И. Т. Кигурадзе, Асимптотические свойства решений одного нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена–Фаулера, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1965, том 29, выпуск 5, 965–986

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая

29 (1965), 965—986

УДК 517.9

И. Т. КИГУРАДЗЕ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭМДЕНА — ФАУЛЕРА

В работе устанавливаются асимптотические формулы для продолжаемых и непродолжаемых решений дифференциального уравнения типа Эмдена — Фаулера.

Целью настоящей работы является изучение поведения при $t \to \infty$ решений уравнения

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a(t)\,|u|^n \operatorname{sign} u. \tag{1}$$

Ясно, что положительные решения уравнения (1) совпадают с решениями уравнения

$$u'' = a(t)\,u^n.$$

В литературе подробно исследован частный вид последнего уравнения:

$$u'' = t^\sigma u^n,$$

известный под названием уравнения Эмдена — Фаулера. Оно впервые появилось в астрофизических исследованиях Эмдена, а потом обратило на себя внимание физиков при изучении распределения электронов в тяжелом атоме. Основные результаты об асимптотическом поведении решений этого уравнения изложены в монографиях Беллмана ([1]) и Сансоне ([2]).

В заметках ([3]) — ([8]) рассматривается уравнение вида (1) при предположении, что $a(t) \leqslant 0$ и $n > 1$.

В настоящей статье мы рассматриваем случай, когда $a(t) \geqslant 0$ и $n > 1$.

Решение уравнения (1) называется продолжаемым, если оно определено на некотором бесконечном промежутке (t_0, ∞), и называется непродолжаемым, если оно определено на некотором конечном промежутке (t_0, t_1) и его нельзя продолжить за точку t_1.

В § 1 настоящей работы доказывается, что через каждую точку правой полуплоскости проходит либо одно и только одно продолжаемое решение уравнения (1), либо бесконечное множество продолжаемых решений, заполняющих некоторый криволинейный сектор с вершиной в указанной точке и ограниченный решениями $u_{\underline{\gamma}}(t)$ и $u_{\overline{\gamma}}(t)$; при этом внутри указанного сектора проходит единственное ограниченное решение $u_{\gamma_0}(t)$, которое разделяет между собой решения, стремящиеся к $+\infty$, и решения, стремящиеся к $-\infty$.

В § 2 устанавливаются асимптотические формулы для продолжаемых решений уравнения (1), а в § 3 — асимптотические формулы для непродолжаемых решений.

§ 1. Теорема существования продолжаемых и непродолжаемых решений

В дальнейшем нам понадобится следующая простая

ЛЕММА 1. *Пусть* $u(t)$ — *решение уравнения* (1), *определенное на отрезке* $t_0 \leqslant t < t_1$, *а* $v(t)$ — *решение уравнения*

$$v'' = a_1(t)\,|v|^n \operatorname{sign} v. \tag{2}$$

Если

$$a(t) \geqslant |a_1(t)| \tag{3}$$

и начальные значения решений $u(t)$ *и* $v(t)$ *при* $t = t_0$ *соответственно удовлетворяют условиям*

$$u_0 \geqslant |v_0|, \quad u_0' \geqslant |v_0'|, \tag{4}$$

то при $t \in [t_0, t_1)$ *имеем*:

$$u(t) - v(t) \geqslant u_0 - |v_0| + (u_0' - |v_0'|)(t - t_0),$$
$$u'(t) - v'(t) \geqslant u_0' - |v_0'|. \tag{5}$$

Доказательство. Предположим, что вместо (4) соблюдаются условия

$$u_0 \geqslant |v_0|, \quad u_0' > |v_0'|. \tag{4$_1$}$$

Тогда, в силу (3), на некотором промежутке $t_0 < t < t_2 \leqslant t_1$ имеем:

$$u(t) > |v(t)|, \quad u'(t) > |v'(t)|, \quad u''(t) \geqslant |v''(t)|. \tag{5$_1$}$$

Покажем, что $t_2 = t_1$. Действительно, в противном случае мы имели бы $u'(t_2) = |v'(t_2)|$, что невозможно, так как

$$u'(t_2) - |v'(t_2)| \geqslant u_0' - |v_0'| + \int_{t_0}^{t_2} (u''(\tau) - |v''(\tau)|)\,d\tau > 0.$$

Итак, неравенства (5$_1$) соблюдаются для любого решения уравнения (2), удовлетворяющего условиям (4$_1$). Переходя теперь к пределу, когда $|v_0'| \to u_0$, получим:

$$u(t) \geqslant |v(t)|, \quad u'(t) \geqslant |v'(t)|, \quad u''(t) \geqslant |v''(t)| \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

откуда непосредственно следует справедливость неравенств (5). Лемма доказана.

Примечание. Легко видеть, что если вместо (3) и (4) удовлетворяются условия

$$a(t) = a_1(t) \geqslant 0, \quad u_0 \geqslant v_0, \quad u_0' \geqslant v_0',$$

то вместо (5) будем иметь:

$$u(t) - v(t) \geqslant u_0 - v_0 + (u_0' - v_0')(t - t_0), \quad u'(t) - v'(t) \geqslant u_0' - v_0'.$$

Без ограничения общности мы рассмотрим ниже лишь те решения уравнения (1), которые выходят из точек первого квадранта плоскости t, u, так как ими, с точностью до знака, исчерпываются все решения уравнения (1).

Пусть $t_0 \geqslant 0$, $u_0 \geqslant 0$. Решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = \gamma,$$

в дальнейшим обозначим через $u_\gamma(t)$.

ТЕОРЕ А 1. *Если функция $a(t)$ положительна почти везде на* $[0, \infty)$ *и суммируема на каждом конечном отрезке, то для любых $t_0 \geqslant 0$, $u_0 \geqslant 0$ найдутся такие числа $\underline{\gamma} \leqslant \gamma_0 \leqslant \bar{\gamma}$, что решения $u_\gamma(t)$ уравнения* (1), *выходящие из точки (t_0, u_0), при $\gamma > \bar{\gamma}$ положительны и непродолжаемы, при $\gamma < \underline{\gamma}$ отрицательны, начиная с некоторого значения t, и непродолжаемы, а для остальных значений γ продолжаемы. Если $u_0 = 0$, то $u_{\gamma_0}(t) \equiv 0$, а если $u_0 > 0$, то решение $u_{\gamma_0}(t)$ положительно и монотонно убывает. Если $\underline{\gamma} < \gamma_0 < \bar{\gamma}$, то*

$$\lim_{t\to\infty} u_\gamma(t) = \begin{cases} -\infty, & \underline{\gamma} \leqslant \gamma \leqslant \gamma_0, \\ +\infty, & \gamma_0 < \gamma \leqslant \bar{\gamma}. \end{cases}$$

Доказательство. Прежде всего, пользуясь методом Мамбриани [см. ([2]), стр. 377—380], мы докажем существование решения $u_{\gamma_0}(t)$.

Из леммы 1 легко следует, что единственное ограниченное решение, проходящее через точку $(t_0, 0)$, есть тривиальное решение. Следовательно, если $u_0 = 0$, то $u_{\gamma_0}(t) \equiv 0$.

Пусть $u_0 > 0$. Из (1) ясно, что если $\gamma \geqslant 0$, то решение $u_\gamma(t)$ является возрастающей положительной функцией, которая либо продолжаема, либо нет.

Покажем, что если

$$\gamma < -u_0 - u_0^n \int_{t_0}^{1+t_0} a(\tau)\, d\tau,$$

то $u_\gamma(t)$ обращается в нуль при некотором значении t, меньшем, чем $t_0 + 1$. Действительно, в противном случае мы получили бы:

$$0 < u_\gamma(t_0 + 1) = u_0 + \gamma + \int_{t_0}^{t_0+1} (t_0 + 1 - \tau)\, a(\tau)\, u_\gamma^n(\tau)\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant u_0 + \gamma + u_0^n \int_{t_0}^{t_0+1} a(\tau)\, d\tau < 0.$$

Рассмотрим множество тех значений γ, для которых $u_\gamma(t)$ пересекает ось t. Как мы видели выше, оно является непустым и ограниченным сверху множеством. Обозначим через γ_0 точную верхнюю грань этого множества.

Ясно, что $u_{\gamma_0}(t)$ не может пересекать ось t, так как в противном случае для значений γ, больших чем γ_0 и достаточно близких к γ_0, функция $u_\gamma(t)$ пересекала бы ось t, что противоречит определению γ_0.

Остается доказать, что решение $u_{\gamma_0}(t)$ продолжаемо и $u'_{\gamma_0}(t) < 0$ при всех $t \in (t_0, \infty)$. Допустим противное. Тогда найдется такая точка t_1, что $u'_{\gamma_0}(t) < 0$ при $t \in [t_0, t_1]$ и $u'_{\gamma_0}(t_1) = 0$. Ясно, что $u_\gamma(t)$ будет возрастающей функцией при $t \geqslant t_1$. Таким образом, $u_\gamma(t) \geqslant u_\gamma(t_1) > 0$ при $t \geqslant t_0$. Теперь легко доказать существование такого числа $\gamma < \gamma_0$, что $u_\gamma(t)$ не пересечет ось t, что невозможно по определению γ_0.

Покажем теперь, что через точку (t_0, u_0) проходит бесконечное множество как стремящихся к $+\infty$, так и стремящихся к $-\infty$ непродолжаемых решений уравнения (1).

Рассмотрим уравнение (2), где

$$a_1(t) = \begin{cases} a(t) & \text{при} \quad a(t) \leqslant 1, \\ 1 & \text{при} \quad a(t) > 1. \end{cases}$$

Положим

$$\gamma_1 = \left[\int_{t_0+1}^{t_0+2} a_1(\tau)(\tau - t_0 - 1)^n \, d\tau\right]^{-\frac{1}{n-1}} + \left[\frac{n-1}{n+1}\int_{t_0+2}^{\infty} a_1(\tau)\, d\tau\right]^{-\frac{n+1}{n-1}}.$$

Пусть $v(t)$ — решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям

$$v(t_1) = 0, \quad |v'(t_1)| = \gamma_1, \tag{6}$$

где $t_1 \in [t_0, t_0 + 1]$. Покажем, что решение $v(t)$ непродолжаемо. Допустим противное. Тогда $v(t)$ будет монотонной функцией на $[t_1, \infty)$ и

$$|v(t)| \geqslant \gamma_1(t - t_1) \quad \text{при} \quad t \geqslant t_1. \tag{7}$$

Из (2) найдем:

$$v'^2(t) = \gamma_1^2 + \int_{t_1}^{t} a_1(\tau)\, v'(\tau)\, |v(\tau)|^n \operatorname{sign} v(\tau)\, d\tau \leqslant \gamma_1^2 + |v(t)|^{n+1},$$

т. е.

$$|v'(t)| \leqslant [\gamma_1^2 + |v(t)|^{n+1}]^{\frac{1}{2}}, \quad t \geqslant t_1.$$

В силу этого и условий (6) и (7), из равенства

$$|v'(t)| = \gamma_1 + \int_{t_1}^{t} a_1(\tau)\, |v(\tau)|^n d\tau$$

получим, что при $t \geqslant t_0 + 2$

$$|v(t)|^{n+1} \geqslant \left[\gamma_1 + \int_{t_0+2}^{t} a_1(\tau)\, |v(\tau)|^n d\tau\right]^2.$$

Отсюда следует, что

$$a_1(t)\, |v(t)|^n \left[\gamma_1 + \int_{t_0+2}^{t} a_1(\tau)\, |v(\tau)|^n d\tau\right]^{-\frac{2n}{n+1}} \geqslant a_1(t).$$

Интегрирование этого неравенства от $t_0 + 2$ до ∞ дает:

$$\gamma_1^{-\frac{n-1}{n+1}} \geqslant \frac{n-1}{n+1} \int_{t_0+2}^{\infty} a_1(\tau)\, d\tau > \gamma_1^{-\frac{n-1}{n+1}}.$$

Мы получили противоречие. Тем самым доказано, что $v(t)$ — непродолжаемое решение.

Согласно лемме 1, ясно, что решение $u_\gamma(t)$ при $\gamma > \gamma_1$ будет положительным и непродолжаемым.

Пусть

$$\gamma < -\gamma_1 - u_0 - u_0^n \int_{t_0}^{t_0+1} a(\tau)\, d\tau.$$

Тогда $u_\gamma(t)$ обращается в нуль при некотором $t_1 \in [t_0, t_0 + 1]$ и $u'_\gamma(t_1) < -\gamma_1$. Следовательно, решение $u_\gamma(t)$ отрицательно при $t > t_1$ и непродолжаемо.

Итак, мы показали, что, если $|\gamma|$ — достаточно большое число, то решение $u_\gamma(t)$ непродолжаемо. Пусть $\bar{\gamma}$ является точной нижней гранью множества тех $\gamma > \gamma_0$, для которых $u_\gamma(t)$ непродолжаемо, а $\underline{\gamma}$ — точной верхней гранью множества тех $\gamma < \gamma_0$, для которых $u_\gamma(t)$ непродолжаемо.

Докажем, что $u_{\bar{\gamma}}(t)$ и $u_{\underline{\gamma}}(t)$ — продолжаемые решения. Допустим противное: пусть, например, $u_{\bar{\gamma}}(t)$ непродолжаемо, т. е. найдется такое $t_1 > t_0$, что

$$u_{\bar{\gamma}}(t_1 -) = u'_{\bar{\gamma}}(t_1 -) = +\infty.$$

Пусть $\bar{u}(t)$ — непродолжаемое решение, выходящее из точки $(t_1, 0)$. Очевидно, если $\gamma < \bar{\gamma}$ и разность $\bar{\gamma} - \gamma$ достаточно мала, то

$$u_\gamma(t_1) > 0, \quad u'_\gamma(t_1) > \bar{u}'(t_1).$$

Отсюда, в силу леммы 1, имеем: $u_\gamma(t) > \bar{u}(t)$ при всех t, что невозможно, так как $\bar{u}(t)$ — непродолжаемое решение.

В силу леммы 1 заключаем, что если $\gamma > \bar{\gamma}$ или $\gamma < \underline{\gamma}$, то решение $u_\gamma(t)$ непродолжаемое, а если $\underline{\gamma} \leqslant \gamma \leqslant \bar{\gamma}$, то решение $u_\gamma(t)$ всецело находится между $u_{\bar{\gamma}}(t)$ и $u_{\underline{\gamma}}(t)$, и, следовательно, является продолжаемым.

Пусть $\underline{\gamma} < \gamma_0 < \bar{\gamma}$. Тогда, в силу леммы 1, имеем: если $\gamma_0 < \gamma \leqslant \bar{\gamma}$, то

$$u_\gamma(t) \geqslant (\gamma - \gamma_0)(t - t_0) \to \infty \quad \text{при } t \to \infty,$$

а если $\underline{\gamma} \leqslant \gamma < \gamma_0$, то

$$u_\gamma(t) \leqslant u_{\gamma_0}(t) + (\gamma - \gamma_0)(t - t_0) \to -\infty \quad \text{при } t \to \infty.$$

Теорема доказана *.

* В заметке ([9]) В. Р. Утц попытался доказать, что если все решения уравнения (1) продолжаемы, то среди них имеется нетривиальное решение, стремящееся к нулю при $t \to \infty$. В силу доказанной выше теоремы 1, этот результат В. Р. Утца, очевидно, теряет смысл.

§ 2. Асимптотика продолжаемых решений

Прежде всего приведем две леммы, в которых устанавливаются некоторые асимптотические свойства решений уравнения

$$\frac{d^2w}{dx^2}+b_1(x)\frac{dw}{dx}+b_2(x)w-b_3(x)|w|^n\operatorname{sign}w=0. \tag{8}$$

ЛЕММА 2. *Пусть функция $b_1(x)$ абсолютно непрерывна, а функции $b_2(x)$ и $b_3(x)$ суммируемы на каждом конечном отрезке положительной полуоси,*

$$b_1(x)\sim b_1x^\sigma,\quad b_1'(x)\sim\sigma b_1x^{\sigma-1},\quad b_i(x)\sim b_i\quad (i=1,2)\ *, \tag{9}$$

где $0\leqslant\sigma\leqslant1$, $b_i>0$ $(i=1, 2, 3)$. Если уравнение

$$\frac{d^2v}{dx^2}+b_1(x)\frac{dv}{dx}+b_2(x)v=0 \tag{10}$$

не имеет колеблющихся решений, то для любого нетривиального неколеблющегося продолжаемого решения $w(x)$ уравнения (8) имеем: либо $|w(x)|\sim b^{\frac{1}{n-1}}$, где $b=\frac{b_2}{b_3}$, либо

$$w(x)\sim v(x)\sim 0, \tag{11}$$

где $v(x)$ — какое-нибудь нетривиальное решение уравнения (10).

Доказательство. Покажем прежде всего, что любое продолжаемое решение уравнения (8) ограничено, когда $x\to\infty$. Допустим противное: пусть уравнение (8) обладает продолжаемым, но неограниченным решением $w(x)$. Не нарушая общности, можно считать, что

$$\limsup_{x\to\infty} w(x)=+\infty.$$

Поэтому для некоторого $x_0\in(0,\infty)$, будем иметь:

$$w(x_0)>\sup_{x\geqslant x_0}\left[2\frac{b_2(x)}{b_3(x)}\right]^{\frac{1}{n-1}},\quad w'(x_0)>0. \tag{12}$$

Отсюда следует, что $w'(x)>0$ при $x\geqslant x_0$, так как если, допустим, x_1 — первая точка экстремума правее x_0, то из (8) получим: $w''(x_1)>0$, что возможно только при минимуме. Следовательно, неравенства (12) сохраняются для всего промежутка $[x_0,\infty)$. Кроме того, согласно (9), можно считать, что

$$\frac{b_1}{2}x^\sigma<b_1(x)<2b_1x^\sigma,\quad \frac{b_3}{2}<b_3(x)<2b_3,\quad x\geqslant x_0.$$

Поэтому из (8) находим, что при $x\geqslant x_0$

$$w''(x)+\frac{b_1}{2}x^\sigma w'(x)\leqslant 4b_3w^n(x)$$

и

$$w''(x)+2b_1x^\sigma w'(x)\geqslant\frac{1}{4}b_3w^n(x).$$

---

* Запись $f_1(x)\sim f_2(x)$ при $f_2(x)\not\equiv0$ означает, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=1$, а при $f_2(x)\equiv0$ означает, что $\lim\limits_{x\to\infty}f_1(x)=0$.

Умножая обе части первого из этих неравенств на $w'(x)$, а второго — на $x^{-\sigma}w^{-n}(x)$ и интегрируя от x_0 до x, находим:

$$w'^2(x) + \frac{1}{2}b_1\int\limits_{x_0}^{x} z^\sigma w'^2(z)\,dz \leqslant w'^2(x_0) + \frac{8b_3}{n+1}w^{n+1}(x),$$

$$\frac{w'(x)}{x^\sigma w^n(x)} + n\int\limits_{x_0}^{x}\frac{w'^2(z)}{z^\sigma w^{n+1}(z)}dz \geqslant \frac{b_3}{4}\ln\frac{x}{x_0} - \frac{2b_1 + \sigma x_0^{-\sigma-1}}{n-1}w^{1-n}(x_0).$$

Но эти неравенства противоречат друг другу, так как первое из них дает:

$$w'(x) \leqslant c_1 w^{\frac{n+1}{2}}(x) \quad \text{при } x \geqslant x_0,$$

где $c_1^2 = w'^2(x_0)\,w^{-1-n}(x_0) + \frac{8b}{n+1}$, в силу чего из второго получается противоречивый результат:

$$\frac{3n-1}{n-1}c_1 x_0^{-\sigma} w^{\frac{1-n}{2}}(x_0) \sim \infty.$$

Тем самым мы доказали, что уравнение (8) не имеет продолжаемых неограниченных решений.

Пусть $w(x)$ — положительное продолжаемое решение уравнения (8). Покажем, что либо $w(x) \sim b^{\frac{1}{n-1}}$, либо $w(x) \sim 0$.

Из (9) ясно, что для любого $\delta \in (0, b)$ найдется такое число x_δ, что при $x \geqslant x_\delta$ имеем:

$$b - \delta \leqslant \frac{b_2(x)}{b_3(x)} \leqslant b + \delta.$$

В силу этого, из (8) следует, что каждый экстремум функции $w(x)$ выше прямой $w = (b+\delta)^{\frac{1}{n-1}}$ должен быть минимумом, а ниже прямой $w = (b-\delta)^{\frac{1}{n-1}}$ — максимумом. Поэтому без ограничения общности будем ниже считать, что решение $w(x)$ при $x \geqslant x_\delta$ нигде не пересекает упомянутые прямые. Таким образом, при $x \geqslant x_\delta$ могут представиться три случая:

$$w(x) \geqslant (b+\delta)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{13}$$

$$(b-\delta)^{\frac{1}{n-1}} \leqslant w(x) \leqslant (b+\delta)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{14}$$

$$0 < w(x) \leqslant (b-\delta)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{15}$$

Покажем сначала, что условие (13) невозможно. Действительно, в противном случае, в силу монотонности и ограниченности $w(x)$, будет существовать конечный предел

$$\lim_{x\to\infty} w(x) \geqslant (b+\delta)^{\frac{1}{n-1}}$$

и из (8) будет следовать, что

$$w''(x) + 2b_1 x^\sigma w'(x) \geqslant \delta_1 > 0, \quad x \geqslant x_0,$$

где x_0 — достаточно большое число. Отсюда вытекает:

$$x^{-\sigma} w'(x) + (\sigma x^{-\sigma-1} + 2b_1) w(x) \geqslant$$

$$\geqslant \delta_1 \ln \frac{x}{x_0} + x_0^{-\sigma} w'(x_0) - \sigma(\sigma+1) \int_{x_0}^{x} z^{-\sigma-2} w(z)\, dz \sim \infty,$$

что противоречит условию ограниченности $w(x)$.

Если для любого произвольно малого $\delta > 0$ при $x \geqslant x_\delta$ соблюдается условие (14), то $w(x) \sim b^{\frac{1}{n-1}}$.

Докажем, что если хоть для одного $\delta \in (0, b)$ удовлетворяется неравенство (15), то $w(x) \sim 0$. Так как $w(x)$ монотонно убывает, то

$$0 \leqslant \lim_{x\to\infty} w(x) \leqslant 1 - \delta.$$

Допустим, что $\lim\limits_{x\to\infty} w(x) > 0$. Тогда из (8) находим:

$$w''(x) + \frac{b_1}{2} x^\sigma w'(x) \leqslant -\delta_2 < 0 \quad \text{при } x \geqslant x_0.$$

Отсюда легко следует, что

$$x^{-\sigma} w'(x) + \left(\frac{b_1}{2} + \sigma x_0^{-1-\sigma}\right) w(x_0) \leqslant -\delta_2 \ln \frac{x}{x_0} - x_0^{-\sigma} w'(x_0) +$$
$$+ \left(\sigma x_0^{-1-\sigma} + \frac{b_1}{2}\right) w(x_0) \sim -\infty,$$

т. е. $w'(x) \sim -\infty$, что противоречит условию (15). Этим доказано, что $w(x) \sim 0$.

Докажем, наконец, что каждое стремящееся к нулю решение уравнения (8) имеет вид (11).

Пусть $v_1(x)$ и $v_2(x)$ — линейно независимые решения уравнения (10) и

$$v_2(x) = v_1(x) \int_x^\infty e^{-\int_0^z b_1(\zeta)\, d\zeta} v_1^{-2}(z)\, dz, \tag{16}$$

а $w(x)$ — какое-нибудь стремящееся к нулю решение уравнения (8). Допустим, что

$$\int_0^\infty e^{\int_0^x b_1(z)\, dz} |v_1(x)\, v_2(x)|\, |w(x)|^{n-1} dx < \infty. \tag{17}$$

Пусть x_0 — настолько большое число, что

$$\int_{x_0}^\infty e^{\int_0^x b_1(z)\, dz} b_3(x) |v_1(x)\, v_2(x)|\, |w(x)|^{n-1} dx < \frac{1}{4}. \tag{17$_1$}$$

Рассмотрим операторы M_1 и M_2, определенные в пространстве $C_{[x_0, \infty)}$ непрерывных и ограниченных на $[x_0, \infty)$ функций следующим образом:

$$M_1 y(x) = 1 + \int_{x_0}^{x} e^{\int_0^z b_1(\zeta)\,d\zeta} \left(\frac{v_1^2(z)\,v_2(x)}{v_1(x)} - v_2(z)\,v_1(z)\right)\widetilde{b}_3(z)\,y(z)\,dz,$$

$$M_2 y(x) = 1 - \int_{x}^{\infty} e^{\int_0^z b_1(\zeta)\,d\zeta} \left(v_1(z)\,v_2(z) - \frac{v_2^2(z)\,v_1(x)}{v_2(x)}\right)\widetilde{b}_3(z)\,y(z)\,dz,$$

где $\widetilde{b}_3(x) = b_3(x)\,|\,w(x)\,|^{n-1}$. Пусть S — замкнутый шар $\|y\| \leqslant 2$ в пространстве $C_{[x_0, \infty]}$. В силу (16) и (17_1) легко заключаем, что если $y(x), \bar{y}(x) \in S$, то

$$\|M_i y\| \leqslant 2, \quad \|M_i y - M_i \bar{y}\| < \frac{1}{2}\|y - \bar{y}\| \quad (i = 1, 2).$$

Следовательно, M_1 и M_2 сжато отображают шар S в себя. Поэтому, в силу известной теоремы Банаха, они имеют соответственно неподвижные точки $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Из равенств

$$y_i(x) = M_i y_i(x) \quad (i = 1, 2)$$

непосредственно следует, что

$$y_1(x) \sim c_0 > 0, \quad y_2(x) \sim 1. \tag{18}$$

Легко видеть, что функции

$$w_i(x) = v_i(x)\,y_i(x) \quad (i = 1, 2)$$

являются линейно независимыми решениями уравнения

$$w'' + b_1(x)\,w + \widetilde{b}_2(x)\,w = 0, \tag{19}$$

где $\widetilde{b}_2(x) = b_2(x) - b_3(x)\,|\,w(x)\,|^{n-1}$. Так как и $w(x)$ является решением этого уравнения, то

$$w(x) = c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x).$$

Отсюда, в силу (18), имеем: либо $w(x) \sim c_0 c_1 v_1(x)$, либо $w(x) \sim c_2 v_2(x)$, где $c_i \neq 0$ $(i = 0, 1, 2)$, т. е. $w(x)$ имеет вид (11).

Итак, нам остается доказать соотношение (17).

При помощи подстановки

$$v(x) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^x b_1(z)\,dz}\,\omega(x) \tag{20}$$

уравнение (10) можно привести к виду

$$\omega'' = D(x)\,\omega, \tag{21}$$

где

$$D(x) = \frac{b_1^2(x)}{4} + \frac{b_1'(x)}{2} - b_2(x).$$

Рассмотрим функции

$$\varphi_{\pm\varepsilon}(x) = e^{\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{b_1^2(z)}{4} - b_2 \pm \varepsilon}\, dz}.$$

Ясно, что

$$\varphi''_{\pm\varepsilon}(x) = D_{\pm\varepsilon}(x)\,\varphi_{\pm\varepsilon}(x),$$

где

$$D_{\pm\varepsilon}(x) = \frac{b_1^2(x)}{4} - b_2 \pm \varepsilon + \frac{b_1(x)\,b_1'(x)}{4\sqrt{\frac{b_1^2(x)}{4} - b_2 \pm \varepsilon}}.$$

Будем считать, что если $D(x) \sim 0$, то

$$|D(x)| < D_{+\varepsilon}(x), \quad x \geqslant x_0,$$

а в остальных случаях соблюдается условие

$$D_{-\varepsilon}(x) < D(x) < D_{+\varepsilon}(x), \quad x \geqslant x_0\ ^*.$$

Пусть $D(x) \sim 0$ и $\omega(x)$ — какое-нибудь решение уравнения (21). Пусть

$$\varphi(x) = \left(|\omega(x_0)| + \frac{|\omega'(x_0)|}{\varphi'_{+\varepsilon}(x_0)}\right)\varphi_{+\varepsilon}(x).$$

Так как

$$\varphi(x_0) > |\omega(x_0)| \quad \text{и} \quad \varphi'(x_0) > |\omega'(x_0)|,$$

то, в силу леммы 1, имеем: $|\omega(x)| \leqslant \varphi(x)$, т. е.

$$\omega(x) = O(\varphi_{+\varepsilon}(x)).$$

Отсюда, в силу (20), следует, что для любого решения $v(x)$ уравнения (10) справедлива оценка:

$$v(x) = O\left[e^{-\int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{b_1(z)}{2} - \sqrt{\frac{b_1^2(z)}{4} - b_2 + \varepsilon}\right)dz}\right].$$

Так как $w(x)$ является решением уравнения (19), где $\tilde{b}_2(x) \sim b_2$, то

$$w(x) = O\left[e^{-\int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{b_1(z)}{2} - \sqrt{\frac{b_1^2(z)}{4} - b_2 + \varepsilon}\right)dz}\right].$$

Считая ε достаточно малым, в силу двух последних оценок легко заключить, что имеет место (17).

Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} D(x) > 0$, а $\omega_1(x)$ — решение уравнения (21), удовлетворяющее условиям:

$$\varphi_{-\varepsilon}(x_0) = \omega_1(x_0) = \varphi_{+\varepsilon}(x_0), \quad \varphi'_{-\varepsilon}(x_0) < \omega'(x_0) < \varphi'_{+\varepsilon}(x_0).$$

---

* Так как уравнение (21) не имеет колеблющихся решений, то $\lim\limits_{x\to\infty} D(x) \geqslant 0$.

В силу леммы 1,

$$\varphi_{-\varepsilon}(x) \leqslant \omega_1(x) \leqslant \varphi_{+\varepsilon}(x), \quad x \geqslant x_0.$$

Следовательно, уравнение (10) имеет решение $v_1(x)$ такое, что

$$e^{\int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{b_1^2(z)}{4} - b_2 - \varepsilon}\, dz} \leqslant v_1(x)\, e^{\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} b_1(z)\, dz} \leqslant e^{\int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{b_1^2(z)}{4} - b_2 + \varepsilon}\, dz}, \quad x \geqslant x_0. \tag{22}$$

Отсюда, в силу (16), имеем:

$$d_2\, x^{-\sigma} e^{\int\limits_{x_0}^{x} \left(\sqrt{\frac{b_1^2(z)}{4} - b_2 - \varepsilon} - 2\sqrt{\frac{b_1^2(z)}{4} - b_2 + \varepsilon}\right) dz} \leqslant v_2(x)\, e^{\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} b_1(z)\, dz} \leqslant$$

$$\leqslant d_1 x^{-\sigma} e^{\int\limits_{x_0}^{x} \left(\sqrt{\frac{b_1^2(z)}{4} - b_2 + \varepsilon} - 2\sqrt{\frac{b_1^2(z)}{4} - b_2 - \varepsilon}\right) dz}, \quad d_i > 0 \quad (i = 1, 2). \tag{23}$$

При помощи аналогичных рассуждений находим:

$$w(x) = O\left[e^{-\int\limits_{x_0}^{x} \left(\frac{b_1(z)}{2} - \sqrt{\frac{b_1^2(z)}{4} - b_2 + \varepsilon}\right) dz}\right]. \tag{24}$$

Согласно (9) можно ε взять настолько малым и x_0 настолько большим, чтобы при $x \geqslant x_0$ удовлетворялось неравенство

$$-(n-1)\left(\frac{b_1(x)}{2} - \sqrt{\frac{b_1^2(x)}{4} - b_2 + \varepsilon}\right) + 2\left(\sqrt{\frac{b_1^2(x)}{4} - b_2 + \varepsilon} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{b_1^2(x)}{4} - b_2 - \varepsilon}\right) \leqslant -\frac{(n-1)\, b_2}{2b_1} x^{-\sigma}. \tag{25}$$

В силу (22), (23), (24) и (25), получаем:

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} e^{\int\limits_{0}^{x} b_1(z)\, dz} |\, v_1(x)\, v_2(x) \,|\, |\, w(x) \,|^{n-1} dx \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{x_0}^{\infty} x^{-\sigma} e^{-\frac{(n-1)b_2}{2b_1}\int\limits_{x_0}^{x} z^{-\sigma} dz} dx < \infty,$$

чем доказательство леммы завершено.

ЛЕММА 3. *Если функции* $b_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ *суммируемы на каждом конечном отрезке промежутка* $(0, \infty)$ *и*

$$b_1(x) \leqslant 0, \quad b_3(x) \geqslant b_3 > 0, \quad \frac{b_2(x)}{b_3(x)} \sim b > 0, \tag{26}$$

то любое неколеблющееся продолжаемое решение уравнения (8) *при* $x \to \infty$ *стремится либо к* $b^{\frac{1}{n-1}}$, *либо к* $-b^{\frac{1}{n-1}}$.

Доказательство. Пусть $w(x)$ — неколеблющееся продолжаемое решение уравнения (8). Не нарушая общности, будем считать, что $w(x) > 0$ для больших x. Докажем сначала, что функция $w(x)$ ограничена при $x \to \infty$. В самом деле, если допустить противное, то, как это легко можно показать, найдется такое x_0, что при $x \geqslant x_0$

$$w(x) \geqslant \sup_{x \geqslant x_0} \left\{2 \frac{|b_2(x)|}{b_3(x)}\right\}^{\frac{1}{n-1}}, \qquad w'(x) > 0.$$

В силу последних неравенств и условий (26), из (8) найдем:

$$w''(x) \geqslant \frac{b_3}{2} w^n(x), \qquad x \geqslant x_0.$$

Пусть $w^{n+1}(x_0)\, w^{-n-1}(x) < \frac{1}{2}$ при $x \geqslant x_1$. Умножая обе части последнего неравенства на $w'(x)$ и интегрируя, находим при $x \geqslant x_1$:

$$w'^2(x) \geqslant \frac{b_3}{n+1}\left(1 - \frac{w^{n+1}(x_0)}{w^{n+1}(x)}\right) w^{n+1}(x) \geqslant \frac{b_3}{2(n+1)} w^{n+1}(x),$$

т. е.

$$w'(x)\, w^{-\frac{n+1}{2}}(x) \geqslant \sqrt{\frac{b_3}{2(n+1)}}, \qquad x \geqslant x_1.$$

Интегрирование этого неравенства по отрезку (x_1, x) дает:

$$w^{-\frac{n-1}{2}}(x_1) \geqslant \frac{2}{n-1} \sqrt{\frac{b_3}{2(n+1)}}\,(x - x_1),$$

что невозможно. Тем самым ограниченность $w(x)$ доказана.

Далее, как и выше, нам придется рассмотреть те же три случая (13), (14) и (15). Точно так, как в предыдущей лемме, можно доказать, что случай (13) невозможен. Докажем, что невозможно и условие (15). Действительно, в противном случае найдется такое x_0, что при $x \geqslant x_0$ будем иметь:

$$w'(x) < 0, \qquad w''(x) + b_1(x)\, w'(x) \leqslant 0.$$

Отсюда вытекает:

$$w'(x) \leqslant w'(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} b_1(z)\, dz} \leqslant w'(x_0)$$

и

$$w(x) \leqslant w'(x_0)(x - x_0) + w(x_0) \to -\infty \quad \text{при } x \to \infty,$$

что противоречит условию (15).

Итак, каково бы ни было $\delta > 0$, при $x > x_\delta$ удовлетворяется (14), а это и означает, что $w(x) \sim b^{\frac{1}{n-1}}$.

Теперь перейдем к изучению поведения при $t \to \infty$ продолжаемых решений уравнения (1). Не ограничивая общности, мы рассмотрим лишь те решения, которые выходят из произвольно фиксированной точки (t_0, u_0) первого квадранта плоскости t, u, пользуясь при этом обозначениями, введенными в § 1. Для определенности будем считать, что $u_0 > 0$. При $u_0 = 0$ имеем $u_{\gamma_0}(t) \equiv 0$, а все остальные формулы сохраняют силу.

Ниже мы будем считать, что

$$a(t) = a_0(t) + \alpha(t),$$

где $a_0(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая и положительная функция, а $\alpha(t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\alpha(t)}{a_0(t)} \sim 0. \tag{27}$$

ТЕОРЕМА 2. *Если*

$$A_1(t) = \frac{2(n+1)}{(n-1)^2} + \left(a_0^{-\frac{1}{n+3}}(t)\right)'' a_0^{-\frac{3}{n+3}}(t)\left(\int_t^\infty a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right)^2 \sim A_1 > 0, \tag{28}$$

то $\underline{\gamma} < \gamma_0 < \overline{\gamma}$ *и*

$$u_{\overline{\gamma}}(t) \sim A_1^{\frac{1}{n-1}} a_0^{-\frac{1}{n+3}}(t)\left(\int_t^\infty a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right)^{-\frac{2}{n-1}},$$

$$u_\gamma(t) \sim c_1 t, \quad \gamma_0 < \gamma < \overline{\gamma},$$

$$u_{\gamma_0}(t) \sim c_0,$$

$$u_\gamma(t) \sim -c_2 t, \quad \underline{\gamma} < \gamma < \gamma_0,$$

$$u_{\underline{\gamma}}(t) \sim -A_1^{\frac{1}{n-1}} a_0^{-\frac{1}{n+3}}(t)\left(\int_t^\infty a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right)^{-\frac{2}{n-1}},$$

где $c_0 > 0$, $c_i = c_i(\gamma) > 0$ $(i = 1, 2)$.

Доказательство. Ниже будет доказано, что из (27) и (28) следует соотношение

$$\int^\infty a(t)\, t^n\, dt < \infty. \tag{29}$$

Покажем, что если удовлетворяется (29), то $\underline{\gamma} < \gamma_0 < \overline{\gamma}$. Таким образом, мы должны показать, что решение $u_\gamma(t)$ продолжаемо, если $|\gamma_0 - \gamma|$ — достаточно малое число. Возьмем γ настолько близким к γ_0, чтобы при некотором достаточно большом t_1 мы имели бы:

$$c = \left[\frac{|u_\gamma(t_1)|}{t_1} + |u_\gamma'(t_1)|\right]^{1-n} - (n-1)\int_{t_1}^\infty a(\tau)\,\tau^n\,d\tau > 0.$$

Из равенства

$$u_\gamma(t) = u_\gamma(t_1) + u_\gamma'(t_1)(t - t_1) + \int_{t_1}^t (t - \tau)\, a(\tau)\, |u_\gamma(\tau)|^n \operatorname{sign} u(\tau)\, d\tau$$

следует, что

$$a(t)\,|u_\gamma(t)|^n\left[\frac{|u_\gamma(t_1)|}{t_1}+|u'_\gamma(t_1)|+\int_{t_1}^{t} a(\tau)\,|u_\gamma(\tau)|^n\,d\tau\right]^{-n}\leqslant a(t)\,t^n.$$

Интегрирование этого неравенства по отрезку $[t_1, t]$ дает:

$$\frac{|u_\gamma(t_1)|}{t_1}+|u'_\gamma(t_1)|+\int_{t_1}^{t} a(\tau)\,|u_\gamma(\tau)|^n\,d\tau\leqslant c^{\frac{1}{n-1}},\quad t\geqslant t_1,$$

т. е.

$$|u_\gamma(t)|\leqslant c^{\frac{1}{1-n}}t,\quad t\geqslant t_1,$$

откуда и следует, что $u_\gamma(t)$ — продолжаемое решение.

Если $u(t)$ — решение уравнения (1), то в результате подстановки

$$x=\ln\left(\int_{t_0}^{\infty} a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\Big/\int_{t}^{\infty} a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right),$$

$$u(t)=a_0^{-\frac{1}{n+3}}(t)\left(\int_{t}^{\infty} a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right)^{-\frac{2}{n-1}}w(x), \tag{30}$$

для $w(x)$ получаем уравнение вида (8), где

$$b_1(x)=\frac{n+3}{n-1},\quad b_2(x)=A_1(t),\quad b_3(x)=1+\frac{\alpha(t)}{a_0(t)}.$$

Пусть

$$w_0=a_0^{\frac{1}{n+3}}(t_0)\left(\int_{t_0}^{\infty} a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{2}{n-1}}u_0,$$

$w_\beta(x)$ — решение уравнения (8), удовлетворяющее условиям

$$w_\beta(0)=w_0,\quad w'_\beta(0)=\beta,$$

а $w_{\underline{\beta}}(x)$, $w_{\beta_0}(x)$ и $w_{\bar\beta}(x)$ — решения уравнения (8), которые получаются из $u_{\underline{\gamma}}(t)$, $u_{\gamma_0}(t)$ и $u_{\bar\gamma}(t)$ посредством преобразования (30). Очевидно, что решения $w_\beta(x)$ при $\beta\,\overline{\in}\,[\underline{\beta}, \bar\beta]$ будут непродолжаемыми, а при остальных значениях β — продолжаемыми. Кроме того, если $\beta\in[\beta_0, \bar\beta]$, то $w_\beta(x)>0$ при $x\geqslant 0$, а если $\beta\in[\underline{\beta}, \beta_0]$, то $w_\beta(x)<0$ при больших x.

Из (27) и (28) следует, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{b_2(x)}{b_3(x)}=A_1>0,$$

т. е. в рассматриваемом случае все условия леммы 2 удовлетворяются. Поэтому учитывая, что функции

$$a_0^{\frac{1}{n+3}}(t)\left(\int_{t}^{\infty} a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{2}{n-1}}$$

и

$$ta_0^{\frac{1}{n+3}}(t)\left(\int_t^{\infty} a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{2}{n-1}}$$

являются линейно независимыми решениями уравнения (11), заключаем, что, каково бы ни было $\beta \in [\underline{\beta}, \bar{\beta}]$, либо $|w_\beta(x)| \sim A_1^{\frac{1}{n-1}}$, либо $w(x) \sim 0$ и

$$w_\beta(x) \sim a_0^{\frac{1}{n+3}}(t)\left(\int_t^{\infty} a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{2}{n-1}}(c_0 + c_1 t), \tag{31}$$

где $|c_0| + |c_1| \neq 0$.

Докажем, что

$$w_{\bar{\beta}}(x) \sim A_1^{\frac{1}{n-1}}, \quad w_{\underline{\beta}}(x) \sim -A_1^{\frac{1}{n-1}}, \tag{32}$$

а для $w_\beta(x)$ при $\underline{\beta} < \beta < \bar{\beta}$ имеет место (31).

Мы приведем доказательство лишь первого из соотношений (32), так как второе доказывается совершенно аналогично. Допустим противное, а именно, что $w_{\bar{\beta}}(x) \sim 0$. Возьмем x_0 настолько большим, чтобы было:

$$w_{\bar{\beta}}(x_0) < B_1^{\frac{1}{n-1}}, \qquad w'_{\bar{\beta}}(x_0) < 0,$$

где

$$B_1 = \inf_{x \geqslant x_0} \left\{\frac{b_2(x)}{b_3(x)}\right\}.$$

Отсюда ясно, что если $\beta > \bar{\beta}$, но разность $\beta - \bar{\beta}$ достаточно мала, то

$$w_\beta(x_0) < B_1^{\frac{1}{n-1}}, \quad w'_\beta(x_0) < 0.$$

Так как каждый экстремум любого решения $w(x)$ уравнения (8) между прямыми $w = 0$ и $w = B_1^{\frac{1}{n-1}}$ является максимумом, то $w'_\beta(x) < 0$ при $x \geqslant x_0$, т. е.

$$0 < w_\beta(x) < B_1^{\frac{1}{n-1}}, \quad x \geqslant x_0,$$

что невозможно, поскольку при $\beta > \bar{\beta}$ решение $w_\beta(x)$ непродолжаемое.

Пусть $\beta_0 \leqslant \beta < \bar{\beta}$. Покажем, что $w_\beta(x) \sim 0$. Допустим противное: пусть $w_\beta(x) \sim A_1^{\frac{1}{n-1}}$. Пусть при $x \geqslant x_1 = x(t_1)$ решения $w_{\bar{\beta}}(x)$ и $w_\beta(x)$ удовлетворяют условию (14), где $b = A_1$, а δ подобрано таким образом, чтобы

$$(A_1 - \delta)\left[1 - \left(\frac{A_1 - \delta}{A_1 + \delta}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right] > (A_1 + \delta)\left[1 - \left(\frac{A_1 - \delta}{A_1 + \delta}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right]. \tag{33}$$

Для решений $u_\gamma(t)$ и $u_{\bar{\gamma}}(t)$ уравнения (1), соответствующих $w_\beta(x)$ и $w_{\bar{\beta}}(x)$, имеем:

$$0 < u_\gamma(t) < u_{\bar{\gamma}}(t), \quad u'_\gamma(t) < u'_{\bar{\gamma}}(t), \quad t \geqslant t_0.$$

Пусть $u(t)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\bar{u}(t_1) = u_{\bar{\gamma}}(t_1), \quad u'_{\gamma}(t_1) < \bar{u}(t_1) < u'_{\bar{\gamma}}(t_1),$$

а $\bar{w}(x)$ — соответствующее ему решение уравнения (8). В силу леммы 1 имеем:

$$u_{\gamma}(t) < \bar{u}(t) < u_{\bar{\gamma}}(t) \quad \text{при} \quad t \geqslant t_1.$$

Следовательно,

$$w_{\beta}(x) < \bar{w}(x) < w_{\bar{\beta}}(x) \quad \text{при } x \geqslant x_1.$$

Отсюда вытекает, что вместе с функциями $w_{\beta}(x)$ и $w_{\bar{\beta}}(x)$ функция $\bar{w}(x)$ удовлетворяет условию (14) при $x \geqslant x_1$. Поэтому, в силу (33), имеем:

$$\frac{w_{\bar{\beta}}^n(x) - \bar{w}^n(x)}{w_{\bar{\beta}}(x) - \bar{w}(x)} = w_{\bar{\beta}}^{n-1}(x)\left(1 - \frac{\bar{u}^n(x)}{u_{\bar{\beta}}^n(x)}\right)\left(1 - \frac{\bar{w}(x)}{w_{\bar{\beta}}(x)}\right)^{-1} \geqslant$$

$$\geqslant (A_1 - \delta)\left[1 - \left(\frac{A_1 - \delta}{A_1 + \delta}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right]\left[1 - \left(\frac{A_1 - \delta}{A_1 + \delta}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right]^{-1} > A_1 + \delta, \quad x \geqslant x_1. \tag{34}$$

Отсюда, считая, что $\frac{b_2(x)}{b_3(x)} \leqslant A_1 + \delta$ при $x \geqslant x_1$, в силу (8) найдем:

$$(w_{\bar{\beta}}(x) - \bar{w}(x))'' + b_1(w_{\bar{\beta}}(x) - \bar{w}(x))' \geqslant$$

$$\geqslant b_3(x)(w_{\bar{\beta}}(x) - \bar{w}(x))\left(A_1 + \delta - \frac{b_2(x)}{b_3(x)}\right) \geqslant 0.$$

Принимая во внимание, что $w'_{\bar{\beta}}(x_1) > \bar{w}'(x_1)$, из последнего неравенства выводим:

$$(w_{\bar{\beta}}(x) - w_{\beta}(x))' \geqslant e^{-b_1(x - x_1)}(w'_{\bar{\beta}}(x_1) - \bar{w}(x_1)) > 0$$

и

$$w_{\bar{\beta}}(\infty) - w_{\beta}(\infty) \geqslant \frac{w'_{\bar{\beta}}(x_1) - \bar{w}'(x_1)}{b_1} > 0,$$

что невозможно, так как

$$w_{\bar{\beta}}(\infty) = w_{\beta}(\infty) = A_1^{\frac{1}{n-1}}.$$

Полученное противоречие доказывает, что $w_{\beta}(x) \sim 0$ и, следовательно, в силу леммы 2, имеет место оценка (31). Аналогично доказывается справедливость этой оценки и при $\beta \in (\underline{\beta}, \beta_0)$.

Согласно (31) и (32), из (30) непосредственно следует справедливость указанных в теореме асимптотических формул.

Для завершения доказательства теоремы нам остается показать, что из (27) и (28) следует (29).

Рассмотрим сперва случай, когда

$$D = \frac{(n+3)^2}{4(n-1)^2} - A_1 > 0.$$

Учитывая, что в качестве решения $v_2(x)$ уравнения (10) можно взять функцию

$$a_0^{\frac{1}{n+3}}(t)\left(\int_t^\infty a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{2}{n-1}},$$

из (23) находим:

$$a_0^{\frac{2}{n+3}}(t)\left(\int_t^\infty a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right)^{-\frac{2(n+1-\delta+\varepsilon)}{n-1}} \geqslant c_1, \tag{35}$$

$$a_0(t) \leqslant c_2\left(\int_t^\infty a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{(n-1-\delta-\varepsilon)(n+3)}{n-1}}, \tag{36}$$

где c_1, c_2 и $\delta = \frac{n+3}{2} - (n-1)\sqrt{D}$ — положительные постоянные.

Интегрирование неравенства (35) дает:

$$\int_t^\infty a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau < c_3\, t^{-\frac{n-1}{n+3-2\delta+2\varepsilon}}, \quad c_3 > 0.$$

Считая, что $\varepsilon < \frac{(n-1)\delta}{3n+5}$, в силу последнего неравенства из (36) найдем:

$$a_0(t) \leqslant c_4\, t^{-(n+1+\delta_1)},$$

где $c_4 > 0$, $\delta_1 = \frac{(n-1)\delta - \varepsilon(3n+5)}{n+3-2\delta+2\varepsilon} > 0$. Полученная оценка вместе с (27) доказывает справедливость условия (29).

Если же $D \leqslant 0$, то для достаточно больших значений t будем иметь:

$$\left(a_0^{-\frac{1}{n+3}}(t)\right)'' > 0 \quad \text{и} \quad \left(a_0^{-\frac{1}{n+3}}(t)\right)' > 0.$$

Отсюда получаем, что

$$a_0(t) \leqslant \frac{\mathrm{const}}{t^{n+3}},$$

и, следовательно, имеет место (29). Теорема доказана.

Допустим теперь, что $A_1(t) \sim 0$. Рассмотрим выражение

$$A_2(t) = \left|\ln \int_t^\infty a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right| A_1(t) - \frac{n+3}{(n-1)^2}.$$

Пусть $A_2(t) \sim A_2 > 0$. Полагая

$$x = 2\left|\ln\int_t^\infty a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right|^{\frac{1}{2}}, \quad u(t) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{n-1}} a_0^{-\frac{1}{n+3}}(t)\left[\int_t^\infty a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right]^{-\frac{2}{n-1}} w(x),$$

для $w(x)$ получим уравнение вида (8), где

$$B_1(x) = \frac{n+3}{2(n-1)}\left(x - \frac{2}{x}\right), \quad B_2(x) = A_2(t) + \frac{4n}{(n-1)^2}x^{-2},$$

$$B_3(x) = 1 + \frac{\alpha(t)}{a_0(t)}.$$

Применяя лемму 2, тем же способом, каким мы доказали теорему 2, можно доказать справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3. *Если*

$$A_2(t) = \left|\ln \int_t^\infty a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right| \left[\frac{2(n+1)}{(n-1)^2} + \left(a^{-\frac{1}{n+3}}(t)\right)'' a_0^{-\frac{3}{n+3}}(t) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int_t^\infty a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right)^2\right] - \frac{n+3}{(n-1)^2} \sim A_2 > 0,$$

то $\underline{\gamma} < \gamma_0 < \overline{\gamma}$ *и*

$$u_{\overline{\gamma}}(t) \sim A_2^{\frac{1}{n-1}} \left|\ln \int_t^\infty a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right|^{-\frac{1}{n-1}} a_0^{-\frac{1}{n+3}}(t) \left(\int_t^\infty a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right)^{-\frac{2}{n-1}},$$

$$u_\gamma(t) \sim c_1 t, \quad \gamma_0 < \gamma < \overline{\gamma},$$

$$u_{\gamma_0}(t) \sim c_0,$$

$$u_\gamma(t) \sim -c_2 t, \quad \underline{\gamma} < \gamma < \gamma_0,$$

$$u_{\underline{\gamma}}(t) \sim -A_2^{\frac{1}{n-1}} \left|\ln \int_t^\infty a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right|^{-\frac{1}{n-1}} a_0^{-\frac{1}{n+3}}(t) \left(\int_t^\infty a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right)^{-\frac{2}{n-1}},$$

где $c_0 > 0$, $c_i = c_i(\gamma) > 0$ $(i = 1, 2)$.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 4. *Если при достаточно больших* t

$$a(t)\,t^{n+1} \geqslant \delta > 0 \tag{37}$$

и

$$\int^\infty t a(t)\,dt < \infty, \tag{38}$$

то $\overline{\gamma} = \gamma_0 = \underline{\gamma}$ *и*

$$u_{\gamma_0}(t) \sim c_0 > 0.$$

Доказательство. Покажем сперва, что при условии (37) каждое продолжаемое решение уравнения (1) ограничено при $t \to \infty$. Допустим противное: пусть уравнение (1) обладает неограниченным продолжаемым решением $u(t)$. Считая, что $u(t) > 0$ при больших t, выводим из (1) либо

$$u'(t) \sim c > 0, \tag{39}$$

либо

$$u'(t) \to \infty, \quad \text{когда } t \to \infty. \tag{40}$$

Если удовлетворяется (39), то для больших t имеем:

$$\frac{c}{2} \leqslant u'(t) < 2c.$$

В силу этого неравенства и условия (37), из уравнения (1) получаем противоречие:

$$2c \geqslant u'(t) = u'(t_1) + \int_{t_1}^t a(\tau)\,u^n(\tau)\,d\tau \geqslant \left(\frac{c}{2}\right)^n \int_{t_1}^t a(\tau)(\tau - t_1)^n\,d\tau \to \infty,$$

когда $t \to \infty$.

Если удовлетворяется (40), то перепишем уравнение (1) следующим образом:

$$u'' = a_1(t)\, u,$$

где

$$a_1(t) = a(t)\, u^{n-1}(t).$$

Рассмотрим уравнение

$$v'' = \frac{2(n+1)(n+3)}{(n-1)^2}\, t^{-2} v. \tag{41}$$

В силу (40), $\frac{u(t)}{t} \to \infty$ при $t \to \infty$. Поэтому из (37) следует, что при достаточно большом t_1

$$a_1(t) > \frac{2(n+1)(n+3)}{(n-1)^2}\, t^{-2}, \quad \text{если } t \geqslant t_1.$$

Если

$$\varepsilon = \min\left\{t_1^{-\frac{2(n+1)}{n-1}} u(t_1), \quad \frac{n-1}{2(n+1)}\, t_1^{-\frac{n+3}{n-1}} u'(t_1)\right\},$$

то для решения $v(t) = \varepsilon t^{\frac{2(n+1)}{n-1}}$ уравнения (41) имеем:

$$u(t_1) \geqslant v(t_1), \quad u'(t_1) \geqslant v'(t_1).$$

Отсюда, в силу леммы 1, следует:

$$u(t) \geqslant \varepsilon t^{\frac{2(n+1)}{n-1}} \quad \text{при } t \geqslant t_1.$$

С помощью последнего неравенства выводим из (1), что

$$u''(t)\, u'(t) \geqslant \delta \varepsilon^{\frac{n-1}{2}} u^{\frac{n+1}{2}} u'(t),$$

откуда посредством интегрирования находим:

$$u'(t)\, u^{-\frac{n+3}{4}}(t) \geqslant \delta_1 > 0, \quad t > t_2,$$

где t_2 — достаточно большое число. Следовательно,

$$u^{-\frac{n-1}{4}}(t_0) - u^{\frac{n-1}{4}}(t) \geqslant \frac{(n-1)\,\delta_1}{4}(t - t_2), \quad t \geqslant t_2.$$

Мы получили противоречие; тем самым доказано, что уравнение (1) не имеет продолжаемых неограниченных решений. Значит, $\overline{\gamma} = \gamma_0 = \underline{\gamma}$.

Выше мы установили, что $u_{\gamma_0}(t) \sim c_0 \geqslant 0$. Покажем, что $c_0 > 0$. Действительно, если допустить, что $c_0 = 0$, то, в силу (38), из уравнения (1) получим:

$$u_{\gamma_0}(t) = \int_t^\infty d\tau \int_\tau^\infty a(\tau_1)\, u^n(\tau_1)\, d\tau_1 \leqslant u_{\gamma_0}^n(t) \int_t^\infty \tau a(\tau)\, d\tau.$$

Отсюда следует, что $u_{\gamma_0}(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, но это противоречит нашему допущению. Теорема доказана.

Рассмотрим функцию

$$A_3(t) = \frac{2(n+1)}{(n-1)^2} + \left(a_0^{-\frac{1}{n+3}}(t)\right)'' a_0^{-\frac{3}{n+3}}(t)\left(\int_0^t a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right)^2.$$

Пусть существует предел

$$\lim_{t\to\infty} A_3(t) = A_3.$$

Нетрудно доказать, что если $A_3 < 0$, то выполняется (38); если $A_3 = 0$, то

$$\int^{\infty} a^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau = \infty,$$

а условие (38) либо выполняется, либо нет; если же $A_3 > 0$, то

$$\int^{\infty} ta(t)\,dt = \int^{\infty} a^{\frac{2}{n+3}}(t)\,dt = \infty.$$

Ниже мы рассмотрим именно те случаи, когда выполняется (37) и $\int^{\infty} ta(t)\,dt = \infty$, так как случай, когда выполняется (38), уже разобран в предшествующих теоремах.

ТЕОРЕМА 5. *Если*

$$A_4(t) = \frac{n+3}{(n-1)^2} + \left[\left(a_0^{-\frac{1}{n+3}}(t)\right)'' a_0^{-\frac{3}{n+3}}(t)\left(\int_0^t a_0^{\frac{2}{n+3}}(t)\,d\tau\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{2(n+3)}{(n-1)^2}\right] \ln \int_0^t a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau \sim A_4 > 0, \tag{42}$$

то $\overline{\gamma} = \gamma_0 = \underline{\gamma}$ *и*

$$u_{\gamma_0}(t) \sim A_4^{\frac{1}{n-1}}\left(\ln \int_0^t a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right)^{-\frac{1}{n-1}} a_0^{-\frac{1}{n+3}}(t)\left(\int_0^t a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right)^{-\frac{2}{n-1}}. \tag{43}$$

Доказательство. Полагая

$$x = 2\left(\ln \int_0^t a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$u(t) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{n-1}} a_0^{-\frac{1}{n+3}}(t)\left(\int_0^t a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right)^{-\frac{2}{n-1}} w(x), \tag{44}$$

для $w(x)$ получим уравнение (8), где

$$b_1(x) = -\frac{n+3}{2(n-1)}\left(x + \frac{2}{x}\right), \quad b_2(x) = A_4(t) + \frac{4n}{(n-1)^2}x^{-2},$$

$$b_3(x) = 1 + \frac{\alpha(t)}{a_0(t)}.$$

В силу (42) и леммы 2 получаем, что $w(x) \sim A_4^{\frac{1}{n-1}}$. При учете последнего условия из (44) непосредственно вытекает справедливость асимптотической формулы (43).

ТЕОРЕМА 6. *Если*

$$A_3(t) = \frac{2(n+1)}{(n-1)^2} + \left(a_0^{-\frac{1}{n+3}}(t)\right)'' a_0^{-\frac{3}{n+3}}(t)\left(\int_0^t a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right)^2 \sim A_3 > 0, \tag{45}$$

то $\bar{\gamma} = \gamma_0 = \underline{\gamma}$ *и*

$$u_{\gamma_0}(t) \sim A_3^{\frac{1}{n-1}} a_0^{-\frac{1}{n+3}}(t)\left(\int_0^t a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right)^{-\frac{2}{n-1}}. \tag{46}$$

Доказательство. Полагая

$$x = \ln \int_0^t a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau, \quad u(t) = a_0^{-\frac{1}{n+3}}(t)\left(\int_0^t a_0^{\frac{2}{n+3}}(\tau)\,d\tau\right)^{-\frac{2}{n-1}} w(x),$$

для $w(x)$ получаем уравнение (8), где

$$b_1(x) = -\frac{n+3}{n-1}, \quad b_2(x) = A_3(t), \quad b_3(x) = 1 + \frac{\alpha(t)}{a_0(t)}.$$

Учитывая условие (45) и лемму 3, легко убеждаемся в справедливости асимптотической формулы (46).

§ 3. Асимптотика непродолжаемых решений

Пусть $t_0 > 0$, $u_0 \geqslant 0$. Как и выше, будем считать, что $u_\gamma(t)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = \gamma.$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 7. *Если* $a(t)$ — *непрерывная положительная функция на* $[0, \infty)$, *то для любого* $t_1 > t_0$ *найдутся такие числа* $\underline{\gamma}(t_1)$ *и* $\bar{\gamma}(t_1)$, *что решение* $u_\gamma(t)$ *при* $\gamma \in (\underline{\gamma}(t_1), \bar{\gamma}(t_1))$ *ограничено на* $[t_0, t_1]$, *при* $\gamma \bar{\in} [\underline{\gamma}(t_1), \bar{\gamma}(t_1)]$ *имеет вертикальную асимптоту для некоторого значения* t, $t < t_1$, *а решения* $u_{\underline{\gamma}(t_1)}(t)$ *и* $u_{\bar{\gamma}(t_1)}(t)$ *при* $t \to t_1$ *имеют соответственно вид*

$$u_{\bar{\gamma}(t_1)}(t) \sim \left[\frac{2(n+1)}{a(t_1)(n-1)^2}\right]^{\frac{1}{n-1}} (t_1 - t)^{-\frac{2}{n-1}}$$

и

$$u_{\underline{\gamma}(t_1)}(t) \sim -\left[\frac{2(n+1)}{a(t_1)(n-1)^2}\right]^{\frac{1}{n-1}} (t_1 - t)^{-\frac{2}{n-1}}.$$

Доказательство. Подстановка

$$x = \frac{1}{t_1 - t}, \quad u(t) = x^{-1} w(x) \tag{47}$$

преобразует уравнение (1) в уравнение

$$w'' = (a_0(x) + \alpha(x))\, w^n, \tag{48}$$

где

$$a_0(x) = \frac{a(t_1)}{x^{n+3}}, \quad \alpha(x) = \frac{a(t_1) - a(t)}{x^{n+3}}.$$

Положим $x_0 = \frac{1}{t_1 - t_0}$, $w_0 = x_0 u_0$. Пусть $w_\beta(x)$ — решение уравнения (48), удовлетворяющее условиям:

$$w(x_0) = w_0, \quad w'(x_0) = \beta.$$

Согласно теореме 2, найдутся такие числа $\underline{\beta}(t_1)$ и $\overline{\beta}(t_1)$, что

$$w_{\underline{\beta}}(x) \sim -\left[\frac{2(n+1)}{a(t_1)(n-1)^2}\right]^{\frac{1}{n-1}} x^{\frac{n+1}{n-1}},$$

$$w_{\overline{\beta}}(x) \sim \left[\frac{2(n+1)}{a(t_1)(n-1)^2}\right]^{\frac{1}{n-1}} x^{\frac{n+1}{n-1}},$$

$$w_\beta(x) = O(x), \quad \beta \in (\underline{\beta}, \overline{\beta}),$$

а для остальных значений β решения $w_\beta(x)$ непродолжаемы. Положив

$$\overline{\gamma}(t_1) = w_0 + x_0^{-1}\overline{\beta}(t_1), \quad \underline{\gamma}(t_1) = w_0 + x_0^{-1}\underline{\beta}(t_1),$$

в силу последних оценок и формул (47), легко убеждаемся в справедливости нашей теоремы.

Поступило
9.IV.1963

ЛИТЕРАТУРА

[1] Беллман Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, М., ИЛ, 1954.

[2] Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 2, М., ИЛ, 1954.

[3] Atkinson F. V., On second order non linear oscillations, Pacif. J. Math., 5 (1955), 643—647.

[4] Ясны М., О существовании колеблющегося решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + f(x)\, y^{2n-1} = 0$, Časop. pěstov. mat., 85, № 1 (1960), 78—83.

[5] Курцвейль Я., Заметка по колеблющимся решениям уравнения $y'' + f(x)\, y^{2n-1} = 0$, Časop. pěstov. mat., 85, № 3 (1960), 357—358.

[6] Кигурадзе И. Т., Об одном обобщении теоремы Армеллини — Тонелли — Сансоне, Тр. Тбилисск. ун-та, 84 (1962), 233—238.

[7] Кигурадзе И. Т., Об условиях колеблемости решений уравнения $u'' + a(t)\,|u|^n \operatorname{sign} u = 0$, Časop. pěstov. mat., 87, № 3 (1962), 492—495.

[8] Кигурадзе И. Т., Об асимптотических свойствах решений уравнения $u'' + a(t)\, u^n = 0$, Сообщ. АН ГрузССР, 30, № 2 (1963), 129—136.

[9] Utz W. R., Properties of solutions of $u'' + g(t)\, u^{2n-1} = 0$, Monatsh. Math., B. 66, № 1 (1962), 55—60.