t^a(\tau-t)\,\delta(\tau)\,d\tau \text{ при } 0\leqslant t\leqslant a,\\ r_0 \text{ при } t>a\end{cases}$$

— верхней функцией уравнения (5.1). Разрешимость задачи (5.1), (5.4_2) следует теперь из теоремы 5.3_2.

Аналогично теореме 5.8_1 доказывается следующая

Теорема 5.9. Пусть либо

$$f(t, x, y)\leqslant\frac{h_0(t)}{t}+\left[\frac{\lambda}{t}+h_1(t)\right]|y|+h_2(t)\,y^2$$

$$\text{при } t>0,\ 0\leqslant x\leqslant r_0,\ y\leqslant -r,$$

либо существуют числа $\alpha\in\mathbf{R}_+$ и $\beta\in]\alpha, +\infty[$ такие, что

$$f(t, x, y)\leqslant\frac{h_0(t)}{t}+\left[\frac{\lambda}{t}+h_1(t)\right]|y|+h_2(t)\,y^2$$

$$\text{при } 0<t<\beta,\ 0\leqslant x\leqslant r_0,\ y\leqslant -r$$

и

$$f(t, x, y) \geqslant -\frac{h_0(t)}{t} - \left[\frac{\lambda}{t} + h_1(t)\right]|y| - h_2(t) y^2$$

$$\text{при } t > \alpha,\ 0 \leqslant x \leqslant r_0,\ y \leqslant -r,$$

где $r_0 > 0$, $r \geqslant 0$, $h_k \in L]_{\text{loc}}(\mathbf{R}_+)$ $(k=0,1)$, $h_2 \in C(\mathbf{R}_+)$. Тогда при любом $c \in [0, r_0]$ задача (5.1), (5.4$_1$) имеет, хотя бы одно, решение.

Теорема 5.10. Пусть

$$f(t, x, y) \geqslant \sigma(t, x) \geqslant 0 \text{ при } t > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant r_0,\ y \leqslant 0, \tag{5.48}$$

где $r_0 > 0$, а функция $\sigma \in K_{\text{loc}}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+)$ не убывает по второму аргументу и

$$\int_0^{+\infty} t\sigma(t, x)\, dt = +\infty \text{ при } 0 < x \leqslant r_0. \tag{5.49}$$

Тогда для любого решения уравнения (5.1), удовлетворяющего неравенствам

$$0 \leqslant u(t) \leqslant r_0, \quad u'(t) \leqslant 0 \text{ при } t > 0, \tag{5.50}$$

имеем

$$u(+\infty) = 0 \text{ и } \lim_{t \to +\infty} tu'(t) = 0.$$

Доказательство. Положим

$$v(t) = u(t) - tu'(t), \quad x = u(+\infty).$$

Согласно (5.48) и (5.50),

$$v(t) \geqslant 0, \quad v'(t) \leqslant 0 \text{ при } t > 0 \tag{5.51}$$

и

$$\int_0^t \tau\sigma(\tau, x)\, d\tau \leqslant v(0+) \text{ при } t > 0. \tag{5.52}$$

Ввиду (5.50) и (5.51), $tu'(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, а, ввиду (5.49) и (5.52), $x = 0$. Теорема доказана.

Теорема 5.11$_1$. Пусть функция f удовлетворяет неравенству (5.48), не убывает по второму аргументу и

$$f(t, x, y_1) - f(t, x, y_2) \geqslant l(t)\,(y_1 - y_2)$$

$$\text{при } t > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant r_0,\ -r_0 \leqslant ty_2 \leqslant ty_1 \leqslant 0, \tag{5.53}$$

где $r_0 \in \mathbf{R}_+$, $\sigma \in K]_{\text{oc}}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+)$ и $l \in L_{\text{loc}}(]0, +\infty[)$. Пусть, кроме того, либо

$$\int_{t_0}^{+\infty} \exp\left(\int_{t_0}^{t} l(\tau)\, d\tau\right) dt = +\infty \text{ при } t_0 > 0, \tag{5.54}$$

либо σ не убывает по второму аргументу и удовлетворяет условию (5.49). Тогда при любом $c \in [0, r_0]$ задача (5.1), (5.4$_1$) имеет не более одного решения.

Доказательство. Допустим противное: для некоторого $c\in[0, r_0]$ задача (5.1), (5.4$_1$) имеет два различных решения u_1 и u_2. Тогда, ввиду (5.48),

$$0\leqslant u_k(t)\leqslant r_0,\quad tu_k'(t)\geqslant -r_0 \text{ при } t>0 \quad (k=1,2). \tag{5.55}$$

С другой стороны, без ограничения общности, можем считать, что для некоторого $t_0>0$ функция $u(t)=u_1(t)-u_2(t)$ удовлетворяет неравенствам

$$u(t_0)>0,\quad u'(t_0)>0. \tag{5.56}$$

Поскольку f не убывает по второму аргументу, из (5.53), (5.55) и (5.56) получаем

$$u(t)>u(t_0)+u'(t_0)\int_{t_0}^{t}\exp\left(\int_{t_0}^{s}l(\tau)\,d\tau\right)ds \text{ при } t>t_0.$$

Следовательно, равенство (5.54) не имеет места. Равенство (5.49) также не может иметь места, ибо в противном случае, согласно теореме 5.10, имели бы $0=u(+\infty)>u(t_0)>0$. Теорема доказана.

Из теорем 5.9 и 5.11$_1$ получается

Следствие 5.3. Пусть функция f не убывает по второму аргументу,

$$f(t, x, y)\geqslant 0 \text{ при } t>0,\quad 0\leqslant x\leqslant r_0,\quad y\leqslant 0,$$

$$\int_0^1 tf(t, r_0, 0)dt<+\infty$$

и

$$f(t, x, y_1)-f(t, x, y_2)\geqslant -\left[\frac{\lambda}{t}+l_0(t)\right](y_1-y_2)$$

$$\text{при } t>0,\ 0\leqslant x\leqslant r_0,\ -r_0\leqslant ty_2\leqslant ty_1\leqslant 0,$$

где $\lambda\in[0, 1[$, а функция $l_0:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ измерима и

$$\int_0^{+\infty}l_0(t)\,dt<+\infty.$$

Тогда при любом $c\in[0, r_0]$ задача (5.1), (5.4$_1$) имеет одно и только одно решение.

Согласно теореме 5.10, задачи (5.10), (5.11) и (5.10), (5.4$_1$), где $c=1$, эквивалентны. Поэтому из следствия 5.3 непосредственно вытекает однозначная разрешимость задачи (5.10), (5.11).

Теорема 5.11$_2$. Пусть функция $f\in K_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_-)$ не убывает по второму аргументу,

$$f(t, x, y)\geqslant\sigma(t, x)\geqslant 0 \text{ при } t>0,\ x\geqslant 0,\ y\leqslant 0$$

и для любого $\rho\in\mathbf{R}_+$

$$|f(t, x, y_1)-f(t, x, y_2)|\leqslant l_\rho(t)\,(y_1-y_2)$$
$$\text{при } t>0,\ 0\leqslant x\leqslant\rho,\ -\rho\leqslant y_2\leqslant y_1\leqslant 0,$$

где $l_\rho \in L_{loc}(\mathbf{R}_+)$, а функция $\sigma \in K_{loc}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+)$ не убывает по второму аргументу и удовлетворяет условию (5.49). Тогда при любом $c \in \mathbf{R}_-$ задача (5.1), (5.4_2) имеет одно и только одно решение.

В условиях сформулированного утверждения разрешимость задачи (5.1), (5.4_2) прямо следует из теоремы 5.8_2, что же касается единственности решения, она доказывается рассуждением, аналогичным проведенному при доказательстве теоремы 5.11_1.

Из теоремы 5.11_2, в частности, вытекает однозначная разрешимость задачи (5.12), (5.13).

Признаки разрешимости задачи Кнезера для нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков содержатся в [17, 20]. Аналогичные задачи для систем дифференциальных уравнений исследованы Хартманом и Уинтнером [78], Коффманом [72], Т. А. Чантурия [58], И. Т. Кигурадзе и И. Рахунковой [84] и И. Рахунковой [50, 93].

§ 6. ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В настоящем параграфе мы рассмотрим краевую задачу

$$u'' = -\frac{\gamma}{t} u' + u - |u|^\lambda \operatorname{sign} u, \tag{6.1}$$

$$u'(0+) = 0, \quad u(+\infty) = 0. \tag{6.2}$$

При этом будем предполагать, что γ и λ — действительные числа и $\lambda > 0$.

Прежде чем сформулировать основной результат, договоримся называть нетривиальное (т. е. ненулевое) решение уравнения (6.1) колеблющимся, если оно имеет бесконечно много нулей, и неколеблющимся — в противном случае.

П р е д л о ж е н и е. а) Задача (6.1), (6.2) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

I. $\gamma > 1$, $1 < \lambda < \frac{\gamma+3}{\gamma-1}$;

II. $0 < \gamma \leqslant 1$, $\lambda > 1$;

III. $\gamma = 0$, $\lambda > 1$;

IV. $\gamma < 0$, $\lambda > 1$;

V. $\gamma > 0$, $\lambda < 1$.

б) Все нетривиальные решения задачи (6.1), (6.2) являются неколеблющимися, если выполнено I или II, не имеют нулей, если выполнено III или IV, и колеблютяс, если справедливо V.

в) В случаях I и II для любого целого неотрицательного l

существует решение задачи (6.1), (6.2) ровно с l нулями на $]0, +\infty[$, в случае III эта задача имеет единственное с точностью до знака решение, а в случаях IV и V для любого $u_0 \in]-1, 1[$ найдется ее решение u такое, что $u(0+) = u_0$.

Приведенное утверждение является следствием теорем 6.1—6.6, доказываемых ниже. Попутно мы устанавливаем и некоторые другие свойства решений задачи (6.1), (6.2).

6.1. Предварительные замечания. Если $u: J \to \mathbf{R}$, $J \subset]0, +\infty[$, — решение уравнения (6.1), то под V_u мы будем подразумевать функцию, определенную на J равенством

$$V_u(t) = \frac{1}{2} u'^2(t) + \frac{1}{\lambda+1} |u(t)|^{\lambda+1} - \frac{1}{2} u^2(t). \qquad (6.3)$$

Ниже нам понадобятся несколько простых утверждений, которые для удобства дальнейшего изложения формулируются в этом пункте в виде лемм.

Лемма 6.1. Любое решение $u:]a, b[\to \mathbf{R}$, $0 < a < b < +\infty$, уравнения (6.1) можно продолжить на промежуток $]0, +\infty[$.

Доказательство. Для $\lambda \leqslant 1$ лемма вытекает из общей глобальной теоремы существования (теоремы Уинтнера).

Пусть $u:]a, b[\to \mathbf{R}$ — решение уравнения (6.1), где $\lambda > 1$. Поскольку

$$V'_u(t) = -\frac{\gamma}{t} u'^2(t), \qquad (6.4)$$

из неравенства

$$\frac{1}{\lambda+1} x^{\lambda+1} - \frac{1}{2} x^2 > -\frac{1}{2} \quad \text{при } x \geqslant 0, \quad \lambda > 1 \qquad (6.5)$$

получаем

$$|V'_u(t)| \leqslant \frac{2|\gamma|}{t} \left(V_u(t) + \frac{1}{2}\right) \quad \text{при } a < t < b.$$

Таким образом, согласно теореме о дифференциальном неравенстве (см., например, [18], стр. 48), функция V_u ограничена в интервале $]a, b[$. Отсюда следует, что u можно продолжить за этот интервал. Лемма доказана.

Лемма 6.2. Пусть $u:]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ — решение уравнения (6.1), $u(t_0) = c$ и $u'(t_0) = 0$, где $t_0 \in]0, +\infty[$, а $c \in \{-1, 0, 1\}$. Тогда это решение — стационарное (т. е. $u(t) \equiv c$).

Доказательство. Ясно, что достаточно рассмотреть случай, когда $\lambda < 1$, $c = 0$. В этом случае из (6.3), (6.4) имеем

$$|V'_u(t)| \leqslant \frac{2|\gamma|}{t} V_u(t)$$

для всех t, достаточно близких к t_0. Значит, $V_u(t) \equiv 0$. Лемма доказана.

Лемма 6.3. Пусть $u:]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ — нестационарное решение уравнения (6.1). Тогда функция $V_u:]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ строго возрастает, если $\gamma<0$, тождественно равна постоянной, если $\gamma=0$, и строго убывает, если $\gamma>0$.

Это утверждение прямо следует из (6.4) и леммы 6.2.

Лемма 6.4. Если $u:]0,+\infty[\to\mathbf{R}$ — нетривиальное решение задачи (6.1), (6.2), то

$$V_u(+\infty)=u'(+\infty)=0, \ \operatorname{sign} V_u(t)\equiv\operatorname{sign}\gamma.$$

Доказательство. Согласно лемме 6.3, существует предел $V_u(+\infty)$. Таким образом, $V_u(+\infty)=u'(+\infty)=0$. Остается еще раз применить лемму 6.3.

6.2. Случай $\gamma>0$, $\lambda>1$. Отметим, что этот случай наиболее важен с точки зрения приложений.

Теорема 6.1. Пусть $\gamma>0$, $\lambda>1$, а $u:]0,+\infty[\to\mathbf{R}$ — нетривиальное решение задачи (6.1), (6.2). Тогда u — неколеблющееся,

$$u^{(i)}(t)\sim(-1)^i ct^{-\gamma/2}e^{-t} \text{ при } t\to+\infty \quad (i=0, 1) \tag{6.5}$$

и

$$I_1:I_2:I_3=[\gamma+3-\lambda(\gamma-1)]:[2(\lambda+1)]:[(\gamma+1)(\lambda-1)], \tag{6.7}$$

где c — ненулевая постоянная, а

$$I_1=\int_0^{+\infty} t^\gamma u^2(t)\,dt, \quad I_2=\int_0^{+\infty} t^\gamma|u(t)|^{\lambda+1}dt, \quad I_3=\int_0^{+\infty} t^\gamma u'^2(t)\,dt.$$

Из (6.7) прямо вытекает

Следствие. При $\gamma>1$ и $\lambda\geqslant(\gamma+3)/(\gamma-1)$ задача (6.1), (6.2) не имеет нетривиальных решений.

Доказательство теоремы 6.1. Если решение u задачи (6.1), (6.2) — колеблющееся, то существует точка $t_0\in]0,+\infty[$ такая, что $0<|u(t_0)|<1$, $u'(t_0)=0$, а значит, и $V_u(t_0)<0$, что противоречит лемме 6.4. Итак, u — неколеблющееся.

Далее, в силу (6.2) и леммы 6.4,

$$u'^2(t)\geqslant\frac{1}{4}u^2(t)$$

для всех достаточно больших t, что, как нетрудно проверить, влечет справедливость неравенства

$$|u(t)|\leqslant Ke^{-t/2} \text{ при } t>0,$$

где K — некоторая постоянная. Следовательно, по теореме Мателя (см., например, [18], стр. 107) линейное дифференциальное уравнение

$$v''=-\frac{\gamma}{t}v'+v-|u(t)|^{\lambda-1}v$$

имеет фундаментальную систему решений $(\tilde{v}, \tilde{v}_0)$ такую, что

$$\tilde{v}^{(i)}(t)\sim t^{-\gamma/2}e^t, \quad \tilde{v}_0^{(i)}(t)\sim(-1)^i t^{-\gamma/2}e^{-t} \text{ при } t\to+\infty \quad (i=0, 1). \tag{6.8}$$

Поскольку u также является решением этого уравнения и удовлетворяет (6.2), найдется отличная от нуля постоянная c, для которой $u(t)\equiv c\tilde{v}_0(t)$. Отсюда следует (6.6).

Наконец, подставив решение u в уравнение (6.1), умножив обе части полученного равенства на $t^{\gamma+1}u'(t)$, а затем проинтегрировав их на промежутке $]0,+\infty[$, с учетом (6.2) и (6.6) приходим к равенству

$$(\gamma+1)I_1-\frac{2(\gamma+1)}{\lambda+1}I_2+(\gamma-1)I_3=0. \tag{6.9}$$

То же, но с умножением на $t^{\gamma}u(t)$, дает равенство

$$I_1-I_2+I_3=0. \tag{6.10}$$

Из (6.9) и (6.10) следует (6.7). Теорема доказана.

Теорема 6.2. Если либо $\gamma>1$ и $1<\lambda<(\gamma+3)/(\gamma-1)$, либо $0<\gamma\leqslant 1$ и $\lambda>1$, то для любого целого неотрицательного l задача (6.1), (6.2) имеет решение $u:]0+\infty[\to\mathbf{R}$ равно с l нулями.

Доказательство. Пусть $l\in\{0,1,\ldots\}$. Построим последовательности $(t_n)_{n=1}^{+\infty}$ и $(T_n)_{n=1}^{+\infty}$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$0<t_n\leqslant\frac{1}{2},\quad 1\leqslant T_n<+\infty\quad (n=1,2,\ldots)$$

и

$$t_n\to 0,\ T_n\to+\infty \text{ при } n\to+\infty.$$

Тогда, согласно следствию 4 работы [98], для любого натурального n уравнение (6.1) при краевых условиях

$$u'(t_n)=0,\ u(T_n)=0$$

имеет решение u_n ровно с l нулями в $]t_n, T_n[$. Лемма 6.1 позволяет считать, что u_n задано на $]0,+\infty[$.

В силу леммы 3 из [98], существует постоянная η такая, что

$$|u_n(\tau_n)|+|u_n'(\tau_n)|\leqslant\eta\quad (n=1,2,\cdots),$$

где τ_n — некоторые точки сегмента $[{}^1/_2, 1]$. Таким образом, из (6.3) и леммы 6.3 имеем

$$V_{u_n}(t)\geqslant V_{u_n}(T_n)>0 \text{ при } 0<t\leqslant T_n\quad (n=1,2,\ldots) \tag{6.11}$$

и

$$V_{u_n}(t)\leqslant V_{u_n}(\tau_n)\leqslant\mu \text{ при } t\geqslant 1\quad (n=1,2,\ldots), \tag{6.12}$$

где

$$\mu=\frac{1}{2}\eta^2+\frac{1}{\lambda+1}\eta^{\lambda+1}.$$

Ввиду (6.12),

$$|u_n(t)|+|u_n'(t)|\leqslant r_0 \text{ при } t\geqslant 1\quad (n=1,2,\ldots), \tag{6.13}$$

где r_0 — некоторая постоянная. Докажем существование такой постоянной r, что

$$|u_n(t)| \leqslant r \text{ при } t \geqslant t_n \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{6.14}$$

Действительно, согласно (6.3)—(6.5),

$$V'_{u_n}(t) \geqslant -\frac{2\gamma}{t}\left(V_{u_n}(t)+\frac{1}{2}\right) \text{ при } t>0 \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Отсюда для любого натурального n, по теореме о дифференциальном неравенстве, имеем

$$0<V_{u_n}(t)+\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{t^{2\gamma}}\left(\mu+\frac{1}{2}\right) \text{ при } 0<t \leqslant 1,$$

а значит,

$$|u'_n(t)| \leqslant \frac{1}{t^{\gamma}} \sqrt{2\mu+1} \text{ при } 0<t \leqslant 1.$$

Если $\gamma<1$, то из последнего неравенства, учитывая (6.13), получаем (6.14) с

$$r=r_0+\frac{\sqrt{2\mu+1}}{1-\gamma}.$$

Если же $\gamma=1$, то, в силу того же неравенства, находим

$$|u_n(t)| \leqslant r_0-\sqrt{2\mu+1}\ln t \text{ при } 0<t \leqslant 1 \quad (n=1, 2, \ldots),$$

и, как вытекает из (6.1), в этом случае можно положить

$$r=r_0+\int_0^1 (1+r_0-\sqrt{2\mu+1}\ln t)^{\lambda}\, dt.$$

Теперь предположим, что $\gamma>1$. С помощью рассуждений, примененных при выводе (6.9) и (6.10), убеждаемся в справедливости равенств

$$(\gamma+1) I_{1n}-\frac{2(\gamma+1)}{\lambda+1} I_{2n}+(\gamma-1) I_{3n}=2\left(t_n^{\gamma+1} V_{u_n}(t_n)-V_{u_n}(1)\right)$$

и

$$I_{1n}-I_{2n}+I_{3n}=u'_n(1)\, u_n(1), \tag{6.15}$$

где $n \in \{1, 2, \ldots\}$,

$$I_{1n}=\int_{t_n}^1 t^{\gamma} u_n^2(t)\, dt, \quad I_{2n}=\int_{t_n}^1 t^{\gamma}\, |u_n(t)|^{\lambda+1}\, dt, \quad I_{3n}=\int_{t_n}^1 t^{\gamma} u'^2_n(t)\, dt.$$

Следовательно,

$$\frac{3+\gamma-\lambda(\gamma-1)}{\lambda+1} I_{2n}=2\left(I_{1n}-t_n^{\gamma+1} V_{u_n}(t_n)+V_{u_n}(1)\right)+$$
$$+(\gamma-1)\, u'_n(1)\, u_n(1).$$

С другой стороны, согласно неравенству Гёльдера,

$$I_{1n} \leqslant I_{2n}^{2/(\lambda+1)}.$$

Эти соотношения, в силу (6.11)—(6.13) и условий доказываемой теоремы, влекут существование такой постоянной Q, что

$$I_{2n} \leqslant Q \ (n=1, 2, \ldots).$$

Тогда, в силу (6.13) и (6.15),

$$I_{1n} + I_{3n} \leqslant r_0^2 + Q \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{6.16}$$

Зададим натуральное n и обозначим через v_n и v_0 решения линейного уравнения

$$v'' = -\frac{\gamma}{t} v' + v, \tag{6.17}$$

удовлетворяющие условиям

$$v_n(t_n) = 1, \quad v_n'(t_n) = 0, \quad v_0(1) = 0, \quad v_0'(1) = 1.$$

Так как

$$v_n(t) > 1, \quad v_n'(t) > 0 \text{ при } t > t_n, \tag{6.18}$$

имеем $v_n''(t) \leqslant v_n(t)$ и, по теореме о дифференциальном неравенстве,

$$v_n(t) \leqslant \frac{1}{2}(e^{t-t_n} + e^{t_n - t}) \leqslant 2 \quad \text{при } t_n \leqslant t \leqslant 1. \tag{6.19}$$

Далее,

$$v_0(t) < 0, \quad v_0'(t) > 1 \text{ при } 0 < t < 1$$

и

$$v_0(t) = \frac{1}{\gamma-1}\left[1 - \frac{1}{t^{\gamma-1}} + \int_t^1 \left(\frac{1}{t^{\gamma-1}} - \frac{1}{s^{\gamma-1}}\right) v_0(s)\, s^\gamma\, ds\right].$$

Следовательно,

$$t^{\gamma-1} |v_0(t)| \leqslant \frac{1}{\gamma-1}\left(1 + \int_t^1 |v_0(s)|\, s^\gamma\, ds\right) \quad \text{при } 0 < t \leqslant 1.$$

В силу леммы Гронуолла—Беллмана (см., например, [18], стр. 49), получаем

$$|v_0(t)| \leqslant \frac{d}{t^{\gamma-1}} \quad \text{при } 0 < t \leqslant 1, \tag{6.20}$$

где

$$d = \frac{1}{\gamma-1} \exp\left(\frac{1}{2(\gamma-1)}\right).$$

Заметим, что (6.17) не имеет нетривиальных решений, удовлетворяющих краевыми условиям $v'(t_n) = 0$, $v(1) = 0$. Значит, по формуле Грина,

$$u_n(t)=\frac{1}{v_n(1)}\left[u_n(1)\,v_n(t)-v_0(t)\int_{t_n}^{t} v_n(\tau)\,\tau^{\gamma}\,|u_n(\tau)|^{\lambda-1}u_n(\tau)\,d\tau-\right.$$
$$\left.-v_n(t)\int_{t}^{1} v_0(\tau)\,\tau^{\gamma}\,|u_n(\tau)|^{\lambda-1}u_n(\tau)\,d\tau\right] \quad \text{при } t_n\leqslant t\leqslant 1.$$

Отсюда, ввиду (6.13) и (6.18)—(6.20),

$$|u_n(t)|\leqslant 2r_0+2d\left(\frac{1}{t^{\gamma-1}}\int_{t_n}^{t}\tau^{\gamma}\,|u_n(\tau)|^{\lambda}\,d\tau+\int_{t}^{1}\tau\,|u_n(\tau)|^{\lambda}\,d\tau\right) \tag{6.21}$$
$$\text{при} \quad t_n\leqslant t\leqslant 1.$$

Подберем положительное число ε, удовлетворяющее неравенству

$$\varepsilon<\frac{3+\gamma-\lambda(\gamma-1)}{2}. \tag{6.22}$$

В силу условий доказываемой теоремы, правая часть этого неравенства положительна, а значит, выбор ε возможен.

Положим

$$\nu_j=\frac{\gamma-1}{2}-\varepsilon(j-1) \quad (j=1,\ldots,k),$$
$$Q_1=r_0+\sqrt{\frac{r_0^2+Q}{\gamma-1}}, \quad Q_{j+1}=2r_0+\frac{2Q_j^{\lambda}d}{2-\varepsilon-(\lambda-1)\nu_1} \quad (j=1,\ldots,k), \tag{6.23}$$

где k — наименьшее натуральное число такое, что

$$k\geqslant\frac{\gamma-1}{2\varepsilon}.$$

Заметим, что, согласно (6.13), (6.16), (6.23) и неравенству Коши — Буняковского,

$$|u_n(t)|\leqslant|u_n(1)|+\int_{t}^{1}|u_n'(\tau)|\,d\tau\leqslant r+\left(I_{3n}\int_{t}^{1}\tau^{-\gamma}d\tau\right)^{1/2}\leqslant Q_1t^{-\nu_1}$$
$$\text{при } t_n\leqslant t\leqslant 1.$$

Предположим, что $k>1$, $j\in\{1,\ldots,k-1\}$ и

$$|u_n(t)|\leqslant Q_jt^{-\nu_j} \quad \text{при} \quad t_n\leqslant t\leqslant 1.$$

Тогда, ввиду (6.21)—(6.23),

$$|u_n(t)|\leqslant 2r_0+2Q_j^{\lambda}d\left(\frac{1}{t^{\gamma-1}}\int_{t_n}^{t}\tau^{\gamma-\lambda\nu_j}d\tau+\int_{t}^{1}\tau^{1-\lambda\nu_j}d\tau\right)\leqslant$$
$$\leqslant 2r_0+2Q_j^{\lambda}dt^{-\nu_{j+1}}\int_{0}^{1}\tau^{1-\varepsilon-(\lambda-1)\nu_1}d\tau\leqslant Q_{j+1}t^{-\nu_{j+1}} \quad \text{при} \quad t_n\leqslant t\leqslant 1.$$

Отсюда следует, что

$$|u_n(t)| \leqslant Q_k t^{-\nu_k} \quad \text{при} \quad t_n \leqslant t \leqslant 1.$$

Вновь применяя (6.21)—(6.23), получаем

$$|u_n(t)| \leqslant Q_{k+1} \text{ при } t_n \leqslant t \leqslant 1.$$

Это, в силу (6.13) и неравенства $Q_{k+1} > r_0$, означает справедливость (6.14) с $r = Q_{k+1}$.

Таким образом, существование постоянной r, для которой верна оценка (6.14), доказано для всех допустимых значений γ и λ.

Как следует из (6.14) и определения u_n,

$$|u_n'(t)| \leqslant (1+r)^\lambda t \quad \text{при} \quad t \geqslant t_n \; (n=1, 2, \ldots). \tag{6.24}$$

Значит, не нарушая общности, можно допустить существование такого решения $u:]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ уравнения (6.1), что $u'(0+)=0$, u и u' — соответственно равномерные пределы последовательностей $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ и $(u_n')_{n=1}^{+\infty}$ на каждом сегменте из $]0, +\infty[$ и, кроме того, $u_n(t_n) \to u(0+)$ при $n \to +\infty$. Поскольку, ввиду (6.11),

$$|u_n(t_n)| > \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^{\frac{1}{\lambda-1}} \quad (n=1, 2, \ldots), \tag{6.25}$$

решение u не является тождественным нулем.

Заметим, что число нулей u на $[0, +\infty[$ не может превышать l, ибо в противном случае u_n при достаточно больших n также имели бы более l нулей. Следовательно, u не меняет знака в некоторой окрестности $+\infty$.

Если решение u не является монотонным при достаточно больших значениях аргумента, то найдется точка $\tilde{t} \in]0, +\infty[$, для которой $u'(\tilde{t})=0$ и $u''(\tilde{t})\, u(\tilde{t}) \geqslant 0$. Согласно (6.1), в этом случае $|u(\tilde{t})| \leqslant 1$ и поэтому $V_u(\tilde{t}) < 0$. Последнее неравенство противоречит (6.11), так как

$$V_{u_n}(t) \to V_u(t) \quad \text{при} \quad n \to +\infty \tag{6.26}$$

равномерно на любом сегменте, содержащемся в $]0, +\infty[$.

Итак, u монотонно в некоторой окрестности $+\infty$. Ввиду (6.14), существует конечный предел $u(+\infty)$. С другой стороны, по лемме 6.3, предел $V_u(+\infty)$ также существует. Значит, ввиду (6.1) и (6.3), $u'(+\infty)=0$ и $u(+\infty) \in \{-1, 0, 1\}$. Но если $|u(+\infty)|=1$, то $V_u(t) < 0$ при достаточно больших t, что как мы уже видели, невозможно в силу (6.11) и (6.26). Следовательно, u удовлетворяет краевым условиям (6.2).

Остается проверить, что u имеет ровно l нулей на $]0, +\infty[$. По теореме 6.1, существует такое число K, что

$$|u(t)| < Ke^{-t} \text{ при } t > 0.$$

Согласно упоминавшейся выше теореме Мателя, уравнение (6.17) имеет фундаментальную систему решений $(\tilde{v}, \tilde{v}_0)$, удовлетворяющую (6.8). Не нарушая общности, можно считать, что

$$\tilde{v}'(1)=0. \tag{6.27}$$

Тогда

$$mt^{-\gamma/2}e^t \leqslant \tilde{v}(t) \leqslant Mt^{-\gamma/2}e^t \quad \text{при} \quad t \geqslant 1, \tag{6.28}$$

где m и M — положительные постоянные.

Пусть $\alpha \in]0, 1[$ и $\alpha\lambda > 1$. Подберем число T_0 так, чтобы выполнялись неравенства

$$T_0 \geqslant 2^{\gamma+1}\sqrt{\frac{\lambda+1}{\gamma(\lambda-1)}}, \tag{6.29}$$

$$u(T_0)\,u'(T_0) < 0, \quad |u(T_0)| < (1-\alpha^2)^{1/(\lambda-1)}$$

и

$$L\sqrt{t}e^{-t} \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\gamma(\lambda-1)}{(r_0+1)(\lambda+1)}} \quad \text{при} \quad t \geqslant T_0, \tag{6.30}$$

где

$$L = \frac{M}{m}\left(r_0 e + K\int_1^{+\infty} t^{\lambda/2}e^{(1-\alpha\lambda)t}\,dt\right). \tag{6.31}$$

Очевидно,

$$u_n(T_0)\,u_n'(T_0) < 0, \quad |u_n(T_0)| \leqslant (1-\alpha^2)^{1/(\lambda-1)} \tag{6.32}$$

и

$$|u_n(t)| \leqslant Ke^{-t} \quad \text{при} \quad 1 \leqslant t \leqslant T_0, \tag{6.33}$$

сли только $n \geqslant n_0$ и n_0 — достаточно большое натуральное число.

Зафиксируем $n \in \{n_0, n_0+1, \ldots\}$ и обозначим через s_0 наименьший нуль u_n в промежутке $]T_0, T_n]$. Как следует из (6.11) и (6.32),

$$u_n(t)\,u_n'(t) < 0, \quad |u_n(t)| \leqslant (1-\alpha^2)^{/(\lambda-1)} \quad \text{при} \quad T_0 \leqslant t \leqslant s_0.$$

Отсюда

$$u_n'^2(t) \geqslant \alpha^2 u_n^2/(t) \quad \text{при} \quad T_0 \leqslant t \leqslant s_0,$$

и, согласно (6.33), получаем:

$$|u_n(t)| \leqslant |u_n(T_0)|\,e^{-\alpha(t-T_0)} \leqslant Ke^{-\alpha t} \quad \text{при} \quad T_0 \leqslant t \leqslant s_0. \tag{6.34}$$

Заметим, что уравнение (6.17) не имеет нетривиальных решений, удовлетворяющих краевым условиям $v'(1)=0$, $v(s_0)=0$. Поэтому

$$u_n(t) = \frac{u_n'(1)}{\tilde{v}_1'(1)}\tilde{v}_1(t) - \frac{1}{\tilde{v}(1)\,\tilde{v}_1'(1)}\left[\tilde{v}(t)\int_1^t \tilde{v}(\tau)\,\tau^\gamma\,|u_n(\tau)|^{\lambda-1}u_n(\tau)\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \tilde{v}(t)\int_t^{s_0}\tilde{v}_1(\tau)\,\tau^\gamma\,|u_n(\tau)|^{\lambda-1}u_n(\tau)\,d\tau\right] \quad \text{при} \quad 1 \leqslant t \leqslant s_0, \tag{6.35}$$

где

$$\tilde{v}_1(t) = \tilde{v}(s_0)\tilde{v}_0(t) - \tilde{v}_0(s_0)\tilde{v}(t).$$

Ввиду (6.27) и (6.28),

$$|\tilde{v}_1'(1)| = |\tilde{v}(s_0)\tilde{v}_0'(1)| \geqslant m s_0^{-\gamma/2} e^{s_0} |\tilde{v}_0'(1)|.$$

С другой стороны, по формуле Лиувилля,

$$\tilde{v}_1'(s_0) = \tilde{v}(1)\tilde{v}_0'(1) s_0^{-\gamma}.$$

Таким образом, с учетом (6.13), (6.28) и (6.33)—(6.35) имеем

$$|u_n'(s_0)| \leqslant L s_0^{-\gamma/2} e^{-s_0}, \tag{6.36}$$

где L определено равенством (6.31).

Предположим, что $s_0 < T_n$. Тогда из определения u_n следует существование точки $s_1 \in]s_0, T_n[$, удовлетворяющей условиям

$$|u_n(s_1)| = 1, \quad 0 < |u_n(t)| < 1 \text{ при } s_0 < t < s_1. \tag{6.37}$$

Согласно (6.1),

$$u_n(t) u_n'(t) > 0 \text{ при } s_0 < t \leqslant s_1. \tag{6.38}$$

Пусть τ — точка минимума функции $|u_n'|$ на сегменте $[s_0, s_1]$. В силу (6.3) и (6.11),

$$u_n'^2(t) > u_n^2(t) - \frac{2}{\lambda+1}|u_n(t)|^{\lambda+1} \geqslant \frac{\lambda-1}{\lambda+1} u_n^2(t) \text{ при } s_0 \leqslant t \leqslant s_1, \tag{6.39}$$

т. е.

$$|u_n'(\tau)| > |u_n(\tau)| \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} \geqslant |u_n'(\tau)|(\tau - s_0)\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}.$$

Ввиду (6.29),

$$\frac{s_0}{\tau} > \frac{1}{2}.$$

Далее, из (6.1), (6.37) и (6.38) имеем

$$\frac{d}{dt}|u_n'(t)| \geqslant -\frac{\gamma}{t}|u_n'(t)| \text{ при } s_0 \leqslant t \leqslant s_1.$$

Поэтому

$$\frac{|u_n'(\tau)|}{|u_n'(s_0)|} \geqslant \left(\frac{s_0}{\tau}\right)^{\gamma} > \frac{1}{2^{\gamma}}. \tag{6.40}$$

В силу (6.30), (6.36) и (6.37), существует $s \in]s_0, s_1[$ такая, что

$$\sqrt{\frac{\lambda+1}{\gamma(\lambda-1)}}\, u_n'(s_0) = u_n(s). \tag{6.41}$$

Учитывая (6.40) и неравенство

$$|u_n(s)| \geqslant |u_n'(\tau)|(s - s_0),$$

получаем

$$\sqrt{\frac{\lambda+1}{\gamma(\lambda-1)}}\,|u_n'(s_0)|>\frac{1}{2^\gamma}\,|u_n'(s_0)|\,(s-s_0).$$

Значит, согласно (6.29),

$$\frac{s_0}{s}>\frac{1}{2}. \tag{6.42}$$

Как следует из (6.38), (6.39), (6.41) и леммы 6.3,

$$u_n'^2(t)>u_n^2(s)\,\frac{\lambda-1}{\lambda+1}=\frac{1}{\gamma}\,u_n'^2(s_0)=\frac{2}{\gamma}\,V_{u_n}(s_0)>\frac{2}{\gamma}\,V_{u_n}(t)$$

$$\text{при } s\leqslant t\leqslant s_1.$$

Отсюда

$$V'_{u_n}(t)=-\frac{\gamma}{t}\,u_n'^2(t)<-\frac{1}{t}\,V_{u_n}(t)-\frac{\gamma(\lambda-1)}{2t(\lambda+1)}\,u_n^2(t)\quad\text{при}\quad s\leqslant t\leqslant s_1,$$

и, по теореме о дифференциальном неравенстве,

$$V_{u_n}(s_1)<\frac{s}{s_1}\left[V_{u_n}(s)-\frac{\gamma(\lambda-1)}{2s(\lambda+1)}\int_s^{s_1}u_n^2(\tau)\,d\tau\right]. \tag{6.43}$$

Ввиду (6.30), (6.36) и (6.41), существует $s_2\in]s,\,s_1[$ такая, что

$$|u_n(s_2)|=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}\leqslant|u_n(t)|\leqslant 1\quad\text{при}\quad s_2\leqslant t\leqslant s_1.$$

Согласно (6.13),

$$s_1-s_2\geqslant\frac{1}{2r_0}.$$

Таким образом, применяя (6.30), (6.36), (6.42), (6.43) и лемму 6.3, получаем

$$V_{u_n}(s_1)<\frac{1}{s_1}\left[L^2 s_0^{1-\gamma}e^{-2s_0}-\frac{\gamma(\lambda-1)}{16r_0(\lambda+1)}\right]\leqslant 0,$$

что противоречит (6.11). Следовательно, $s_0=T_n$, т. е. при $n\geqslant n_0$ решение u_n не имеет нулей в $]T_0,\,T_n[$.

С другой стороны, с помощью (6.24) и (6.25) заключаем, что для некоторого $t_0>0$ нули $u_n\,(n=1,2,\cdots)$ не могут принадлежать и $]t_n,\,t_0[$. Итак, u имеет ровно l нулей на $]0,\,+\infty[$. Теорема доказана.

6.3. Другие случаи. При $\gamma\leqslant 0$ и $\lambda>1$ вопрос о разрешимости задачи (6.1), (6.2) решается довольно просто.

Теорема 6.3. Пусть $\gamma=0$, $\lambda>1$, а $u_0:\,]0,\,+\infty[\to\mathbf{R}$ — решение уравнения (6.1) при начальных условиях

$$u(0+)=\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^{1/(\lambda-1)},\quad u'(0+)=0.$$

Тогда u_0 монотонно убывает, $u_0(+\infty)=0$ и задача (6.1), (6.2) не имеет нетривиальных решений, отличных от u_0 и $-u_0$.

Доказательство. Согласно лемме 6.3, $V_{u_0}(t) \equiv \equiv V_{u_0}(0+)=0$. Отсюда следует, что u_0 убывает и $u_0(+\infty)=0$.

Далее, если u — нетривиальное решение задачи (6.1), (6.2), то, по лемме 6.4, $V_u(t)\equiv 0$, т. е. $|u(0+)|=u_0(0+)$. Теорема доказана.

Теорема 6.4. Пусть $\gamma<0$ и $\lambda>1$. Тогда нетривиальные решения задачи (6.1), (6.2) не обращаются в нуль на $]0, +\infty[$, причем для любых $t_0 \in \mathbf{R}_+$ и $u_0 \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ существует решение u этой задачи такое, что

$$u(t_0+)=u_0,\quad u(t)\,u'(t)<0 \text{ при } t>t_0. \tag{6.44}$$

Доказательство. Первая часть заключения теоремы вытекает из леммы 6.4.

Если $t_0 \in \mathbf{R}_+$ и $u_0 \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, то, в силу теоремы 5.8_1 и леммы 6.1, уравнение (6.1) имеет решение $u:]0, +\infty[\to \mathbf{R}$, удовлетворяющее условиям (6.44). Очевидно, $u(+\infty)=u'(+\infty)=0$.

По лемме 6.3, $V_u(t)<V_u(+\infty)=0$. Отсюда

$$|u(t)|<\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^{1/(\lambda-1)} \text{ при } t>0,$$

и, решая уравнение (6.1) как линейное относительно u', убеждаемся, что $u'(0+)=0$. Теорема доказана.

Замечание. Полагая в (6.44) $t_0=0$, мы получаем решение, монотонное на всем $]0, +\infty]$. Но при $\gamma<0$ и $\lambda>1$ задача (6.1), (6.2) может иметь и немонотонные решения. Например, легко проверить, что если $\gamma<-1$, $t_0>0$, а $u_0=1$, то решения (6.1), (6.44) не являются монотонными на $]0, +\infty[$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\lambda\leqslant 1$. Из леммы 3 работы [98] и приведенной выше леммы 6.4 вытекает следующая

Лемма 6.5. Если $\lambda<1$, то все нетривиальные решения задачи (6.1), (6.2) колеблются.

Теорема 6.5. Пусть $\gamma>0$ и $\lambda<1$. Тогда для любого $u_0 \in]-1, 1[$ существует решение u задачи (6.1), (6.2) такое, что $u(0+)=u_0$. Более того, если u — нетривиальное решение задачи (6.1), (6.2), то u колеблется и $u(0+)\in]-1, 1[\setminus\{0\}$.

Доказательство. Зададим $u_0 \in]-1, 1[\setminus\{0\}$. Согласно следствию теоремы 5.1 из [18], уравнение (6.1) имеет решение $u:]0, +\infty[\to\mathbf{R}$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(0+)=u_0,\quad u'(0+)=0.$$

Если $t_0 0>$ и при этом $|u_0|\leqslant|u(t_0)|<1$, то $V_u(t_0)\geqslant \geqslant V_u(0+)$, что противоречит лемме 6.3. Поэтому

$$|u(t)|<|u_0|<1 \text{ при } t>0, \tag{6.45}$$

определенная равенством (6.3) функция V_u положительна на $]0, +\infty[$ и по лемме 6.3, существует конечный предел $\beta= =V_u(+\infty)$. Следовательно,

$$0\leqslant\beta<V_u(t)<V_u(0+) \text{ при } t>0. \tag{6.46}$$

Пусть u не является колеблющимся. Тогда, в силу (6.1) и (6.45), u монотонно в некоторой окрестности $+\infty$ и $u(+\infty)=0$. Это, согласно лемме 6.5, противоречит нашему допущению, так что u колеблется.

Положим

$$T=\frac{2^{\lambda+1}\gamma}{\beta^{\lambda}\left(1-u_0^{1-\lambda}\right)}. \tag{6.47}$$

Из (6.46) имеем

$$u'^2(t_n)>2\beta \quad (n=1, 2, \ldots), \tag{6.48}$$

где $T\leqslant t_1<t_2<\ldots$ и

$$u(t_n)=0, \quad u(t)\neq 0 \text{ при } t_n<t<t_{n+1} \ (n=1, 2, \ldots).$$

Обозначим через s_{1n} и s_{2n} точки полуоси $\mathbf{R}_+$, удовлетворяющие условиям

$$s_{1n}<t_n<s_{2n}, \ u'^2(s_{jn})=\beta, \quad u'^2(t)>\beta \text{ при } s_{1n}<t<s_{2n} \tag{6.49}$$
$$(j=1, 2; \ n=1, 2, \ldots).$$

Согласно (6.1) и (6.45),

$$|u'(t_n)|\leqslant|u'(s_{1n})|+t_n-s_{1n} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Поэтому, учитывая (6.48) и (6.49), получаем

$$s_{2n}-s_{1n}>t_n-s_{1n}\geqslant\sqrt{\beta}\left(\sqrt{2}-1\right) \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{6.50}$$

Далее, из (6.45), (6.46) и (6.49) вытекает, что

$$\frac{\beta}{2}<\frac{1}{\lambda+1}|u(s_{jn})|^{\lambda+1}-\frac{1}{2}u^2(s_{jn})<|u(s_{jn})| \quad (j=1, 2; \ n=1, 2, \ldots).$$

Так как u' обращается в нуль на $[s_{2n}, s_{1n+1}]$ лишь однажды

$$|u(t)|>\frac{\beta}{2} \text{ при } s_{2n}\leqslant t\leqslant s_{1n+1} \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{6.51}$$

Заметим, что, в силу (6.46),

$$u'^2(t)\leqslant 2V_u(0+)<1 \text{ при } t>0.$$

Следовательно, из (6.1), (6.45), (6.46) и (6.51) имеем

$$|u''(t)|>\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\lambda}(1-u_0^{1-\lambda})-\frac{\gamma}{T}=\frac{\beta^{\lambda}}{2^{\lambda+1}}(1-u_0^{1-\lambda}) \text{ при } s_{2n}\leqslant t\leqslant s_{1n+1}$$
$$(n=1, 2, \ldots).$$

Отсюда, ввиду (6.49),

$$\sqrt{\beta}>\frac{\beta^{\lambda}}{2^{\lambda+1}}(1-u_0^{1-\lambda})|\eta_n-s_{jn+2-j}| \quad (j=1, 2; \ n=1, 2, \ldots),$$

где $\eta_n\in[s_{2n}, s_{1n+1}]$ и $u'(\eta_n)=0$. Итак,

$$s_{1n+1}-s_{2n}<\frac{2^{\lambda+1}\sqrt{\beta}}{\beta^{\lambda}\left(1-u_0^{1-\lambda}\right)} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Согласно (6.45) и (6.49),

$$\sqrt{\beta}(s_{2n}-s_{1n})<|u(s_{2n})-u(s_{1n})|<2 \quad (n=1, 2, \ldots),$$

т. е.

$$s_{2n}-s_{1n}<\frac{2}{\sqrt{\beta}} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Значит,

$$s_{1n+1}-s_{1n}<\xi \quad (n=1, 2. \ldots), \tag{6.52}$$

где

$$\xi=\frac{2^{\lambda+2}\sqrt{\beta}}{\beta^{\lambda}\left(1-u_0^{1-\lambda}\right)}+\frac{2}{\sqrt{\beta}}.$$

Из (6.4) с помощью (6.49), получаем:

$$V_u(t)<V_u(0+)-\beta\gamma\sum_{n=1}^{m(t)}\ln\frac{s_{2n}}{s_{1n}} \text{ при } t>0, \tag{6.53}$$

причем $m(t)=\max\{n: s_{2n}\leqslant t\}$. В силу (6.50) и (6.52),

$$\frac{s_{2n}-s_{1n}}{s_{1n}}\geqslant\frac{\sqrt{\beta}(\sqrt{2}-1)}{s_{11}+(n-1)\xi} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Если $\beta>0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(s_{2n}-s_{1n})/s_{1n}$ расходится и, согласно (6.53), $V_u(t)<0$ при достаточно больших t, что противоречит (6.46). Таким образом, $\beta=0$, т. е. u удовлетворяет краевым условиям (6.2).

Рассмотрим теперь произвольное нетривиальное решение u задачи (6.1), (6.2). Согласно леммам 6.3 и 6.5, u колеблется и $u(0+)\neq0$. Если допустить, что $|u(0+)|>1$, то из (6.1) получим соотношение $u(t)u'(t)>0$ при $t>0$, противоречащее определению u. Равенство $|u(0+)|=1$ также невозможно, поскольку приводит к тождеству $|u(t)|\equiv1$ (см., например, теорему 5.2 из [18]). Следовательно, $u(0+)\in]-1, 1[\setminus\{0\}$. Теорема доказана.

Чтобы завершить рассмотрение всех интересующих нас значений γ и λ, остается доказать следующее утверждение.

Теорема 6.6. Если либо $\lambda<1$ и $\gamma\leqslant0$, либо $\lambda=1$, то задача (6.1), (6.2) не имеет нетривиальных решений.

Доказательство. Пусть $\lambda<1$ и $\gamma\leqslant0$, а $u:]0, +\infty[\to\mathbf{R}$ — нетривиальное решение задачи (6.1), (6.2). По лемме 6.5, u — колеблющееся. Тогда, в силу леммы 6.2, определенная равенством (6.3) функция V_u принимает положительные значения в любой окрестности $+\infty$. Это, однако, противоречит лемме 6.4.

При $\lambda=1$ достаточно рассмотреть общее решение уравнения (6.1), которое в этом случае выписывается явно. Теорема доказана.

Обзор работ, посвященных задачам типа (6.1), (6.2), содержится в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амирханов И. В., Жидков Е. П.*, Некоторые вопросы существования и качественного поведения частицеподобных решений. Közp. fiz. kut. intéz. [Publ.], 1979, № 82, 165—180 (РЖМат, 1980, 6Б618)
2. *Балабаев Н. К., Лахно В. Д., Молчанов А. М.*, Возбужденные самосогласованные состояния электронов в гомеополярных кристаллах. Препр. Науч. центр биол. исслед. АН СССР. Пущино, 1983. 16 с.
3. *Бернштейн С. Н.*, Об уравнениях вариационного исчисления. Успехи мат. наук, 1940, *8*, № 1, 32—74
4. *Васильев Н. И., Клоков Ю. А.*, Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: Зинатне, 1978, 183 с.
5. —, *Ломакина А. И.*, Об одной двухточечной краевой задаче с несуммируемой особенностью. Дифференц. уравнения, 1978, *14*, № 2, 195—200 (РЖМат, 1978, 6Б199)
6. *Гаприндашвили Г. Д.*, Об одной краевой задаче для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностями. Дифференц. уравнения, 1984, *20*, № 9, 1514—1523 (РЖМат, 1985, 1Б340)
7. *Гогиберидзе Н. В., Кигурадзе И. Т.*, К вопросу неосцилляционности сингулярных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Дифференц. уравнения, 1974, *10*, № 11, 2064—2067 (РЖМат, 1975, 4Б270)
8. *Гудков В. В., Клоков Ю. А., Лепин А. Я., Пономарев В. Д.*, Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: Зинатне, 1973, 135 с. (РЖМат, 1974, 1Б184К)
9. *Жидков Е. П., Шириков В. П.*, Об одной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1964, *4*, № 5, 804—816 (РЖМат, 1965, 3Б291)
10. *Квиникадзе Г. Г.*, Об одной сингулярной краевой задаче для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В кн.: IX Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Т. 1. Киев; Наук. думка, 1984, 166—168 (РЖМат, 1985, 7Б298)
11. *Кигурадзе И. Т.*, О задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностями. Сообщ. АН ГССР, 1965, *37*, № 1, 19—24 (РЖМат, 1965, 6Б191)
12. —, О задаче Коши для сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференц. уравнения, 1965, *1*, № 10, 1271—1291 (РЖМат, 1966, 2Б265)
13. —, Об априорных оценках производных ограниченных функций, удовлетворяющих дифференциальным неравенствам второго порядка. Дифференц. уравнения, 1967, *3*, № 7, 1043—1052 (РЖМат, 1968, 5Б252)
14. —, О некоторых сингулярных краевых задачах для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Дифференц. уравнения, 1968, *4*, № 10, 1753—1773 (РЖМат, 1969, 3Б222)
15. —, О сингулярной двухточечной краевой задаче. Дифференц. уравнения, 1969, *5*, № 11, 2002—2016 (РЖМат, 1970, 4Б308)
16. —, Об условиях неосцилляционности сингулярных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Мат. заметки, 1969, *6*, № 5, 633—639 (РЖМат, 1970, 4Б265)
17. —, О монотонных решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1969, *33*, № 6, 1373—1398 (РЖМат, 1970, 4Б283)

50

18. —, Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1975, 352 с. (РЖМат, 1975, 6Б395К)
19. —, О разрешимости краевой задачи Валле Пуссена. Дифференц. уравнения, 1985, *21*, № 3, 391—397 (РЖМат, 1985, 8Б275)
20. —, *Рахункова И.*, О разрешимости нелинейной задачи типа Кнезера. Дифференц. уравнения, 1979, *15*, № 10, 1754—1765 (РЖМат, 1980, 1Б299)
21. *Клоков Ю. А.*, Метод решения предельной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Мат. сб., 1961, *53*, № 2, 219—232 (РЖМат, 1961, 10Б104)
22. —, Краевые задачи с условием на бесконечности для уравнений математической физики. Рига: РИИГВФ, 1963, 107 с. (РЖМат, 1965, 12Б200)
23. —, *Ломакина А. И.*, Об одной краевой задаче с особенностями на концах отрезка. Латв. мат. ежегодник, 1976, *17*, 179—186 (РЖМат, 1976, *11Б309*)
24. *Коршикова Н. Л.*, О нулях решений линейных уравнений высоких порядков. В сб. Дифференц. уравнения и их прил. М.: Изд-во МГУ, 1984, 143—148 (РЖМат, 1985, 1Б310)
25. —, О нулях решений одного класса линейных уравнений n-го порядка. Дифференц. уравнения, 1985, *21*, № 5, 757—764 (РЖМат, 1985, 10Б236)
26. *Красносельский М. А.*, Об одной краевой задаче. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1956, *20*, № 2, 241—252 (РЖМат, 1957, 2309)
27. —, *Крейн М. Г.*, О принципе усреднения в нелинейной механике. Успехи мат. наук, 1955, *10*, № 3, 147—152 (РЖМат, 1956, 4493)
28. —, *Перов А. И.*, *Поволоцкий А. И.*, *Забрейко П. П.*, Векторные поля на плоскости. М.: Физматгиз, 1963, 245 с. (РЖМат, 1964, 6Б537К)
29. *Лепин А. Я.*, Существование решения нелинейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка с особенностью на концах. Латв. мат. ежегодник, 1968, *4*, 215—230
30. *Лепин Л. А.*, Обобщенное решение и разрешимость краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка. Дифференц. уравнения, 1982, *18*, № 8, 1323—1330 (РЖМат, 1982, 12Б355)
31. —, Метод нижних и верхних функций для дифференциальных уравнений второго порядка на открытых и полуоткрытых интервалах. Докл. расшир. заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа, 1985, *1*, № 3, 81—84 (РЖМат, 1986, 6Б352)
32. *Логунов А. А.*, *Власов А. А.*, Пространство Минковского как основа физической теории гравитации. М.: Изд-во МГУ, 1984, 9 с.
33. *Ломтатидзе А. Г.*, Об одной краевой задаче для линейных дифференциальных уравнений с неинтегрируемыми особенностями. Тр. Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа, 1983, *14*, 136—144
34. —, Об одной сингулярной краевой задаче для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. В сб. Краевые задачи. Пермь: Пермск. политехн. ин-т, 1984, 46—50 (РЖМат, 1985, 3Б304)
35. —, О разрешимости краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с особенностями. Докл. расшир. заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа, 1985, *1*, № 3, 85—92 (РЖМат, 1986, 6Б353)
36. —, Об осцилляционных свойствах решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Докл. семинара Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа, 1985, *19*, 39—53
37. —, Об одной краевой задаче для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярностями. Дифференц. уравнения, 1986, *22*, № 3, 416—426 (РЖМат, 1986, 8Б278)
38. —, Об одной сингулярной трехточечной краевой задаче. Тр. Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа, 1986, *17*, 122—134 (РЖМат, 1986, 10Б266)
39. —, О положительных решениях сингулярных краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Дифференц. уравнения, 1986, *22*, № 6, 1092 (РЖМат, 1986, 11Б201)

40. *Моисеев Е. И., Садовничий В. А.*, О решении одного нелинейного уравнения в теории гравитации на основе пространства Минковского. М.: Изд-во МГУ, 1984, 45 с.
41. —, —, Исследование решения одного нелинейного уравнения теории гравитации. Докл. АН СССР, 1985, *282*, № 4, 845—847 (РЖМат, 1985, 12Б558)
42. —, —, Решение одной задачи для нелинейного уравнения теории гравитации. Докл. АН СССР, 1985, *284*, № 4, 835—837
43. —, —, О краевых задачах для одного нелинейного уравнения теории гравитации. М.: Изд-во МГУ, 1986, 86 с.
44. *Морозов Н. Ф.*, Об аналитической структуре решения мембранного уравнения. Докл. АН СССР, 1963, *152*, № 1, 78—80 (РЖМат, 1964, 2Б267)
45. —, *Срубщик Л. С.*, Применение метода Чаплыгина к исследованию уравнения мембраны. Дифференц. уравнения, 1966, *2*, № 3, 425—427 (РЖМат, 1966, 9Б209)
46. *Мышкис А. Д., Щербина Г. В.*, Об одной предельной краевой задаче, не удовлетворяющей условию С. Н. Бернштейна и имеющей приложения в теории капиллярных явлений. Дифференц. уравнения, 1976, *12*, № 6, 991—998 (РЖМат, 1976, 11Б307)
47. *Перов А. И.*, О двухточечной краевой задаче. Докл. АН СССР, 1958, *122*, № 6, 982—985 (РЖМат, 1959, 6889)
48. —, О краевой задаче для системы двух дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1962, *144*, № 3, 493—496 (РЖМат, 1962, 12Б177)
49. —, О сингулярной задаче Коши. Тр. семинара по функц. анализу, Воронежск. ун-т, 1963, *7*, 104—107 (РЖМат, 1964, 7Б208)
50. *Рахункова И.*, О задаче Кнезера для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Сообщ. АН ГССР, 1979, *94*, № 3, 545—548 (РЖМат, 1979, 12Б253)
51. *Сансоне Дж.*, Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 2. М.: ИЛ, 1954, 415 с. (РЖМат, 1955, 2670К)
52. *Срубщик Л. С., Юдович В. И.*, Асимптотика уравнения большого прогиба круглой симметрично загруженной пластины. Сиб. мат. ж., 1963, *4*, № 3, 657—672 (РЖМат, 1964, 2Б435)
53. *Табидзе Г. С.*, О приближенном решении двухточечной сингулярной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Дифференц. уравнения, 1974, *10*, № 5, 851—859 (РЖМат, 1974, 9Б1132)
54. —, О численном решении двухточечной сингулярной краевой задачи. Тр. Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа, 1986, *17*, 153—179 (РЖМат, 1986, 9Б1532)
55. *Тонков Е. Л.*, О периодическом уравнении второго порядка. Докл. АН СССР, 1969, *184*, № 2, 296—299 (РЖМат, 1969, 6Б280)
56. *Хартман Ф.*, Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970, 720 с. (РЖМат, 1971, 3Б141К)
57. *Цепитис Я. В.*, Разрешимость краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с несуммируемой особенностью. Дифференц. уравнения, 1983, *19*, № 12, 2071—2075 (РЖМат, 1984, 4Б236)
58. *Чантурия Т. А.*, О задаче типа Кнезера для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Мат. заметки, 1974, *15*, № 6, 897—906 (РЖМат, 1974, 11Б273)
59. *Чечик В. А.*, Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью. Тр. Моск. мат. о-ва, 1959, *8*, 155—198 (РЖМат, 1960, 7553)
60. *Шехтер Б. Л.*, О числе решений двухточечной краевой задачи для уравнения второго порядка с разрывной правой частью. Дифференц. уравнения, 1975, *11*, № 3, 484—497 (РЖМат, 1975, 8Б230)
61. —, Об однозначной разрешимости одной линейной двухточечной краевой задачи. Дифференц. уравнения, 1975, *11*, № 4, 687—693 (РЖМат, 1975, 9Б220)

62. —, О двухточечной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с разрывной правой частью. Тр. Тбилисск. ун-та, 1975, *А9*, 19—31 (РЖМат, 1976, 2Б211)
63. *Шириков В. П.*, Задача Коши и краевая задача для некоторых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Докл. АН СССР, 1965, *163*, № 4, 834—836 (РЖМат, 1965, 12Б199)
64. *Щербина Г. В.*, Об одной встречающейся в приложениях краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка на полуоси. Докл. АН СССР, 1968, *178*, № 2, 314—316 (РЖМат, 1968, 6Б310)
65. —, Достаточные условия разрешимости одной нелинейной краевой задачи на полуоси. Дифференц. уравнения, 1975, *11*, № 12, 2189—2195 (РЖМат, 1976, 4Б303)
66. —, О сингулярной нелинейной краевой задаче для уравнения второго порядка с быстрорастущей правой частью. Дифференц. уравнения, 976, *12*, № 2, 299—304 (РЖМат, 1976, 7Б226)
67. *Ackroyd J. A.*, On the laminar compressible boundary layer with stationary origin on a moving flat wall. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1967, *63*, 871—888 (РЖМат, 1968, 4Б461)
68. *Bailey P. B., Shampine L. F., Waltman P. E.*, Nonlinear two point boundary value problems. New York.: Acad. Press, 1968, 171 p. (РЖМат, 1970, 2Б318К)
69. *Bouillet J. E., Gomes S. M.*, An equation with a singular nonlinearity related to diffusion problems in one dimension. Quart. Appl. Math., 1985, *42*, № 4, 395—402 (РЖМат, 1985, 10Б349)
70. *Callegary A. J., Friedman M. B.*, An analytical solution of a nonlinear, singular boundary value problem in the theory of viscous fluids. J. Math. Anal. and Appl., 1968, *21*, № 3, 510—529 (РЖМат, 1969, 2Б416)
71. —, *Nachman A.*, Some singular, nonlinear differential equations arising in boundary layer theory. J. Math. Anal. and Appl., 1978, *64*, № 1, 96—105 (РЖМат, 1978, 12Б491)
72. *Coffman C. V.*, Non-linear differential equations on cones in Banach spaces. Pacif. J. Math., 1964, *14*, № 1, 9—15 (РЖМат, 1965, 11Б219)
73. *Coppel W. A.*, Disconjugacy. Lect. Notes Math., 1971, *220*, 148 p. (РЖМат, 1972, 2Б241)
74. *Emden R.*, Gaskugeln. Leipzig, 1907
75. *Epheser H.*, Über die Existenz der Lösungen von Randwertaufgaben mit gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Z., 1955, *61*, № 4, 435—454 (РЖМат, 1956, 411)
76. *Fermi E.*, Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprietà dell'atomo. Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, 1927, *6*, 602—607
77. *Hartman P., Wintner A.*, On the non-increasing solutions of $y''=f(x, y, y')$. Amer. J. Math., 1951, *73*, № 2, 390—404
78. —, —, On monotone solutions of systems of non-linear differential equations. Amer. J. Math., 1954, *76*, № 4, 860—866 (РЖМат, 1956, 2204)
79. *Jamet P.*, On the convergence of finite-difference approximations to one-dimensional singular boundary-value problems. Numer. Math., 1970, *14*, 355—378 (РЖМат, 1970, 8Б746)
80. *Johnson W. E., Perko L. M.*, Interior and exterior boundary value problems from the theory of the capillary tube. Arch. Ration. Mech. and Anal., 1968, *29*, № 2, 125—143
81. *Kiguradze I. T.*, On the non-negative non-increasing solutions of non-linear second order differential equations. Ann. mat. pura ed appl., 1969, *81*, 169—191 (РЖМат, 1970, 2Б263)
82. —, On a singular boundary value problem. J. Math. Anal. and Appl., 1970, *30*, № 3, 475—489 (РЖМат, 1970, 11Б268)
83. —, *Lomtatidze A. G.*, On certain boundary value problems for second-order linear ordinary differential equations with singularities. J. Math. Anal and Appl., 1984, *101*, № 2, 325—347 (РЖМат, 1985,1Б331)

84. —, *Rachůnková I.*, On a certain nonlinear problem for two-dimensional differential systems. Arch. math. (Brno), 1980, *16*, № 1, 15—37 (РЖМат, 1981, 1Б339)
85. *Kneser A.*, Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen bei grossen reellen Werthen der Arguments, I. J. reine und angew. Math., 1896, *116*, 173—212
86. *Kolodner I. I.*, Heavy rotating string — A nonlinear eigenvalue problem. Commun. Pure and Appl. Math., 1955, *8*, № 3, 395—408 (РЖМат, 1956, 4550)
87. *Kurtz J. C.*, A singular nonlinear boundary value problem. Rocky Mountain J. Math., 1981, *11*, № 2, 227—241 (РЖМат, 1982, 3Б296)
88. *Nagumo M.*, Über die Differentialgleichung $y''=f(x, y, y')$. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, 1937, *19*, 861—866
89. *Nehari Z.*, On a nonlinear differential equation arising in nuclear physics. Proc. Roy. Irish Acad., 1963, *62A*, № 9, 117—135 (РЖМат, 1964, 2Б463)
90. *Opial Z.*, Sur les intégrales bornées de l'équation $u''=f(t, u, u')$. Ann. polon. math., 1958, *4*, № 3, 314—324
91. —, Sur une inégalité de C. de la Vallée Poussin dans la théorie de l'équation différentielle linéaire du secon ordre. Ann. polon. math., 1959, *6*, № 1, 87—91 (РЖМат, 1960, 5252)
92. *Picard E.*, Sur l'application des méthodes d'approximations succesives à l'étude de certaines équations differentielles ordinaires. J. math. pures et appl., 1893, *9*, 217—271
93. *Rachânková I.*, On a Kneser problem for a system of nnnlinear ordinary differential equations. Czech. Math. J., 1981, *31*, № 1, 114—126
94. *Reid W. T.*, Sturmian theory for ordinary differential equations. Appl. Math. Sci., 1980, *31*, 559 p. (РЖМат, 1982, 2Б331)
95. *Ryder G. H.*, Boundary value problems for a class of nonlinear differential equations. Pacif. J. Math., 1967, *22*, № 3, 477—503 (РЖМат, 1968, 6Б309)
96. *Sansone G.*, Su un'equazione differenziale non lineare della fisica nucleare. Symp. Math., 1970, *6*, 3—139
97. *Shekhter B. L.*, On singular boundary value problems for two-dimensional differential systems. Arch. math. (Brno), 1983, *19*, № 1, 19—41 (РЖМат, 1984, 1Б302)
98. —, On existence and zeros of solutions of a nonlinear two-point boundary value problem. J. Math. Anal. and Appl., 1983, *97*, № 1, 1—20 (РЖМат, 1984, 4Б237)
99. —, On a boundary value problem arising in nonlinear field theory. Ann. mat. pura ed appl., 1986 (В печати)
100. *Taliaferro S.*, A nonlinear singular boundary value problem. Nonlinear Anal., Theory. Meth. and Appl., 1979, *3*, № 6, 897—904 (РЖМат, 1980, 4Б275)
101. *Thomas L. H.*, The calculation of atomic fields. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1927, *23*, 542—548
102. *Tonelli L.*, Sull'equazione differenziale $y''=f(x, y, y')$. Ann. R. Scuola norm. super. Pisa, Sci. fis. e mat., 1939, *8*, 75—88
103. *de la Vallée Poussin C.*, Sur l'equation differentielle lineaire du second ordre. Détermination d'une integrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre *n*. J. math. pures et appl., 1929, *8*, № 2, 125—144