ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2014, том 50, № 8, с. 1025–1041

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.4

НЕЛИНЕЙНЫЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ПО ФАЗОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

 И. Т. Кигурадзе

Для сингулярных по фазовой переменной обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка установлены в определенном смысле оптимальные признаки существования и единственности положительных решений нелинейных нелокальных краевых задач.

DOI: 10.1134/S0374064114080032

1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $-\infty < a < b < +\infty$,

$$I \subset]a,b[\,, \quad \operatorname{mes} I = b - a,$$

а $f:\ I\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}_-$ – измеримая по первому аргументу и непрерывная по второму аргументу функция. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u'' = f(t,u) \tag{1.1}$$

с краевыми условиями одного из двух видов

$$u(a) = \varphi_1(u), \quad u(b) = \varphi_2(u), \tag{1.2}$$

$$u(a) = \varphi_1(u), \quad u'(b) = \varphi_2(u), \tag{1.3}$$

где $\varphi_i:\ C([a,b];\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ $(i=1,2)$ – непрерывные функционалы, ограниченные на каждом ограниченном подмножестве множества $C([a,b];\mathbb{R}_+)$.

Такие задачи интересны не только с чисто теоретической, но и с практической точки зрения. Сказанное в первую очередь касается случая, когда уравнение (1.1) является сингулярным по фазовой переменной, т.е. случая, когда

$$\lim_{x\to 0} f(t,x) = -\infty \quad \text{при} \quad t \in I_0, \tag{1.4}$$

где $I_0 \subset I$ – некоторое множество положительной меры. Например, в теории мембран и пластин возникает задача

$$u'' = -\frac{t^2}{32u^2}, \quad u(0) = u(1) = 0$$

(см. [1–3]), а в теории пограничного слоя вязкой несжимаемой жидкости – задача

$$u'' = -\frac{1-t}{u}, \quad u(0) = u(1) = 0$$

(см. [4–6]).

Для уравнения (1.1) в упомянутом выше сингулярном случае исследованы в основном двухточечные краевые задачи (см., например, [7–20] и приведенную там библиографию). Нелинейные нелокальные задачи до сих пор остаются неизученными. Восполнению этого пробела и посвящена настоящая работа.

Доказанные в работе теоремы о разрешимости и однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.2) (задачи (1.1), (1.3)) охватывают случай, когда функция f удовлетворяет условию (1.4) и относительно первого аргумента имеет неинтегрируемые сингулярности (неинтегрируемую сингулярность) в точках a и b (в точке a).

Нами использованы следующие обозначения:

$$f^*(t,x,y) = \max\{|f(t,s)| : \ x \le s \le y\} \quad \text{при} \quad t \in I, \quad 0 < x \le y < +\infty,$$

$\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[\,$, $\mathbb{R}_- =]-\infty,0]$, $C([a,b];\mathbb{R})$ – банахово пространство непрерывных функций $u: [a,b] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|u\| = \max\{|u(t)| : \ a \le t \le b\}$, $C([a,b];\mathbb{R}_+)$ – множество всех неотрицательных функций из $C([a,b];\mathbb{R})$, а $\widetilde{C}^1_{\mathrm{loc}}(]a,b[\,;\mathbb{R})$ – пространство непрерывно дифференцируемых функций $u :]a,b[\, \to \mathbb{R}$, первая производная которых является абсолютно непрерывной на каждом замкнутом промежутке, содержащемся в $]a,b[\,$; если $u \in C([a,b];\mathbb{R})$, то

$$\|u\|_{[a,t]} = \max\{|u(s)| : \ a \le s \le t\} \quad \text{при} \quad a < t \le b,$$

$$\mu(u;t_1,t_2) = \min\{u(t) : \ t_1 \le t \le t_2\} \quad \text{при} \quad a \le t_1 < t_2 \le b.$$

Скажем, что функция $g: \ I \times]0,+\infty[\, \to \mathbb{R}_+$ принадлежит множеству M_+, если $g(\,\cdot\,,x) : I \to \mathbb{R}_+$ является измеримой функцией при любом $x \in]0,+\infty[\,$, а $g(t,\,\cdot\,) :]0,+\infty[\, \to \mathbb{R}_+$ – непрерывной, невозрастающей функцией при любом $t \in I$.

Скажем, что функция $g: \ I \times]0,+\infty[\, \to \mathbb{R}_-$ принадлежит множеству M_-, если $-g \in M_+$.

Функцию $u \in C([a,b];\mathbb{R}) \cap \widetilde{C}_{\mathrm{loc}}(]a,b[\,;\mathbb{R})$ назовем *положительным решением дифференциального уравнения* (1.1), если она положительна на открытом промежутке $]a,b[$ и почти всюду на $]a,b[$ удовлетворяет этому уравнению.

Положительное решение u дифференциального уравнения (1.1) назовем *положительным решением задачи* (1.1), (1.2) (*положительным решением задачи* (1.1), (1.3)), если выполнены равенства (1.2) (существует конечный предел $u'(b) = \lim\limits_{t \to b} u'(t)$ и выполнены равенства (1.3)).

Мы предполагаем, что функция f на множестве $I \times]0,+\infty[$ удовлетворяет неравенству

$$f(t,x) \le -p_0(t,x), \tag{1.5}$$

где $p_0 \in M_+$. Кроме того, задачу (1.1), (1.2) мы исследуем в случае, когда

$$0 < \int_a^b (s-a)(b-s)p_0(s,x)\,ds \le \int_a^b (s-a)(b-s)f^*(s,x,y)\,ds < +\infty \quad \text{при} \quad 0 < x \le y < +\infty, \tag{1.6}$$

а задачу (1.1), (1.3) – в случае, когда

$$0 < \int_a^b (s-a)p_0(s,x)\,ds \le \int_0^b (s-a)f^*(s,x,y)\,ds < +\infty \quad \text{при} \quad 0 < x \le y < +\infty. \tag{1.7}$$

Наряду с задачами (1.1), (1.2) и (1.1), (1.3) нам придется рассмотреть зависящее от параметра $\lambda \in [0,1]$ дифференциальное уравнение

$$u'' = (\lambda - 1)p_0(t,u) + \lambda f(t,u) \tag{1.8}$$

с краевыми условиями одного из следующих двух видов:

$$u(a) = \lambda\varphi_1(u) + \delta, \quad u(b) = \lambda\varphi_2(u) + \delta, \tag{1.9}$$

$$u(a) = \lambda\varphi_1(u) + \delta, \quad u'(b) = \lambda\varphi_2(u). \tag{1.10}$$

Имеет место

Предложение 1.1 (принцип априорной ограниченности). *Пусть функция* f *на множестве* $I\times\,]0,+\infty[$ *удовлетворяет неравенству (1.5), где* $p_0 \in M_+$. *Пусть, кроме того, выполнено условие (1.6) (условие (1.7)) и существуют числа* $\delta_0 > 0$ *и* $\rho > \delta_0$ *такие, что при произвольных* $\lambda \in [0,1]$ *и* $\delta \in\,]0,\delta_0]$ *каждое решение задачи (1.8), (1.9) (задачи (1.8), (1.10)) допускает оценку*

$$\|u\| \le \rho. \tag{1.11}$$

Тогда задача (1.1), (1.2) (задача (1.1), (1.3)) имеет хотя бы одно положительное решение.

На основе этого предложения и априорных оценок решений сингулярных дифференциальных неравенств второго порядка в нелокальных краевых условиях [21] установлены в определенном смысле оптимальные признаки разрешимости и однозначной разрешимости задач (1.1), (1.2) и (1.1), (1.3).

В первую очередь приведем результаты, касающиеся задачи (1.1), (1.2).

Теорема 1.1. *Пусть на множествах* $I\times\,]0,+\infty[$ *и* $C([a,b];\mathbb{R}_+)$ *выполнены соответственно неравенства*

$$-(1+x)p_1(t,x) \le f(t,x) \le -p_0(t,x), \tag{1.12}$$

$$\varphi_i(u) \le \ell\|u\| + r \quad (i=1,2), \tag{1.13}$$

где $p_i \in M_+$ $(i=0,1)$, $\ell \in [0,1[$ *и* $r \ge 0$. *Если, кроме того,*

$$0 < \int\limits_a^b (s-a)(b-s)p_i(s,x)\,ds < +\infty \quad \text{при} \quad x>0 \quad (i=0,1), \tag{1.14}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \int\limits_a^b (s-a)(b-s)p_1(s,x)\,ds < (1-\ell)(b-a), \tag{1.15}$$

то задача (1.1), (1.2) имеет хотя бы одно положительное решение.

Теорема 1.2. *Пусть на множестве* $I\times\,]0,+\infty[$ *выполнены условия*

$$-p_0(t,x) - p(t)(1+x) \le f(t,x) \le -p_0(t,x), \tag{1.16}$$

$$(f(t,x)-f(t,y))\operatorname{sgn}(x-y) \ge -p(t)|x-y|, \tag{1.17}$$

а на множестве $C([a,b];\mathbb{R}_+)$ – *условия*

$$|\varphi_i(u)-\varphi_i(v)| \le \ell\|u-v\| \quad (i=1,2), \tag{1.18}$$

где $p_0 \in M_+$, $p:\ I \to \mathbb{R}_+$ – *измеримая функция и* $\ell \in [0,1[$. *Если, кроме того,*

$$\begin{gathered} 0 < \int\limits_a^b (s-a)(b-s)p_0(s,x)\,ds < +\infty \quad \text{при} \quad x>0, \\ \int\limits_a^b (s-a)(b-s)p(s)\,ds < (1-\ell)(b-a), \end{gathered} \tag{1.19}$$

то задача (1.1), (1.2) имеет одно и только одно положительное решение.

Следствие 1.1. *Пусть*

$$f \in M_-, \quad 0 < \int\limits_a^b (s-a)(b-s)|f(s,x)|\,ds < +\infty \quad \text{при} \quad x>0 \tag{1.20}$$

и на множестве $C([a,b];\mathbb{R}_+)$ *выполнены условия (1.13) (условия (1.18)), где* $\ell \in [0,1[$ *и* $r \geq 0$. *Тогда задача (1.1), (1.2) имеет хотя бы одно (одно и только одно) положительное решение.*

В этом следствии неравенство

$$\ell < 1 \tag{1.21}$$

является неулучшаемым. Более того, имеет место

Следствие 1.2. *Пусть функция* f *удовлетворяет условиям (1.20), а функционалы* φ_i $(i=1,2)$ *на множестве* $C([a,b];\mathbb{R}_+)$ *– неравенствам*

$$\ell\mu(u;a_i,b_i) \leq \varphi_i(u) \leq \ell\|u\| + r \quad (i=1,2), \tag{1.22}$$

где $a < a_i < b_i < b$ $(i=1,2)$, *а* ℓ *и* r *– неотрицательные постоянные. Тогда для существования хотя бы одного положительного решения задачи (1.1), (1.2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство (1.21).*

Замечание 1.1. Неравенствам (1.22) удовлетворяют, например, функционалы

$$\varphi_i(u) = \int\limits_{a_i}^{b_i} \psi_i(u(s))\,d\sigma_i(s) \quad (i=1,2),$$

где $\psi_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ $(i=1,2)$ – непрерывные, а $\sigma_i : [a_i,b_i] \to \mathbb{R}$ $(i=1,2)$ – неубывающие функции такие, что

$$\ell x \leq \psi_i(x) \leq \ell x + r \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad \sigma(b_i) - \sigma(a_i) = 1 \quad (i=1,2).$$

Следующие две теоремы и их следствия также касаются задачи (1.1), (1.2), но в случае, когда вместо условий (1.13) и (1.18) выполнены соответственно условия

$$\varphi_1(u) \leq \ell\|u\| + r, \quad \varphi_2(u) \leq \|u\|_{[a,b_0]}, \tag{1.23}$$

$$|\varphi_1(u) - \varphi_1(v)| \leq \ell\|u-v\|, \quad |\varphi_2(u) - \varphi_2(v)| \leq \|u-v\|_{[a,b_0]}, \quad \varphi_2(0) = 0, \tag{1.24}$$

где $b_0 \in]a,b[$.

Теорема 1.3. *Пусть на множествах* $I\times]0,+\infty[$ *и* $C([a,b];\mathbb{R}_+)$ *выполнены соответственно неравенства (1.12) и (1.23), где* $p_i \in M_+$ $(i=0,1)$ *– функции, удовлетворяющие условиям (1.14),* $b_0 \in]a,b[$, $\ell \in [0,1[$ *и* $r \geq 0$. *Если, кроме того,*

$$\lim_{x\to+\infty} \int\limits_a^b (s-a)(b-s)p_1(s,x)\,ds < (1-\ell)(b-b_0), \tag{1.25}$$

то задача (1.1), (1.2) имеет хотя бы одно положительное решение.

Теорема 1.4. *Пусть функция* f *удовлетворяет условиям (1.20). Если, кроме того, на множестве* $C([a,b];\mathbb{R}_+)$ *выполнены условия (1.23) (условия (1.24)), где* $\ell \in [0,1[$ *и* $r \geq 0$, *то задача (1.1), (1.2) имеет хотя бы одно (одно и только одно) положительное решение.*

Следствие 1.3. *Пусть функция* f *удовлетворяет условиям (1.20), а функционалы* φ_i $(i=1,2)$ *на множестве* $C([a,b];\mathbb{R}_+)$ *– неравенствам*

$$\ell\mu(u;a_1,b_1) \leq \varphi_1(u) \leq \ell\|u\| + r, \quad \mu(u;a_2,b_2) \leq \varphi_2(u) \leq \|u\|_{[a,b_0]}, \tag{1.26}$$

где $a < a_1 < b_1 < b$, $a < a_2 < b_2 \leq b_0$, *а* ℓ *и* r *– неотрицательные постоянные. Тогда для существования хотя бы одного положительного решения задачи (1.1), (1.2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство (1.21).*

Замечание 1.2. Неравенствам (1.26) удовлетворяют, например, функционалы

$$\varphi_1(u) = \int\limits_{a_1}^{b_1} \psi(u(s))\,d\sigma_1(s), \quad \varphi_2(u) = \int\limits_{a_2}^{b_2} u(s)\,d\sigma_2(s),$$

где $\psi:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ $(i=1,2)$ – непрерывная, а $\sigma_i:\ [a_i,b_i] \to \mathbb{R}_+$ $(i=1,2)$ – неубывающие функции такие, что

$$\ell x \le \psi(x) \le \ell x + r \ \text{ при } \ x \in \mathbb{R}_+, \quad \sigma_i(b_i) - \sigma_i(a_i) = 1 \quad (i=1,2).$$

Перейдем теперь к формулировке теорем о разрешимости и однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.3).

Теорема 1.5. *Пусть на множестве* $I \times]0,+\infty[$ *выполнено неравенство (1.12), а на множестве* $C([a,b];\mathbb{R}_+)$ *– неравенство*

$$\varphi_1(u) + (b-a)\varphi_2(u) \le \ell\|u\| + r, \tag{1.27}$$

где $p_i \in M_+$ $(i=0,1)$, $\ell = [0,1[$ *и* $r \ge 0$. *Если, кроме того,*

$$0 < \int\limits_a^b (s-a)p_i(s,x)\,ds < +\infty \quad \text{при} \quad x>0 \quad (i=0,1), \tag{1.28}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \int\limits_a^b (s-a)p_1(s,x)\,ds < 1-\ell, \tag{1.29}$$

то задача (1.1), (1.3) имеет хотя бы одно положительное решение.

Теорема 1.6. *Пусть на множестве* $I \times]0,+\infty[$ *выполнены условия (1.16), (1.17), а на множестве* $C([a,b];\mathbb{R}_+)$ *– условие*

$$|\varphi_1(u) - \varphi_1(v)| + (b-a)|\varphi_2(u) - \varphi_2(v)| \le \ell\|u-v\| \quad (i=1,2), \tag{1.30}$$

где $p_0 \in M_+$, $p:\ I \to \mathbb{R}_+$ *– измеримая функция и* $\ell = [0,1[$. *Если, кроме того,*

$$0 < \int\limits_a^b (s-a)p_0(s,x)\,ds < +\infty \quad \text{при} \quad x>0, \qquad \int\limits_a^b (s-a)p(s)\,ds < 1-\ell,$$

то задача (1.1), (1.3) имеет одно и только одно положительное решение.

Следствие 1.4. *Пусть*

$$f \in M_-, \quad 0 < \int\limits_a^b (s-a)|f(s,x)|\,ds < +\infty \tag{1.31}$$

и на множестве $C([a,b];\mathbb{R}_+)$ *выполнено условие (1.27) (условие (1.30)), где* $\ell \in [0,1[$ *и* $r \ge 0$. *Тогда задача (1.1), (1.3) имеет хотя бы одно (одно и только одно) положительное решение.*

Следствие 1.5. *Пусть функция* f *удовлетворяет условиям (1.31), а функционалы* φ_i $(i=1,2)$ *на множестве* $C([a,b];\mathbb{R}_+)$ *– неравенствам*

$$\ell u(b) \le \varphi_1(u) + (b-a)\varphi_2(u) \le \ell u(b) + r,$$

где ℓ *и* r *– неотрицательные постоянные. Тогда для существования хотя бы одного положительного решения задачи (1.1), (1.3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство (1.21).*

В заключение этого пункта в качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u'' = -\frac{p(t)}{h(u)} \tag{1.32}$$

с краевыми условиями одного из трех видов:

$$u(a) = \sum_{i=1}^{m} \ell_{1k} u(t_k), \quad u(b) = \sum_{i=1}^{m} \ell_{2k} u(t_k), \tag{1.33}$$

$$u(a) = \sum_{k=1}^{m} \ell_{1k} u(t_k), \quad u'(b) = \sum_{k=1}^{m} \ell_{2k} u(t_k), \tag{1.34}$$

$$u(a) = \ell_1 u(b), \quad u'(b) = \ell_2 u(b), \tag{1.35}$$

где $p: I \to \mathbb{R}_+$ – измеримая функция, отличная от нуля на множестве положительной меры, $h:]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ – непрерывная функция, $a < t_1 < \ldots < t_m < b$, а ℓ_{ik} и ℓ_i $(i = 1, 2;$ $k = \overline{1, m})$ – неотрицательные числа.

Заметим, что возникающие в приложениях сингулярные краевые задачи, рассмотренные в работах [1–6, 20], являются частными случаями задачи (1.32), (1.33).

Из теорем 1.3–1.6 вытекают следующие предложения.

Следствие 1.6. *Пусть функция* h *удовлетворяет условиям*

$$\limsup_{x\to 0} h(x) < +\infty, \quad \liminf_{x\to+\infty} h(x) > 0 \tag{1.36}$$

(функция h *является неубывающей) и*

$$\sum_{k=1}^{m} \ell_{ik} < 1 \quad (i = 1, 2). \tag{1.37}$$

Тогда для существования хотя бы одного (единственного) положительного решения задачи (1.32), (1.33) необходимо и достаточно, чтобы соблюдалось условие

$$\int_a^b (s-a)(b-s)p(s)\,ds < +\infty. \tag{1.38}$$

Следствие 1.7. *Пусть функция* h *удовлетворяет условиям (1.36) (является неубывающей) и*

$$\textit{либо} \quad \sum_{k=1}^{m} \ell_{1k} = \sum_{k=1}^{m} \ell_{2k}, \quad \textit{либо} \quad \sum_{k=1}^{m} \ell_{2k} = 1.$$

Тогда для существования хотя бы одного (единственного) положительного решения задачи (1.32), (1.33) необходимо и достаточно, чтобы соблюдались условия

$$\sum_{k=1}^{m} \ell_{1k} < 1, \quad \int_a^b (s-a)(b-s)p(s)\,ds < +\infty.$$

Следствие 1.8. *Пусть функция* h *удовлетворяет условиям (1.36) (является неубывающей) и*

$$\sum_{k=1}^{m} (\ell_{1k} + (b-a)\ell_{2k}) < 1.$$

Тогда для существования хотя бы одного (единственного) положительного решения задачи (1.32), (1.34) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_a^b (s-a)p(s)\,ds < +\infty.$$

Следствие 1.9. *Если функция h удовлетворяет условиям (1.36) (является неубывающей), то для существования хотя бы одного (единственного) решения задачи (1.32), (1.35) необходимо и достаточно, чтобы соблюдались условия*

$$\ell_1 + (b-a)\ell_2 < 1, \quad \int\limits_a^b (s-a)p(s)\,ds < +\infty.$$

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

2.1. Леммы об априорных оценках. Рассмотрим дифференциальные неравенства

$$u''(t) \le -p_0(t, u(t)), \tag{2.1}$$

$$-(1+u(t))p_1(t,u(t)) \le u''(t) \le -p_0(t,u(t)), \tag{2.2}$$

где $p_i \in M_+$ $(i = 0, 1)$.

Функцию $u \in C([a,b];\mathbb{R}) \cap \widetilde{C}^1_{\text{loc}}(]a,b[\,;\mathbb{R})$ назовем *положительным решением дифференциального неравенства* (2.1) (*дифференциального неравенства* (2.2)), если она положительна на открытом промежутке $]a,b[$ и почти всюду на $]a,b[$ удовлетворяет этому дифференциальному неравенству.

Лемма 2.1. *Пусть*

$$p_0 \in M_+, \quad \operatorname{mes}\{t \in I:\ p_0(t,x) > 0\} > 0 \quad \textit{при} \quad x > 0 \tag{2.3}$$

и дифференциальное неравенство (2.1) имеет положительное решение u. Тогда

$$0 < \int\limits_a^b (s-a)(b-s)p_0(s,x)\,ds < +\infty \quad \textit{при} \quad x \ge \|u\| \tag{2.4}$$

и

$$u(t) \ge u_0 + (t-a)(b-t)(b-a)^{-3}\int\limits_a^b (s-a)(b-s)p_0(s,\|u\|)\,ds > u_0 \quad \textit{при} \quad a < t < b, \tag{2.5}$$

где $u_0 = \min\{u(a), u(b)\}$.

Доказательство. Пусть $a_k \in]a,b[$ и $b_k \in]a_k,b[$ $(k = 1,2,\ldots)$ – некоторые последовательности, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = a, \quad \lim_{k\to+\infty} b_k = b.$$

Согласно лемме 2.2 работы [21] и неравенству (2.1), при любом натуральном k функция u на промежутке $[a_k, b_k]$ допускает оценку

$$u(t) \ge u_{0k} + (t-a_k)(b_k-t)(b_k-a_k)^{-3}\int\limits_{a_k}^{b_k} (s-a_k)(b_k-s)|u''(s)|\,ds \ge$$

$$\ge u_{0k} + (t-a_k)(b_k-t)(b_k-a_k)^{-3}\int\limits_{a_k}^{b_k} (s-a_k)(b_k-s)p_0(s,u(s))\,ds,$$

где $u_{0k} = \min\{u(a_k), u(b_k)\}$. Если в этом неравенстве перейдем к пределу, когда $k \to +\infty$, и учтем условия (2.3), то справедливость неравенств (2.4) и (2.5) станет очевидной. Лемма доказана.

Аналогично доказывается

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия (2.3) и дифференциальное неравенство (2.1) имеет положительное решение* u. *Если, кроме того, существует конечный предел*

$$u'(b) = \lim_{t\to b} u'(t),$$

то

$$0 < \int_a^b (b-s)p_0(s,x)\,ds < +\infty \quad \text{при} \quad x \geq \|u\|$$

и

$$u(t) \geq u(a) + (t-a)u'(b) + \frac{t-a}{b-a}\int_a^b (s-a)p_0(s,\|u\|)\,ds > u(a) + (t-a)u'(b) \quad \text{при} \quad a < t \leq b.$$

Сформулированные ниже леммы 2.3–2.5 касаются априорных оценок положительных решений дифференциального неравенства (2.2), удовлетворяющих краевым условиям одного из следующих трех видов:

$$u(a) \leq \ell\|u\| + r_0, \quad u(b) \leq \ell\|u\| + r_0, \tag{2.6}$$

$$u(a) \leq \ell\|u\| + r_0, \quad u(b) \leq \ell\|u\|_{[a,b_0]}, \tag{2.7}$$

$$u(a) + (b-a)u'(b) \leq \ell\|u\|, \quad u'(b) \geq 0, \tag{2.8}$$

где $\ell \geq 0$, $r_0 \geq 0$, $b_0 \in \,]a,b[\,$. Доказательства этих лемм содержатся в работе [21].

Лемма 2.3. *Пусть* $p_i \in M_+$ $(i = 0,1)$, $\ell < 1$ *и выполнены условия (1.14) и (1.15). Тогда существуют положительная постоянная* ρ *и непрерывные функции* $\varepsilon_i : [a,b] \to [0,\rho]$ $(i = 0,1,2)$ *такие, что*

$$\varepsilon_1(a) = 0, \quad \varepsilon_2(b) = 0, \quad \varepsilon_0(t) > 0 \quad \text{при} \quad a < t < b, \tag{2.9}$$

и произвольное положительное решение u *задачи (2.2), (2.6) допускает оценки*

$$\varepsilon_0(t) \leq u(t) \leq \rho \quad \text{при} \quad a \leq t \leq b, \tag{2.10}$$

$$|u(t) - u(a)| \leq \varepsilon_1(t), \quad |u(t) - u(b)| \leq \varepsilon_2(t) \quad \text{при} \quad a \leq t \leq b. \tag{2.11}$$

Лемма 2.4. *Пусть* $p_i \in M_+$ $(i = 0,1)$, $\ell < 1$ *и выполнены условия (1.14) и (1.25). Тогда существуют положительная постоянная* ρ *и непрерывные функции* $\varepsilon_i : [a,b] \to [0,\rho]$ $(i = 0,1,2)$, *удовлетворяющие условиям (2.9) и такие, что произвольное положительное решение* u *задачи (2.2), (2.7) допускает оценки (2.10), (2.11).*

Лемма 2.5. *Пусть* $p_i \in M_+$ $(i = 0,1)$, $\ell < 1$ *и выполнены условия (1.28) и (1.29). Тогда существуют положительная постоянная* ρ *и непрерывные функции* $\varepsilon_i : [a,b] \to [0,\rho]$ $(i = 0,1)$ *и* $\rho_1 : \,]a,b] \to \,]0,+\infty[$ *такие, что*

$$\varepsilon_1(a) = 0, \quad \varepsilon_0(t) > 0 \quad \text{при} \quad a < t \leq b, \tag{2.12}$$

и произвольное положительное решение u *задачи (2.2), (2.8) допускает оценки*

$$\varepsilon_0(t) \leq u(t) \leq \rho, \quad 0 \leq u'(t) \leq \rho_1(t) \quad \text{при} \quad a < t \leq b, \tag{2.13}$$

$$0 \leq u(t) - u(a) \leq \varepsilon_1(t) \quad \text{при} \quad a \leq t \leq b. \tag{2.14}$$

2.2. Леммы о разрешимости нелокальных задач для уравнения (1.1). Рассмотрим дифференциальное уравнение (1.1) с краевыми условиями одного из двух видов:

$$u(a) = \varphi_1(u) + \delta, \quad u(b) = \varphi_2(u) + \delta, \tag{2.15}$$

$$u(a) = \varphi_1(u) + \delta, \quad u(b) = \varphi_2(u), \tag{2.16}$$

где δ – некоторая положительная постоянная.

Как и выше, будем считать, что $f: I\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ – измеримая по первому аргументу и непрерывная по второму аргументу функция, а $\varphi_i: C([a,b];\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ $(i=1,2)$ – непрерывные функционалы, ограниченные на каждом ограниченном подмножестве множества $C([a,b];\mathbb{R}_+)$.

Лемма 2.6. *Пусть функция f на множестве $I\times]0,+\infty[$ удовлетворяет неравенству (1.5), где $p_0 \in M_+$. Пусть, кроме того, выполнено условие (1.6) и существуют числа $\delta_0 > 0$ и $\rho > \delta_0$ такие, что при произвольных $\lambda \in [0,1]$ и $\delta \in]0,\delta_0]$ каждое решение задачи (1.8), (1.9) допускает оценку (1.11). Тогда существуют непрерывные функции $\varepsilon_i: [a,b] \to \mathbb{R}_+$ $(i=0,1,2)$, удовлетворяющие условиям (2.9) и такие, что при любом $\delta \in]0,\delta_0]$ задача (1.1), (2.15) имеет хотя бы одно положительное решение, допускающее оценки (2.10) и (2.11).*

Доказательство. В первую очередь покажем, что при произвольно фиксированном $\delta \in]0,\delta_0]$ задача (1.1), (2.15) имеет хотя бы одно положительное решение.

Пусть

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \le x \le \rho, \\ 1 - x/(2\rho) & \text{при} \quad \rho < x < 2\rho, \\ 0 & \text{при} \quad x \ge 2\rho. \end{cases} \tag{2.17}$$

Для произвольной непрерывной функции $u: [a,b] \to]0,+\infty[$ положим

$$\widetilde{f}(u)(t) = (\chi(\|u\|) - 1)p_0(t,u(t)) + \chi(\|u\|)f(t,u(t)) \quad \text{при} \quad t \in I, \tag{2.18}$$

$$\widetilde{\varphi}_i(u) = \chi(\|u\|)\varphi_i(u) \quad (i=1,2) \tag{2.19}$$

и рассмотрим вспомогательную задачу

$$u''(t) = \widetilde{f}(u)(t), \tag{2.20}$$

$$u(a) = \widetilde{\varphi}_1(u) + \delta, \quad u(b) = \widetilde{\varphi}_2(u) + \delta. \tag{2.21}$$

Согласно обозначениям (2.17), (2.18) и условию (1.5), каждое положительное решение функционально-дифференциального уравнения (2.20) является и решением дифференциального неравенства (2.1). Отсюда в силу леммы 2.1 и условий (2.3) вытекает, что если u является положительным решением задачи (2.20), (2.21), то

$$u(t) > \delta \quad \text{при} \quad a < t < b.$$

С другой стороны, согласно условиям (1.5) и (1.6), для произвольной непрерывной функции $u: [a,b] \to [\delta,+\infty[$ имеем

$$0 \le -\widetilde{f}(u)(t) \le f^*(t;\delta,2\rho) \quad \text{при} \quad t \in I, \tag{2.22}$$

$$\int_a^b (s-a)(b-s)f^*(s;\delta,2\rho)\,ds < +\infty. \tag{2.23}$$

Из сказанного выше следует, что множество положительных решений задачи (2.20), (2.21) совпадает со множеством положительных решений операторного уравнения

$$u(t) = F(u)(t), \tag{2.24}$$

где

$$F(u)(t)=\delta+\frac{b-t}{b-a}\,\widetilde{\varphi}_1(u)+\frac{t-a}{b-a}\,\widetilde{\varphi}_2(u)+\int\limits_a^b g_0(t,s)\widetilde{f}(u)(s)\,ds, \tag{2.25}$$

$$g_0(t,s)=\frac{1}{a-b}\begin{cases}(t-a)(b-s) & \text{при}\quad t\le s,\\ (s-a)(b-t) & \text{при}\quad t>s.\end{cases} \tag{2.26}$$

Пусть

$$r_0=\delta_0+\sup\{\varphi_1(u)+\varphi_2(u):\ u\in C([a,b];\mathbb{R}_+),\ \|u\|\le 2\rho\}, \tag{2.27}$$

$$\rho_0=r_0+(b-a)^{-1}\int\limits_a^b (s-a)(b-s)f^*(s;\delta,2\rho)\,ds,$$

$$\rho_1(t)=\frac{r_0}{b-a}+\int\limits_a^t \frac{s-a}{b-a}\,f^*(s;\delta,2\rho)\,ds+\int\limits_t^b \frac{b-s}{b-a}\,f^*(s;\delta,2\rho)\,ds \quad \text{при}\quad a<t<b.$$

Согласно условию (2.23), ясно, что $\rho_1:\,]a,b[\,\to\mathbb{R}_+$ является непрерывной функцией такой, что

$$\int\limits_a^b \rho_1(s)\,ds<+\infty. \tag{2.28}$$

Обозначим через D множество функций $u\in C([a,b];\mathbb{R})$, удовлетворяющих неравенству

$$\delta\le u(t)\le\rho_0 \quad \text{при}\quad a\le t\le b.$$

Пусть $u\in D$ и $v(t)=F(u)(t)$. Тогда функция v является непрерывно дифференцируемой на открытом промежутке $]a,b[$. С другой стороны, с учетом неравенства (2.22) и обозначений (2.19), (2.26) из равенства (2.25) находим

$$\delta\le v(t)\le\delta_0+\widetilde{\varphi}_1(u)+\widetilde{\varphi}_2(u)+(b-a)^{-1}\int\limits_a^b (s-a)(b-s)f^*(s;\delta,2\rho)\,ds\le\rho_0 \quad \text{при}\quad a\le t\le b,$$

$$|v'(t)|\le\rho_1(t) \quad \text{при}\quad a<t<b.$$

Из этих оценок ввиду условия (2.28) и леммы Арцела–Асколи следует, что оператор F переводит множество D в свое же компактное подмножество. По теореме Шаудера операторное уравнение (2.24) и, следовательно, задача (2.20), (2.21) имеют решение $u\in D$.

В силу равенств (2.18), (2.19) функция u является положительным решением задачи (1.8), (1.9), где $\lambda=\chi(\|u\|)$. Согласно одному из условий леммы, функция u допускает оценку (1.11). Из этой оценки и равенства (2.17) вытекает, что $\lambda=1$. Следовательно, u является решением задачи (1.1), (2.15).

Пусть S_δ – множество всех решений задачи (1.1), (2.15) и $S=\bigcup_{0\le\delta\le\delta_0}S_\delta$. Очевидно, что каждая функция $u\in S$ допускает оценку (1.11). Если наряду с этим учтем и условие (1.5), то получим, что u является положительным решением задачи (2.2), (2.6), где

$$p_1(t,x)=\frac{1}{1+x}\begin{cases}f^*(t;x,\rho) & \text{при}\quad 0<x<\rho,\\ f^*(t;\rho,\rho) & \text{при}\quad x\ge\rho,\end{cases}$$

$p_i \in M_+$ $(i = 0,1)$, $\ell = 0$, а r_0 – число, определенное равенством (2.27). Кроме того, из условий (1.16) вытекают условия (1.14) и (1.15), поскольку

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^b (s-a)(b-s)p_1(s,x) = 0.$$

В силу леммы 2.3 существуют положительная постоянная $\overline{\rho}$ и непрерывные функции $\overline{\varepsilon}_i:\ [a,b]\to[0,\overline{\rho}]$ $(i = 0,1,2)$ такие, что

$$\overline{\varepsilon}_1(a) = 0, \quad \overline{\varepsilon}_2(b) = 0, \quad \overline{\varepsilon}_0(t) > 0 \quad \text{при} \quad a < t < b$$

и произвольное положительное решение задачи (2.2), (2.6) допускает оценки

$$\overline{\varepsilon}_0(t) \le u(t) \le \overline{\rho} \quad \text{при} \quad a \le t \le b,$$

$$|u(t)-u(a)| \le \overline{\varepsilon}_1(t), \quad |u(t)-u(b)| \le \overline{\varepsilon}_2(t) \quad \text{при} \quad a \le t \le b.$$

Если теперь положим

$$\varepsilon_i(t) = \min\{\rho, \overline{\varepsilon}_i(t)\} \quad \text{при} \quad a \le t \le b,$$

то получим, что каждая функция $u\in S$ допускает оценки (2.10) и (2.11), где $\varepsilon_i:\ [a,b]\to\rho$ $(i=1,2)$ – непрерывные функции, удовлетворяющие условиям (2.9). Лемма доказана.

Лемма 2.7. *Пусть функция f на множестве $I\times\,]0,+\infty[$ удовлетворяет неравенству (1.5), где $p_0\in M_+$. Пусть, кроме того, выполнено условие (1.7) и существуют числа $\delta_0 > 0$ и $\rho > \delta_0$ такие, что при произвольных $\lambda\in[0,1]$ и $\delta\in\,]0,\delta_0]$ каждое решение u задачи (1.8), (1.10) допускает оценку (2.11). Тогда существуют непрерывные функции $\varepsilon_i:\ [a,b]\to\mathbb{R}_+$ $(i = 0,1)$, удовлетворяющие условиям (2.12), и непрерывная функция $\rho_1:\ ]a,b]\to]0,+\infty[$ такие, что при любом $\delta\in\,]0,\delta_0]$ задача (1.1), (2.16) имеет хотя бы одно положительное решение, допускающее оценки (2.13), (2.14).*

Эта лемма доказывается аналогично лемме 2.6, только при ее доказательстве применяется не лемма 2.3, а лемма 2.5.

2.3. Леммы об однозначной разрешимости нелокальных задач для дифференциальных неравенств. Рассмотрим дифференциальное неравенство

$$w''(t)\operatorname{sgn}(w(t)) \ge -p(t)|w(t)| \tag{2.29}$$

с нелинейными нелокальными краевыми условиями одного из двух видов:

$$|w(a)| \le \ell\|w\|, \quad |w(b)| \le \ell\|w\|, \tag{2.30}$$

$$|w(a)| + (b-a)|w'(b)| \le \ell\|w\|, \tag{2.31}$$

где $p:\ ]a,b[\to\mathbb{R}_+$ – измеримая функция и $\ell\in[0,1[$.

Решение задачи (2.29), (2.30) будем искать на множестве $C([a,b];\mathbb{R})\cap\widetilde{C}^1_{\mathrm{loc}}(]a,b[;\mathbb{R})$, а решение задачи (2.29), (2.31) – на множестве тех функций $w\in C([a,b];\mathbb{R})\cap\widetilde{C}^1_{\mathrm{loc}}(]a,b[;\mathbb{R})$, производная которых имеет конечный предел $w'(b) = \lim\limits_{t\to b} w'(t)$.

Лемма 2.8. *Если*

$$\int_a^b (s-a)(b-s)p(s)\,ds < (1-\ell)(b-a), \tag{2.32}$$

то задача (2.29), (2.30) имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Согласно неравенству (2.32), существует число $\ell_1 \in]\ell, 1[$ такое, что

$$\int_a^b (s-a)(b-s)p(s)\,ds < (1-\ell_1)(b-a). \tag{2.33}$$

Предположим теперь, что задача (2.29), (2.30) имеет нетривиальное решение w. Тогда ввиду неравенств (2.30) без ограничения общности можем считать, что для некоторых $a_1 \in]a, b[$, $b_1 \in]a_1, b[$ и $t_0 \in]a_1, b_1[$ выполнены условия

$$w(t_0) = \|w\|, \quad w(t) > 0 \quad \text{при} \quad a_1 < t < b_1, \quad 0 \le w(a_1) \le \ell_1\|w\|, \quad 0 \le w(b_1) \le \ell_1\|w\|.$$

С другой стороны, с учетом этих условий из дифференциального неравенства (2.29) находим

$$\|w\| = w(t_0) = \frac{b_1 - t_0}{b_1 - a_1}\, w(a_1) + \frac{t_0 - a_1}{b_1 - a_1}\, w(b_1) + \int_{a_1}^{b_1} g_0(t_0, s) w''(s)\,ds \le$$

$$\le \left(\ell_1 + \int_{a_1}^{b_1} |g_0(t_0, s)| p(s)\,ds\right)\|w\|, \tag{2.34}$$

где

$$g_0(t,s) = \frac{1}{a_1 - b_1}\begin{cases}(t-a_1)(b_1-s) & \text{при} \quad a_1 \le t \le s \le b_1,\\ (s-a_1)(b_1-t) & \text{при} \quad a_1 \le s < t \le b_1\end{cases}$$

и

$$|g_0(t,s)| \le (b-a)^{-1}(s-a)(b-s) \quad \text{при} \quad a_1 \le s, t \le b_1.$$

В силу этой оценки и условия (2.32) из неравенства (2.34) вытекает, что

$$\|w\| \le \left(\ell_1 + (b-a)^{-1}\int_{a_1}^{b_1} (s-a)(b-s)p(s)\,ds\right)\|w\| < \|w\|.$$

Полученное противоречие доказывает, что задача (2.29), (2.30) имеет только тривиальное решение. Лемма доказана.

Лемма 2.9. *Если*

$$\int_a^b (s-a)p(s)\,ds < 1-\ell,$$

то задача (2.29), (2.31) имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Выберем $\ell_1 \in]0, \ell[$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_a^b (s-a)p(s)\,ds < 1-\ell_1. \tag{2.35}$$

Допустим теперь, что задача (2.29), (2.31) имеет нетривиальное решение w. Тогда ввиду неравенства (2.31) без ограничения общности можем считать, что для некоторых $a_1 \in]a, b[$ и $b_1 \in]a_1, b]$ выполнены условия

$$w(b_1) = \|w\|, \quad w(t) > 0 \quad \text{при} \quad a_1 < t \le b_1, \quad w(a_1) + (b_1 - a_1)w'(b_1) \le \ell_1\|w\|.$$

Если наряду с этими условиями учтем и неравенство (2.35), то из дифференциального неравенства (2.29) найдем

$$\|w\| = w(b_1) = w(a_1) + (b_1 - a_1)w'(b_1) - \int\limits_{a_1}^{b_1} (s - a_1)w''(s)\, ds \le \left(\ell_1 + \int\limits_{a_1}^{b_1} (s-a)p(s)\, ds\right)\|w\| < \|w\|.$$

Полученное противоречие доказывает, что задача (2.29), (2.31) имеет только тривиальное решение. Лемма доказана.

В заключение рассмотрим дифференциальное неравенство

$$w''(t)\operatorname{sgn}(w(t)) \ge 0 \tag{2.36}$$

с краевыми условиями

$$|w(a)| \le \ell\|w\|, \quad |w(b)| \le \|w\|_{[a,b_0]}, \tag{2.37}$$

где $\ell \in [0,1[$ и $b_0 \in]a,b[$.

Лемма 2.10. *Задача (2.36), (2.37) имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что, согласно леммам 2.8 и 2.9, при произвольном $t_0 \in]a,b]$ дифференциальное неравенство (2.36) на промежутке $[a,t_0]$ не имеет нетривиального решения, удовлетворяющего краевым условиям

$$|w(a)| \le \ell\|w\|, \quad w(t_0) = 0$$

или

$$|w(a)| \le \ell\|w\|, \quad w'(t_0) = 0.$$

Допустим теперь, что задача (2.36), (2.37) имеет нетривиальное решение w. Тогда, согласно сказанному выше, либо

$$w(t)w'(t) \ne 0 \quad \text{при} \quad a < t \le b, \tag{2.38}$$

либо существует $a_1 \in]a,b[$ такое, что

$$w(t) = 0 \quad \text{при} \quad a \le t \le a_1, \quad w(t)w'(t) > 0 \quad \text{при} \quad a_1 < t \le b. \tag{2.39}$$

Однако как условие (2.38), так и условие (2.39) противоречит неравенствам (2.37). Полученное противоречие доказывает справедливость леммы.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство предложения 1.1. В силу леммы 2.6 при любом натуральном k дифференциальное уравнение (1.1) имеет положительное решение u_k, удовлетворяющее условиям

$$u_k(a) = \varphi_1(u_k) + \frac{\delta_0}{k}, \quad u_k(b) = \varphi_2(u_k) + \frac{\delta_0}{k}, \tag{3.1}$$

$$\varepsilon_0(t) \le u_k(t) \le \rho \quad \text{при} \quad a \le t \le b, \tag{3.2}$$

$$|u_k(t) - u_k(a)| \le \varepsilon_0(t), \quad |u_k(t) - u_k(b)| \le \varepsilon_1(t) \quad \text{при} \quad a \le t \le b, \tag{3.3}$$

где $\varepsilon_i : [a,b] \to [0,\rho]$ $(i = 0,1,2)$ – не зависящие от k непрерывные функции, удовлетворяющие условиям (2.9).

Пусть

$$\rho_0(t) = f^*(t; \varepsilon_0(t), \rho) \quad \text{при} \quad t \in I.$$

Согласно условиям (1.6) и (2.9), функция ρ_0 является интегрируемой по Лебегу на каждом замкнутом промежутке, содержащемся в $]a,b[$. Зафиксируем произвольно числа $a_0 \in]a,b[$, $b_0 \in]a_0,b[$ и введем функцию

$$\rho_1(t) = \frac{\rho}{b_0 - a_0} + \int\limits_{a_0}^{b_0} \rho_0(s)\,ds + \left| \int\limits_{a_0}^{t} \rho_0(s)\,ds \right| \quad \text{при} \quad a < t < b.$$

В силу оценки (3.2) имеем

$$|u_k''(t)| = |f(t,u_k(t))| \le \rho_0(t) \quad \text{при почти всех} \quad t \in]a,b[\,, \tag{3.4}$$

$$|u_k'(t)| \le \rho_1(t) \quad \text{при} \quad a < t < b. \tag{3.5}$$

Оценки (3.2), (3.3) и (3.5) гарантируют равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность последовательности $(u_k)_{k=1}^{+\infty}$ на $[a,b]$, а оценки (3.4) и (3.5) – равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность последовательности $(u_k')_{k=1}^{+\infty}$ на каждом замкнутом промежутке, содержащемся в $]a,b[$.

Согласно лемме Арцела–Асколи, последовательность $(u_k)_{k=1}^{+\infty}$ содержит равномерно сходящуюся на $[a,b]$ подпоследовательность $(u_{k_m})_{m=1}^{+\infty}$ такую, что $(u_{k_m}')_{m=1}^{+\infty}$ является равномерно сходящейся на каждом замкнутом промежутке, содержащемся в $]a,b[$. Положим

$$u(t) = \lim_{m\to+\infty} u_{k_m}(t) \quad \text{при} \quad a \le t \le b.$$

Тогда

$$u'(t) = \lim_{m\to+\infty} u_{k_m}'(t) \quad \text{при} \quad a < t < b.$$

Если в равенстве

$$u_{k_m}'(t) = u_{k_m}'(a_0) + \int\limits_{a_0}^{t} f(s,u_{k_m}(s))\,ds \quad \text{при} \quad a < t < b$$

перейдем к пределу, когда $m \to +\infty$, то в силу теоремы Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла и условия (3.4) получим

$$u'(t) = u'(a_0) + \int\limits_{a_0}^{t} f(s,u(s))\,ds \quad \text{при} \quad a < t < b.$$

С другой стороны, из равенств (3.1) и неравенства (3.2) вытекает, что функция u удовлетворяет краевым условиям (1.2) и

$$\varepsilon_0(t) \le u(t) \le \rho \quad \text{при} \quad a \le t \le b.$$

Следовательно, u является положительным решением задачи (1.1), (1.2).

Если вместо леммы 2.6 применим лемму 2.7, то аналогично покажем, что задача (1.1), (1.3) имеет хотя бы одно решение. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 1.1. Заметим прежде всего, что, согласно условиям (1.12) и (1.14), функция f^* допускает оценку

$$p_0(t,x) \le f^*(t,x,y) \le p_1(t,x)(1+y) \quad \text{при} \quad t \in I, \quad 0 < x \le y < +\infty,$$

и удовлетворяет условию (1.6).

Пусть $r_0 = r + 1$, ρ – положительная постоянная из леммы 2.3, а u – положительное решение задачи (1.8), (1.9) при некоторых $\lambda \in [0, 1]$ и $\delta \in]0, 1]$. Согласно неравенствам (1.12) и (1.13), функция u является также положительным решением задачи (2.2), (2.6) и в силу леммы 2.3 допускает оценку (1.11).

Если теперь применим предложение 1.1, то справедливость теоремы 1.1 станет очевидной. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Из условий (1.16), (1.18) и (1.19) вытекают условия (1.12)–(1.15), где $r = \max\{\varphi_1(0), \varphi_2(0)\}$ и $p_1(t, x) = p(t) + p_0(t, x)(1 + x)^{-1}$. С другой стороны, по теореме 1.1 эти условия гарантируют существование положительного решения u задачи (1.1), (1.2).

Нам остается доказать, что задача (1.1), (1.2) не имеет отличного от u решения.

Пусть v – произвольное положительное решение задачи (1.1), (1.2) и

$$w(t) = u(t) - v(t) \quad \text{при} \quad a \le t \le b. \tag{3.6}$$

Тогда, согласно условиям (1.17) и (1.18), функция w является решением задачи (2.29), (2.30). Однако в силу леммы 2.8 и условия (2.32) эта задача имеет только тривиальное решение. Следовательно, $v(t) \equiv u(t)$. Теорема доказана.

Доказательство следствия 1.1. Из условий (1.20) вытекают условия (1.12), (1.14), (1.16) и (1.17), где

$$p(t) = 0, \quad p_0(t, x) = |f(t, x)|, \quad p_1(t, x) = (1 + x)^{-1}|f(t, x)| \quad \text{при} \quad t \in I, \quad x > 0.$$

С другой стороны,

$$p_i \in M_+ \quad (i = 0, 1), \qquad \lim_{x\to+\infty} \int_a^b (s - a)(b - s)p_1(s, x)\, ds = 0.$$

Если теперь на множестве $C([a, b]; \mathbb{R}_+)$ выполнены условия (1.13) (условия (1.18)), то по теореме 1.1 (по теореме 1.2) задача (1.1), (1.2) имеет хотя бы одно (одно и только одно) положительное решение. Следствие доказано.

Доказательство следствия 1.2. Если выполнено неравенство (1.21), то, согласно следствию 1.1, задача (1.1), (1.2) имеет хотя бы одно положительное решение.

Нам остается показать, что выполнение неравенства (1.21) является и необходимым для существования хотя бы одного положительного решения задачи (1.1), (1.2). В самом деле, если такое решение существует, то в силу леммы 2.1 имеем

$$\mu(u; a_i, b_i) > \min\{\varphi_1(u), \varphi_2(u)\} \quad (i = 1, 2).$$

Отсюда, согласно неравенствам (1.22), вытекает неравенство (1.21). Следствие доказано.

Доказательство теоремы 1.3 (теоремы 1.5) аналогично доказательству теоремы 1.1. Отличие состоит лишь в том, что вместо леммы 2.3 применяется лемма 2.4 (лемма 2.5).

Теорема 1.4 вытекает из теоремы 1.3 и леммы 2.10, а теорема 1.6 – из теоремы 1.5 и леммы 2.9.

Следствие 1.3 вытекает из теоремы 1.4 и леммы 2.1, следствие 1.4 – из теорем 1.5 и 1.6, а следствие 1.5 – из следствия 1.4 и леммы 2.2.

Доказательство следствия 1.6. Положим

$$f(t, x) = -\frac{p(t)}{h(x)} \quad \text{при} \quad t \in I, \quad x > 0, \quad \varphi_i(u) = \sum_{k=1}^{m} \ell_{ik} u(t_k) \quad \text{при} \quad u \in C([a, b]; \mathbb{R}_+) \quad (i = 1, 2).$$

Тогда задача (1.32), (1.33) примет вид (1.1), (1.2).

Рассмотрим сперва случай, когда функция h удовлетворяет условиям (1.36). В этом случае существуют неубывающие функции $h_i :]0,+\infty[\to]0,+\infty[\quad (i=0,1)$ такие, что

$$h_1(x) \le h(x) \le h_0(x) \quad \text{при} \quad x>0.$$

Согласно сказанному выше, функция f и функционалы $\varphi_i \quad (i=1,2)$ соответственно на множествах $I\times]0,+\infty[$ и $C([a,b];\mathbb{R}_+)$ удовлетворяют неравенствам (1.12) и (1.13), где

$$p_0(t,x)=\frac{p(t)}{h_0(x)}, \quad p_1(t,x)=(1+x)^{-1}\,\frac{p(t)}{h_1(x)}, \quad \ell=\max\biggl\{\sum_{k=1}^{m}\ell_{ik}:\ i=1,2\biggr\}, \quad r=0.$$

Кроме того, $p_i\in M_+$ и выполнены условия (2.3).

Каждое положительное решение задачи (1.32), (1.33) является и решением дифференциального неравенства (2.1). Отсюда, согласно лемме 2.1, следует, что условие (1.38) является необходимым для существования хотя бы одного такого решения. С другой стороны, если наряду с (1.36) и (1.37) выполнено и условие (1.38), то функции $p_i \quad (i=0,1)$ удовлетворяют условиям (1.14) и (1.15) и по теореме 1.1 задача (1.1), (1.2) имеет хотя бы одно положительное решение.

Перейдем к рассмотрению случая, когда h является неубывающей функцией. Тогда $f\in M_-$ и в силу следствия 1.1 условия (1.37) и (1.38) гарантируют существование единственного положительного решения задачи (1.32), (1.33). Следствие доказано.

Доказательство следствий 1.7–1.9 мы опускаем, поскольку они аналогичны доказательству следствия 1.6. Заметим лишь, что следствие 1.7 доказывается на основе теорем 1.3, 1.4 и леммы 2.1, а следствия 1.8 и 1.9 – на основе теоремы 1.5, следствия 1.4 и леммы 2.2.

Работа поддержана Национальным научным фондом им. Шота Руставели (проект # FR/317/5-101/12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозов Н.Ф.* Об аналитической структуре решения мембранного уравнения // Докл. АН СССР. 1963. Т. 152. № 1. С. 78–80.
2. *Морозов Н.Ф., Срубщик Л.С.* Применение метода Чаплыгина к исследованию уравнения мембраны // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2. № 3. С. 425–427.
3. *Срубщик Л.С., Юдович В.И.* Асимптотика уравнения большого прогиба круглой симметрично загруженной пластины // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4. № 3. С. 657–672.
4. *Ackroyd J.A.* On the laminar compressible boundary layer with stationary origin on a moving flat wall // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1967. V. 63. P. 871–888.
5. *Callegary A.J., Friedman M.B.* An analytical solution of a nonlinear, singular boundary value problem in the theory of viscous fluids // J. Math. Anal. Appl. 1968. V. 21. № 3. P. 510–529.
6. *Callegary A.J., Nachman A.* Some singular, nonlinear differential equations arising in boundary layer theory // J. Math. Anal. Appl. 1978. V. 64. № 1. P. 96–105.
7. *Agarwal R.P., O'Regan D., Staněk S.* Solvability of singular Dirichlet boundary-value problems with given maximal values for positive solutions // Proc. Edinb. Math. Soc. 2005. V. (2) 48. № 1. P. 1–19.
8. *Agarwal R.P., O'Regan D., Staněk S.* Positive solutions of non-positone Dirichlet boundary value problems with singularities in the phase variables // Math. Nachr. 2008. V. 281. № 5. P. 612–625.
9. *Bouillet J.E., Gomes S.M.* An equation with a singular nonlinearity related to diffusion problems in one dimension // Quart. Appl. Math. 1985. V. 42. № 4. P. 395–402.
10. *De Coster C., Habets P.* The lower and upper solutions method for boundary value problems // Handbook of differential equations. Amsterdam, 2004. P. 69–160.
11. *De Coster C., Habets P.* Two-point boundary value problems: lower and upper solutions // Mathematics in Science and Engineering. V. 205. Amsterdam, 2006.

12. *Habets P., Gaudenzi M.* Existence and multiplicity of positive solutions for boundary value problems of 2d order ODE // Topol. Methods Nonlinear Anal. 1999. V. 14. P. 131–150.
13. *Kiguradze I.* Positive solutions of two-point boundary value problems for higher order nonlinear singular differential equations // Bull. Georgian Natl. Acad. Sci. (N.S.) 2011. V. 5. № 3. P. 5–10.
14. *Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Л.* Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Нов. достижения. 1987. Т. 30. С. 105–201.
15. *Ломтатидзе А.Г.* Об одной сингулярной краевой задаче для линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Краевые задачи. Пермь, 1984. С. 46–50.
16. *Ломтатидзе А.Г.* О положительных решениях сингулярных краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 6. С. 1092.
17. *Ломтатидзе А.Г.* Положительные решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярностями // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 10. С. 1685–1692.
18. *Rachůnková I., Staněk S., Tvrdý M.* Singularities and Laplacians in boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations // Handbook of differential equations: ordinary differential equations. V. 3. Amsterdam, 2006. P. 607–722.
19. *Rachůnková I., Staněk S., Tvrdý M.* Solvability of nonlinear singular problems for ordinary differential equations // Contemporary Mathematics and Its Applications. V. 5. New York, 2008.
20. *Taliaferro S.D.* A nonlinear singular boundary value problem // Nonlinear Anal. 1979. V. 3. № 6. P. 897–904.
21. *Kiguradze I.* A priori estimates of solutions of nonlinear boundary value problems for singular in a phase variable second order differential inequalities // Georgian Math. J. 2014. V. 21. № 2.

Математический институт им. А. Размадзе
Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили

Поступила в редакцию
28.11.2013 г.