ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2011, том 47, № 10, с. 1400–1411

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.2+517.927.6

УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2011 г. И. Т. Кигурадзе, Т. И. Кигурадзе

Для линейных дифференциальных уравнений второго порядка установлены неулучшаемые достаточные условия корректности нелокальных задач с функциональными и многоточечными краевыми условиями.

1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $-\infty < a < t_0 < b < +\infty$, $r: [a,b] \to (0,+\infty)$ – непрерывная, а p и $q: [a,b] \to \mathbb{R}$ – интегрируемые по Лебегу функции. В промежутке $[a,b]$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(r(t)u')' = p(t)u + q(t) \tag{1.1}$$

с нелокальными условиями одного из следующих трех типов:

$$u(a) = l_1(u) + c_1, \quad u(b) = l_2(u) + c_2, \tag{1.2}$$

$$u(a) = l_1(u) + c_1, \quad r(b)u'(b) = l_2(ru') + c_2, \tag{1.3}$$

$$r(a)u'(a) = l_1(ru') + c_1, \quad r(b)u'(b) = l_2(ru') + c_2, \tag{1.4}$$

где $l_1: C([a,t_0]) \to \mathbb{R}$ и $l_2: C([t_0,b]) \to \mathbb{R}$ – линейные ограниченные функционалы, $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$. Частными случаями условий (1.2)–(1.4) являются многоточечные краевые условия

$$u(a) = \sum_{k=1}^{m} l_{1k}u(a_k) + c_1, \quad u(b) = \sum_{k=1}^{m} l_{2k}u(b_k) + c_2, \tag{1.2$'$}$$

$$u(a) = \sum_{k=1}^{m} l_{1k}u(a_k) + c_1, \quad r(b)u'(b) = \sum_{k=1}^{m} l_{2k}r(b_k)u'(b_k) + c_2, \tag{1.3$'$}$$

$$r(a)u'(a) = \sum_{k=1}^{m} l_{1k}r(a_k)u'(a_k) + c_1, \quad r(b)u'(b) = \sum_{k=1}^{m} l_{2k}r(b_k)u'(b_k) + c_2, \tag{1.4$'$}$$

где $m \geq 1$, $l_{ik} \in \mathbb{R}$ и

$$a < a_m < \ldots < a_1 \leq b_1 < \ldots < b_m < b. \tag{1.5}$$

При $l_i(u) \equiv 0$ $(i = 1,2)$ задачи (1.1), (1.2); (1.1), (1.3) и (1.1), (1.4) исследованы достаточно подробно (см. [1–9] и приведенную в них библиографию).

И.Т. Кигурадзе и А.Г. Ломтатидзе [10] доказали теоремы типа Валле Пуссена, содержащие в определенном смысле неулучшаемые признаки однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.2$'$) в случае, когда $m = 1$, $l_{11} = 0$ и $l_{21} = 1$.

В.А. Ильиным и Е.И. Моисеевым [11, 12] доказано, что если $l_{1k} = 0$, $l_{21}l_{2k} > 0$ $(k = 1,\ldots,m)$, $\sum_{k=1}^{m} l_{2k} \leq 1$ и $p(t) \geq 0$ при $a < t < b$ ($p(t) > 0$ при почти всех $t \in (a,b)$), то задача (1.1), (1.2$'$) (задача (1.1), (1.3$'$)) имеет единственное решение.

Д.М. Довлетов [13] установил существование единственного решения задачи (1.1), (1.2$'$) при предположениях, что $p(t) \geq 0$ при $a < t < b$, $m = 2$, $l_{11} = l_{12} = 0$ и постоянные l_{21} и l_{22}

удовлетворяют либо неравенствам $l_{21} \geq 0$, $l_{22} \leq 0$, $l_{21} + l_{22} \leq 1$, либо неравенствам $l_{21} \leq 0$, $l_{22} \leq 1$.

При $l_1(u) \equiv 0$ оптимальные достаточные условия однозначной разрешимости задач (1.1), (1.2) и (1.1), (1.3) найдены А.Г. Ломтатидзе [14, 15] и Т.И. Кигурадзе [16, 17]. Интегральные признаки однозначной разрешимости таких задач содержатся и в [18]. Тем не менее при $l_i(u) \not\equiv 0$ $(i = 1, 2)$ каждая из задач (1.1), $(1.k)$ $(k = 2, 3, 4)$ изучена пока еще недостаточно. Восполнению этого пробела и посвящена настоящая работа. В ней установлены неулучшаемые условия, гарантирующие корректность задач (1.1), $(1.k)$ и (1.1), $(1.k')$. Эти условия являются новыми и при $l_1(u) \equiv 0$ и $l_{1k} = 0$ $(k = 1, \ldots, m)$.

На протяжении всей работы использованы приведенные ниже обозначения и определения.

Если x и x_k $(k = 1, 2, \ldots)$ – вещественные числа, то

$$[x]_+ = \frac{|x| + x}{2}, \quad [x]_- = \frac{|x| - x}{2};$$

$$S_1(x_1) = [x_1]_+, \quad S_k(x_1, \ldots, x_k) = [x_k + S_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1})]_+ \quad (k = 2, 3, \ldots); \tag{1.6}$$

$C([t_1, t_2])$ и $C^1([t_1, t_2])$ – банаховы пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций $u : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ с нормами $\|u\|_C = \max\{|u(t)| : t_1 \leq t \leq t_2\}$ и $\|u\|_{C^1} = \|u\|_C + \|u'\|_C$; $\Lambda(t_1, t_2)$ – пространство линейных ограниченных функционалов $l : C([t_1, t_2]) \to \mathbb{R}$; $\Lambda^-(t_1, t_2)$ – множество всех $l \in \Lambda(t_1, t_2)$, таких, что $l(u) \leq 0$ для произвольной неотрицательной функции $u \in C([t_1, t_2])$; $\Lambda^+_\tau(t_1, t_2)$, $\tau \in [t_1, t_2]$, – множество всех $l \in \Lambda(t_1, t_2)$, таких, что $l(u) > 0$ для произвольной функции $u \in C([t_1, t_2])$, удовлетворяющей неравенству $u(t) > 0$ при $t \neq \tau$; $\Lambda^1_{t_1}(t_1, t_2)$ – множество всех $l \in \Lambda(t_1, t_2)$, таких, что $l(u) < u(t_1)$ для произвольной неотрицательной убывающей функции $u \in C([t_1, t_2])$; $\Lambda^1_{t_2}(t_1, t_2)$ – множество всех $l \in \Lambda(t_1, t_2)$, таких, что $l(u) < u(t_2)$ для произвольной неотрицательной возрастающей функции $u \in C([t_1, t_2])$.

Функция $u \in C^1([a, b])$ называется *решением уравнения* (1.1), если ru' является абсолютно непрерывной и почти всюду на $[a, b]$ соблюдается равенство $(r(t)u'(t))' = p(t)u(t) + q(t)$.

Решение u уравнения (1.1), удовлетворяющее краевым условиям $(1.k)$, $k \in \{2, 3, 4\}$, является *решением задачи* (1.1), $(1.k)$.

Задача (1.1), $(1.k)$ называется *корректной,* если она однозначно разрешима при произвольно фиксированных $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ и интегрируемой по Лебегу функции $q : [a, b] \to \mathbb{R}$, и существует не зависящая от c_i $(i = 1, 2)$ и q положительная постоянная ρ такая, что ее решение допускает оценку

$$\|u\|_{C^1} \leq \rho(|c_1| + |c_2| + \|\widetilde{q}\|_C),$$

где $\widetilde{q}(t) = \int_a^t q(s)\, ds$.

Наряду с неоднородными уравнениями (1.1) рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$(r(t)u')' = p(t)u \tag{1.1_0}$$

с однородными краевыми условиями

$$u(a) = l_1(u), \quad u(b) = l_2(u), \tag{1.2_0}$$

$$u(a) = l_1(u), \quad r(b)u'(b) = l_2(ru'), \tag{1.3_0}$$

$$r(a)u'(a) = l_1(ru'), \quad r(b)u'(b) = l_2(ru'). \tag{1.4_0}$$

Из теорем 1.1 и 1.2 работы [19] вытекает

Предложение 1.1. *Если $k \in \{2, 3, 4\}$, то для корректности задачи (1.1), $(1.k)$ необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная задача (1.1), $(1.k_0)$ имела только тривиальное решение.*

Задачи (1.1), $(1.k)$ $(k = 2, 3, 4)$ мы исследуем в случаях, когда пара функционалов l_1, l_2 удовлетворяет одному из следующих условий:

$$l_1 \in \Lambda^-(a, t_0), \quad l_2 \in \Lambda^-(t_0, b), \tag{1.7}$$

$$l_1 \in \Lambda^-(a,t_0), \quad l_2 \in \Lambda_b^1(t_0,b), \tag{1.8}$$

$$l_1 \in \Lambda_a^1(a,t_0), \quad l_2 \in \Lambda^-(t_0,b), \tag{1.9}$$

$$l_1 \in \Lambda_a^+(a,t_0), \quad l_2 \in \Lambda_b^+(t_0,b), \quad l_1(1) = l_2(1) = 1, \tag{1.10}$$

$$l_1 \in \Lambda_a^+(a,t_0), \quad l_1(1) = 1, \quad l_2 \in \Lambda^-(t_0,b). \tag{1.11}$$

Для задач (1.1), $(1.k')$ $(k = 2,3,4)$ условиям (1.7)–(1.11) соответствуют условия

$$l_{1k} \le 0, \quad l_{2k} \le 0 \quad (k = 1,\ldots,m), \tag{1.7$'$}$$

$$l_{1k} \le 0 \quad (k = 1,\ldots,m), \quad S_m(l_{21},\ldots,l_{2m}) \le 1, \tag{1.8$'$}$$

$$S_m(l_{11},\ldots,l_{1m}) \le 1, \quad l_{2k} \le 0 \quad (k = 1,\ldots,m), \tag{1.9$'$}$$

$$l_{1k} \ge 0, \quad l_{2k} \ge 0 \quad (k = 1,\ldots,m); \quad \sum_{i=1}^m l_{1i} = \sum_{i=1}^m l_{2i} = 1, \tag{1.10$'$}$$

$$l_{1k} \ge 0, \quad l_{2k} \le 0 \quad (k = 1,\ldots,m); \quad \sum_{i=1}^m l_{1i} = 1. \tag{1.11$'$}$$

В приведенных ниже теоремах и следствиях на функцию p налагается одно из следующих ограничений:

$$\left(\frac{\pi^2}{\delta^3(b)} \int_a^b r^{\lambda-1}(t)\delta(t)(\delta(b)-\delta(t))[p(t)]_-^\lambda \, dt\right)^{1/\lambda} \le \frac{\pi^2}{\delta^2(b)}, \tag{1.12}$$

$$\left(\frac{\pi^2}{4\delta^2(b)} \int_a^b r^{\lambda-1}(t)\delta(t)[p(t)]_-^\lambda \, dt\right)^{1/\lambda} \le \frac{\pi^2}{4\delta^2(b)}, \tag{1.13}$$

$$\left(\frac{\pi^2}{4\delta^2(b)} \int_a^b r^{\lambda-1}(t)(\delta(b)-\delta(t))[p(t)]_-^\lambda \, dt\right)^{1/\lambda} \le \frac{\pi^2}{4\delta^2(b)}, \tag{1.14}$$

$$p(t) < 0 \quad \text{при почти всех} \quad t \in (a,b), \quad \left(\frac{\pi^2}{4\delta(b)} \int_a^b r^{\lambda-1}(t)|p(t)|^\lambda \, dt\right)^{1/\lambda} \le \frac{\pi^2}{\delta^2(b)}, \tag{1.15}$$

$$p(t) > 0 \quad \text{при почти всех} \quad t \in (a,b), \tag{1.16}$$

где $\lambda \ge 1$ и

$$\delta(t) = \int_a^t \frac{ds}{r(s)}. \tag{1.17}$$

Теорема 1.1. *Для корректности задачи (1.1), (1.2) достаточно, чтобы выполнялись либо условия (1.7) и (1.12), либо условия (1.8) и (1.13), либо условия (1.9) и (1.14), либо условие (1.10) и одно из условий (1.15) и (1.16).*

Следствие 1.1. *Для корректности задачи (1.1), $(1.2')$ достаточно, чтобы выполнялись либо условия $(1.7')$ и (1.12), либо условия $(1.8')$ и (1.13), либо условия $(1.9')$ и (1.14), либо условие $(1.10')$ и одно из условий (1.15) и (1.16).*

Теорема 1.2. *Для корректности задачи (1.1), (1.3) достаточно, чтобы выполнялись либо условия (1.7) и (1.13), либо условия (1.8) и (1.16), либо условие (1.11) и одно из условий (1.15) и (1.16).*

Следствие 1.2. *Для корректности задачи (1.1), $(1.3')$ достаточно, чтобы выполнялись либо условия $(1.7')$ и (1.13), либо условия $(1.8')$ и (1.16), либо условие $(1.11')$ и одно из условий (1.15) и (1.16).*

Согласно следствию 1.1 (следствию 1.2), если $l_{1k} = 0$ $(k = 1, \ldots, m)$, $S_m(l_{21}, \ldots, l_{2m}) \le 1$ и выполнено условие (1.13) (условие (1.16)), то задача (1.1), $(1.2')$ (задача (1.1), $(1.3')$) является корректной. Это обобщает упомянутые выше результаты В.А. Ильина–Е.И. Моисеева [11, 12] и Д.М. Довлетова [13]. В случае, когда выполнено условие $(1.10')$ (условие $(1.11')$), задача (1.1), $(1.2')$ (задача (1.1), $(1.3')$) раньше оставалась неисследованной.

Теорема 1.3. *Для корректности задачи (1.1), (1.4) достаточно, чтобы выполнялись либо условие (1.7) и одно из условий (1.15) и (1.16), либо одно из условий (1.8) и (1.9), и условие (1.16).*

Следствие 1.3. *Для корректности задачи (1.1), $(1.4')$ достаточно, чтобы выполнялись либо условие $(1.7')$ и одно из условий (1.15) и (1.16), либо одно из условий $(1.8')$ и $(1.9')$, и условие (1.16).*

Пример 1.1. Для произвольно фиксированного $\varepsilon \in (0,1)$ и непрерывной функции $r : [a,b] \to (0,+\infty)$ выберем числа $a_0 \in (a,b)$, $b_0 \in (a_0,b)$ и $\lambda \ge 1$ таким образом, чтобы

$$\delta(b_0) - \delta(a_0) \ge \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/\lambda} (1+\varepsilon)^{-1/2}\delta(b). \tag{1.18}$$

Тогда

$$\delta(a_0) < 2\delta(a_0) < 2\delta(b_0) - \delta(b) < \delta(b_0).$$

Отсюда, согласно равенству (1.17), следует существование чисел $a_1 \in (a_0,b_0)$ и $b_1 \in (a_0,b_0)$ таких, что

$$\delta(a_1) = 2\delta(a_0), \quad \delta(b_1) = 2\delta(b_0) - \delta(b). \tag{1.19}$$

Положим

$$p(t) = -\frac{\gamma}{r(t)}\left(\frac{\pi}{\delta(b_0) - \delta(a_0)}\right)^2, \quad m = 1 \tag{1.20}$$

и рассмотрим задачу (1.1), $(1.2')$, где γ – положительная постоянная, а l_{11} и l_{21} – числа, удовлетворяющие одному из условий:

$$l_{11} = -1, \quad l_{21} = -1, \tag{1.21}$$

$$l_{11} = 1, \quad l_{21} = 1, \tag{1.22}$$

$$l_{11} = -1, \quad l_{21} = 1, \tag{1.23}$$

$$l_{11} = 1, \quad l_{21} = -1. \tag{1.24}$$

Если $\gamma = 1$, то с учетом условий (1.17), (1.18) и (1.20) получим неравенства

$$\left(\frac{\pi^2}{\delta^3(b)}\int\limits_a^b r^{\lambda-1}(t)\delta(t)(\delta(b)-\delta(t))[p(t)]_-^\lambda\,dt\right)^{1/\lambda} \le (1+\varepsilon)\frac{\pi^2}{\delta^2(b)}, \tag{1.12_ε}$$

$$p(t) < 0 \quad \text{при почти всех} \quad t \in (a,b), \quad \left(\frac{\pi^2}{4\delta(b)}\int\limits_a^b r^{\lambda-1}(t)|p(t)|^\lambda\,dt\right)^{1/\lambda} \le (1+\varepsilon)\frac{\pi^2}{\delta^2(b)}. \tag{1.15_ε}$$

Если же $\gamma = 1/4$, то

$$\left(\frac{\pi^2}{4\delta^2(b)}\int\limits_a^b r^{\lambda-1}(t)\delta(t)[p(t)]_-^\lambda\,dt\right)^{1/\lambda} \le (1+\varepsilon)\frac{\pi^2}{4\delta^2(b)}, \tag{1.13_ε}$$

$$\left(\frac{\pi^2}{4\delta^2(b)}\int\limits_a^b r^{\lambda-1}(t)(\delta(b)-\delta(t))[p(t)]_-^\lambda\,dt\right)^{1/\lambda}\le(1+\varepsilon)\frac{\pi^2}{4\delta^2(b)}. \qquad (1.14_\varepsilon)$$

С другой стороны, если $\gamma=1$ и выполнено условие (1.21) (условие (1.22)), то в силу равенств (1.19) и (1.20) однородное дифференциальное уравнение (1.1_0) при однородных краевых условиях $(1.2'_0)$ имеет нетривиальное решение

$$u(t)=\sin\left(\frac{\pi(\delta(t)-\delta(a_0))}{\delta(b_0)-\delta(a_0)}\right)\quad\left(u(t)=\cos\left(\frac{\pi(\delta(t)-\delta(a_0))}{\delta(b_0)-\delta(a_0)}\right)\right).$$

Следовательно, задача (1.1), $(1.2')$ является некорректной, и это вызвано тем, что вместо неравенства (1.12) (неравенства (1.15)) выполнено неравенство (1.12_ε) (неравенство (1.15_ε)).

Если же $\gamma=1/4$ и выполнено условие (1.23) (условие (1.24)), то однородная задача (1.1_0), $(1.2'_0)$ опять же имеет нетривиальное решение

$$u(t)=\sin\left(\frac{\pi(\delta(t)-\delta(a_0))}{2(\delta(b_0)-\delta(a_0))}\right)\quad\left(u(t)=\cos\left(\frac{\pi(\delta(t)-\delta(a_0))}{2(\delta(b_0)-\delta(a_0))}\right)\right).$$

Следовательно, задача (1.1), $(1.2')$ и в этом случае является некорректной, а это вызвано тем, что вместо неравенства (1.13) (неравенства (1.14)) выполнено неравенство (1.13_ε) (неравенство (1.14_ε)).

Построенный пример показывает, что в теореме 1.1 и в следствии 1.1 условие $(1.k)$ при каждом $k\in\{12,13,14,15\}$ является неулучшаемым и его нельзя заменить условием $(1.k_\varepsilon)$, каким бы малым ни был $\varepsilon>0$.

Если теперь мы рассмотрим задачу (1.1), $(1.3')$ (задачу (1.1), $(1.4')$) в случае, когда выполнено условие (1.20), а числа a_1, b_1, l_{11} и l_{21} подобраны описанным выше образом, то убедимся в том, что в теореме 1.2 и в следствии 1.2 (в теореме 1.3 и в следствии 1.3) условия (1.13) и (1.15) (условие (1.15)) нельзя заменить условиями (1.13_ε) и (1.15_ε) (условием (1.15_ε)), каким бы малым ни был $\varepsilon>0$.

Пример 1.2. Пусть

$$p(t)=-\frac{2}{r(t)(\rho+\delta(t)(\delta(b)-\delta(t)))}, \qquad (1.25)$$

где $\rho=1+\delta^2(b)$. Тогда выполнено условие (1.15). Отсюда, согласно следствию 1.1, вытекает, что если числа l_{ik} $(i=1,2,\ k=1,\dots,m)$ удовлетворяют условию $(1.10')$, то задача (1.1), $(1.2')$ является корректной. Покажем, что условие $(1.10')$ нельзя заменить условием

$$l_{1k}>0,\quad l_{2k}>0\quad(k=1,\dots,m),\quad 1-\varepsilon<\sum_{j=1}^m l_{ij}<1\quad(i=1,2), \qquad (1.26)$$

каким бы малым ни был $\varepsilon>0$. В самом деле, для произвольно фиксированного $\varepsilon\in(0,1)$ выберем числа a_k, b_k, l_{1k} и l_{2k} $(k=1,\dots,m)$ таким образом, чтобы наряду с (1.5) выполнялись условия

$$\delta(b)\delta(a_1)<\varepsilon,\quad \delta(b)(\delta(b)-\delta(b_1))\le\varepsilon,\quad l_{1k}>0,\quad l_{2k}>0\quad(k=1,\dots,m),$$

$$\sum_{i=1}^m l_{1i}(\rho+\delta(a_i)(\delta(b)-\delta(a_i)))=\rho,\quad \sum_{i=1}^m l_{2i}(\rho+\delta(b_i)(\delta(b)-\delta(b_i)))=\rho. \qquad (1.27)$$

Тогда, с одной стороны, числа l_{ik} $(i=1,2;\ k=1,\dots,m)$ удовлетворяют неравенствам (1.26), а с другой стороны, как это следует из равенств (1.25) и (1.27), уравнение (1.1_0) имеет нетривиальное решение

$$u(t)=\rho+\delta(t)(\delta(b)-\delta(t)),$$

удовлетворяющее однородным краевым условиям

$$\sum_{k=1}^{m} l_{1k} u(a_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{m} l_{2k} u(b_k) = 0.$$

Следовательно, задача (1.1), $(1.2')$ является некорректной.

Построенный пример показывает, что в теореме 1.1 (в следствии 1.1) условие (1.10) (условие $(1.10')$) является в определенном смысле неулучшаемым.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

2.1. Леммы об однозначной разрешимости двухточечных краевых задач. Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение (1.1_0) с двухточечными условиями одного из четырех видов:

$$u(a_0) = 0, \quad u(b_0) = 0, \tag{2.1}$$

$$u(a_0) = 0, \quad u'(b_0) = 0, \tag{2.2}$$

$$u'(a_0) = 0, \quad u(b_0) = 0, \tag{2.3}$$

$$u'(a_0) = 0, \quad u'(b_0) = 0, \tag{2.4}$$

где $a \le a_0 < b_0 \le b$. Как и выше, будем считать, что $r: [a,b] \to (0,+\infty)$ и $p: [a,b] \to \mathbb{R}$ – соответственно непрерывная и интегрируемая функции, а δ – функция, заданная равенством (1.17).

Лемма 2.1. *Если для некоторого $\lambda \ge 1$ выполнено неравенство (1.12), то задача (1.1_0), (2.1) имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Посредством преобразования

$$x = \delta(t), \quad w(x) = u(t) \tag{2.5}$$

задача (1.1_0), (2.1) сводится к задаче

$$w'' = p_0(x) w, \tag{2.6}$$

$$w(x_1) = 0, \quad w(x_2) = 0, \tag{2.7}$$

где

$$p_0(\delta(t)) = r(t) p(t), \quad x_1 = \delta(a_0), \quad x_2 = \delta(b_0). \tag{2.8}$$

С другой стороны, согласно теореме 1.2 из работы [8], если

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} [p_0(x)]_-^{\lambda} \, dx \le \left(\frac{\pi}{x_2 - x_1} \right)^{2\lambda - 2}, \tag{2.9}$$

то задача (2.6), (2.7) и, следовательно, задача (1.1_0), (2.1) имеют только тривиальное решение. Поэтому для доказательства леммы достаточно установить, что из неравенства (1.12) вытекает неравенство (2.9). В самом деле, если наряду с неравенством (1.12) учтем равенство (1.17) и (2.8), то получим неравенства

$$\frac{(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \le \frac{x(\delta(b) - x)}{\delta(b)} \quad \text{при} \quad x_1 \le x \le x_2,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} [p_0(x)]_-^{\lambda} \, dx \le \int_{0}^{\delta(b)} \frac{x(\delta(b) - x)}{\delta(b)} [p_0(x)]_-^{\lambda} \, dx =$$

$$= \frac{1}{\delta(b)} \int\limits_a^b r^{\lambda-1}(t)\delta(t)(\delta(b)-\delta(t))[p(t)]_-^\lambda \, dt \le \left(\frac{\pi}{\delta(b)}\right)^{2\lambda-2} \le \left(\frac{\pi}{x_2-x_1}\right)^{2\lambda-2}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Если для некоторого* $\lambda \ge 1$ *выполнено неравенство*

$$\int\limits_{a_0}^{b_0} r^{\lambda-1}(t)(\delta(t)-\delta(a_0))[p(t)]_-^\lambda \, dt \le \left(\frac{\pi}{2(\delta(b_0)-\delta(a_0))}\right)^{2\lambda-2}, \tag{2.10}$$

то задача (1.1_0), *(2.2) имеет только тривиальное решение. Если же*

$$\int\limits_{a_0}^{b_0} r^{\lambda-1}(t)(\delta(b_0)-\delta(t))[p(t)]_-^\lambda \, dt \le \left(\frac{\pi}{2(\delta(b_0)-\delta(a_0))}\right)^{2\lambda-2}, \tag{2.11}$$

то задача (1.1_0), *(2.3) имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Посредством преобразования

$$x = \delta(t) - \delta(a_0), \quad w(x) = u(t)$$

задача (1.1_0), (2.2) сводится к уравнению (2.6) с краевыми условиями

$$w(0) = 0, \quad w'(x_0) = 0, \tag{2.12}$$

где

$$p_0(\delta(t)-\delta(a_0)) = r(t)p(t) \quad \text{при} \quad a_0 \le t \le b_0, \quad x_0 = \delta(b_0)-\delta(a_0). \tag{2.13}$$

С другой стороны, посредством преобразования

$$x = \delta(b_0) - \delta(t), \quad w(x) = u(t)$$

задача (1.1_0), (2.3) также сводится к задаче (2.6), (2.12), где

$$p_0(\delta(b_0)-\delta(t)) = r(t)p(t) \quad \text{при} \quad a_0 \le t \le b_0, \quad x_0 = \delta(b_0)-\delta(a_0). \tag{2.14}$$

Из теоремы 1.4 работы [8] следует, что если функция p_0 удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_0^{x_0} x[p_0(x)]_-^\lambda \, dx \le \left(\frac{\pi}{2x_0}\right)^{2\lambda-2}, \tag{2.15}$$

то задача (2.6), (2.12) имеет только тривиальное решение. Следовательно, для доказательства леммы достаточно установить, что условия (2.10) и (2.13) (условия (2.11) и (2.14)) гарантируют выполнение неравенства (2.15). В самом деле, если выполнены условия (2.10) и (2.13), то имеем

$$\int\limits_0^{x_0} x[p_0(x)]_-^\lambda \, dx = \int\limits_{a_0}^{b_0} r^{\lambda-1}(t)(\delta(t)-\delta(a_0))[p(t)]_-^\lambda \, dt \le \left(\frac{\pi}{2x_0}\right)^{2\lambda-2}.$$

Если же выполнены условия (2.11) и (2.14), то

$$\int\limits_0^{x_0} x[p_0(x)]_-^\lambda \, dx = \int\limits_{a_0}^{b_0} r^{\lambda-1}(t)(\delta(b_0)-\delta(t))[p(t)]_-^\lambda \, dt \le \left(\frac{\pi}{2x_0}\right)^{2\lambda-2}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть существует* $\sigma \in \{-1, 1\}$ *такое, что*

$$\sigma p(t) > 0 \quad \text{при почти всех} \quad t \in (a_0, b_0). \tag{2.16}$$

Тогда произвольное решение u *задачи* (1.1_0), (2.4) *имеет хотя бы один нуль в промежутке* (a_0, b_0).

Доказательство. Допустим, что лемма неверна. Тогда существует решение u задачи (1.1_0), (2.4) такое, что

$$u(t) > 0 \quad \text{при} \quad a_0 < t < b_0. \tag{2.17}$$

Если тождество

$$\sigma(r(t)u'(t))' = \sigma p(t)u(t)$$

проинтегрируем от a_0 до b_0, то с учетом условия (2.4) получим, что

$$\sigma \int\limits_{a_0}^{b_0} p(t)u(t)\, dt = 0.$$

Но это равенство противоречит условиям (2.16) и (2.17). Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2.4. *Если выполнено одно из условий (1.15) и (1.16), то задача* (1.1_0), (2.4) *имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что выполнение условия (1.15) (условия (1.16)) гарантирует выполнение неравенств (2.16), где $\sigma = -1$ $(\sigma = 1)$.

Предположим теперь, что лемма неверна, т.е. выполнено одно из условий (1.15) и (1.16), но тем не менее задача (1.1_0), (2.4) имеет нетривиальное решение u. Тогда в силу леммы 2.3 и неравенства (2.16) существует $c \in (a_0, b_0)$ такое, что

$$u(c) = 0. \tag{2.18}$$

С другой стороны, согласно лемме 2.2, из равенств (2.4) и (2.18) следует, что

$$\int\limits_{a_0}^{c} r^{\lambda-1}(t)(\delta(c) - \delta(t))[p(t)]_-^\lambda\, dt > \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\lambda-2} (\delta(c) - \delta(a_0))^{2-2\lambda},$$

$$\int\limits_{c}^{b_0} r^{\lambda-1}(t)(\delta(t) - \delta(c))[p(t)]_-^\lambda\, dt > \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\lambda-2} (\delta(b_0) - \delta(c))^{2-2\lambda}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{a_0}^{c} r^{\lambda-1}(t)[p(t)]_-^\lambda\, dt > \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\lambda-2} (\delta(c) - \delta(a_0))^{1-2\lambda},$$

$$\int\limits_{c}^{b_0} r^{\lambda-1}(t)[p(t)]_-^\lambda\, dt > \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\lambda-2} (\delta(b_0) - \delta(c))^{1-2\lambda}.$$

Если сложить эти два неравенства, получим оценку

$$\int\limits_{a_0}^{b_0} r^{\lambda-1}(t)[p(t)]_-^\lambda\, dt > \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\lambda-2} \rho, \tag{2.19}$$

где
$$\rho = (\delta(c) - \delta(a_0))^{1-2\lambda} + (\delta(b_0) - \delta(c))^{1-2\lambda}.$$

Согласно теореме Радона (см. [20, теорема 65] или [5, лемма 2.1]), имеем
$$\rho \geq 2^{2\lambda}(\delta(b_0) - \delta(a_0))^{1-2\lambda} \geq 2^{2\lambda}\delta^{1-2\lambda}(b).$$
Поэтому из (2.19) вытекает неравенство
$$\int\limits_a^b r^{\lambda-1}(t)[p(t)]_-^\lambda\, dt \geq \int\limits_{a_0}^{b_0} r^{\lambda-1}(t)[p(t)]_-^\lambda\, dt > \frac{4}{\delta(b)}\left(\frac{\pi}{\delta(b)}\right)^{2\lambda-2}.$$
Но это неравенство противоречит как условию (1.15), так и условию (1.16). Полученное противоречие доказывает лемму.

2.2. Леммы о функционалах из множеств $\Lambda_\tau^+(t_1,t_2)$ и $\Lambda_{t_i}^1(t_1,t_2)$ $(i = 1,2)$. Всюду в этом пункте мы будем считать, что $-\infty < t_1 < t_2 < +\infty$ и $\tau \in [t_1,t_2]$.

Лемма 2.5. *Если*
$$l \in \Lambda_\tau^+(t_1,t_2), \tag{2.20}$$
то для любой функции $u \in C([t_1,t_2])$ *существует* $\tau_0 \in [t_1,t_2]$ *такое, что* $\tau_0 \neq \tau$ *и*
$$l(u) = u(\tau_0)l(1).$$

Доказательство. Из условия (2.20) следует, что $l(1) > 0$. Положим
$$u_0 = l(u)/l(1). \tag{2.21}$$
Мы должны доказать, что для некоторого $\tau_0 \in [t_1,t_2] \setminus \{\tau\}$ выполнено равенство $u(\tau_0) = u_0$. Допустим противное, что такого τ_0 не существует. Тогда без ограничения общности можем считать, что
$$u(t) > u_0 \quad \text{при} \quad t \in [t_1,t_2] \setminus \{\tau\}.$$
Отсюда в силу условия (2.20) вытекает, что $l(u - u_0) > 0$. Но это противоречит равенству (2.21). Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2.6. *Пусть* m *– натуральное число,* $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,\dots,m)$ *и*
$$0 \leq y_1 < \dots < y_m. \tag{2.22}$$
Тогда
$$\sum_{i=1}^m x_i y_i \leq S_m(x_1,\dots,x_m)y_m. \tag{2.23}$$

Доказательство. Ввиду неотрицательности y_1 имеем
$$x_1y_1 \leq [x_1]_+y_1 = S_1(x_1)y_1.$$
Предположим теперь, что для некоторого $k \in \{1,\dots,m-1\}$ соблюдается неравенство
$$\sum_{i=1}^k x_i y_i \leq S_k(x_1,\dots,x_k)y_k.$$
Тогда с учетом условий (1.6) и (2.22) получим соотношения
$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i y_i = \sum_{i=1}^k x_i y_i + x_{k+1}y_{k+1} \leq S_k(x_1,\dots,x_k)y_k + x_{k+1}y_{k+1} \leq$$
$$\leq (S_k(x_1,\dots,x_k) + x_{k+1})y_{k+1} \leq [S_k(x_1,\dots,x_k) + x_{k+1}]_+y_{k+1} = S_{k+1}(x_1,\dots,x_{k+1})y_{k+1}.$$
Отсюда по закону индукции вытекает справедливость неравенства (2.23). Лемма доказана.

Лемма 2.7. *Пусть* $l: C([t_1,t_2]) \to \mathbb{R}$ *– функционал, заданный равенством*

$$l(u) = \sum_{i=1}^{m} x_i u(\tau_i), \tag{2.24}$$

где

$$t_1 < \tau_1 < \ldots < \tau_m < t_2 \quad (t_1 < \tau_m < \ldots < \tau_1 < t_2), \tag{2.25}$$

$$S_m(x_1, \ldots, x_m) \le 1. \tag{2.26}$$

Тогда

$$l \in \Lambda^1_{t_2}(t_1,t_2) \quad (l \in \Lambda^1_{t_1}(t_1,t_2)). \tag{2.27}$$

Доказательство. Пусть $u: \ [t_1,t_2] \to [0,+\infty)$ – произвольная непрерывная возрастающая (убывающая) функция. Тогда, согласно условию (2.25), числа $y_i = u(\tau_i)$ $(i=1,\ldots,m)$ удовлетворяют неравенствам (2.22). Отсюда по лемме 2.6 вытекает оценка (2.23). В силу этой оценки и неравенств (2.25) и (2.26) из представления (2.24) следует, что $l(u) \le u(\tau_m)$ и

$$l(u) < u(t_2) \quad (l(u) < u(t_1)).$$

Следовательно, функционал l удовлетворяет условию (2.27). Лемма доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

3.1. Доказательство теоремы 1.1. Согласно предложению 1.1, для доказательства теоремы достаточно установить, что однородная задача (1.1_0), (1.2_0) имеет только тривиальное решение.

Рассмотрим сначала случай, когда выполнены условия (1.7) и (1.12). Согласно (1.7), для произвольного решения u задачи (1.1_0), (1.2_0) существуют $a_0 \in [a,t_0)$ и $b_0 \in (t_0,b]$ такие, что выполнены равенства (2.1). Однако в силу леммы 2.1 и неравенства (1.12) задача (1.1_0), (2.1) имеет только тривиальное решение. Следовательно, $u(t) \equiv 0$.

Докажем теперь, что задача (1.1_0), (1.2_0) имеет только тривиальное решение и в случае, когда выполнены условия (1.8) и (1.13). Допустим противное, что эта задача имеет нетривиальное решение u. Условия (1.2_0) и (1.8) гарантируют существование $a_0 \in [a,t_0)$ такого, что $u(a_0)=0$. Не ограничивая общности, можем считать, что $u'(a_0)=1$. С другой стороны, согласно неравенству (1.13), при каждом $b_0 \in (a_0,b]$ выполняется неравенство (2.10). Отсюда, согласно лемме 2.1, вытекает, что

$$u(t) > 0, \quad u'(t) > 0 \quad \text{при} \quad a_0 < t \le b.$$

Если наряду с этим учтем условие $l_2 \in \Lambda^1_b(t_0,b)$, то станет ясным, что $l_2(u) < u(b)$. Но это неравенство противоречит второму из равенств (1.2_0). Полученное противоречие доказывает, что в рассматриваемом случае задача (1.1_0), (1.2_0) имеет только тривиальное решение. Совершенно аналогично доказывается, что задача (1.1_0), (1.2_0) имеет только тривиальное решение и в случае, когда выполнены условия (1.9) и (1.14).

Для завершения доказательства теоремы остается рассмотреть случай, когда наряду с (1.10) выполнено одно из условий (1.15) и (1.16). В этом случае в силу леммы 2.5 для произвольного решения u задачи (1.1_0), (1.2_0) найдутся числа $\tau_1 \in (a,t_0]$ и $\tau_2 \in [t_0,b)$ такие, что

$$l_1(u) = u(\tau_1), \quad l_2(u) = u(\tau_2)$$

и, следовательно,

$$u(a) = u(\tau_1), \quad u(b) = u(\tau_2).$$

Отсюда в силу теоремы Ролля вытекает, что функция u для некоторых $a_0 \in (a,t_0)$ и $b_0 \in (t_0,b)$ удовлетворяет равенствам (2.4). Однако по лемме 2.4 задача (1.1_0), (2.4) имеет только тривиальное решение. Следовательно, $u(t) \equiv 0$. Теорема доказана.

3.2. Доказательство теоремы 1.2. Пусть u – произвольное решение задачи (1.1_0), (1.3_0). Согласно предложению 1.1, для доказательства теоремы 1.2 достаточно установить, что $u(t) \equiv 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда выполнены условия (1.7) и (1.13). В силу (1.3_0) и (1.7) существуют числа $a_0 \in [a, t_0)$ и $b_0 \in (t_0, b]$ такие, что функция u удовлетворяет равенствам (2.2). С другой стороны, из неравенства (1.13) вытекает неравенство (2.10). Если теперь применим лемму 2.2, то станет ясным, что $u(t) \equiv 0$.

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда выполнены условия (1.8) и (1.16). Допустим, что в этом случае $u(t) \not\equiv 0$. Из условий $u(a) = l_1(u)$ и $l_1 \in \Lambda^-(a, t_0)$ вытекает существование $a_0 \in [a, t_0)$ такого, что $u(a_0) = 0$. Не ограничивая общности, можем считать, что $r(a_0)u'(a_0) = 1$. Тогда, согласно условию (1.16), будем иметь

$$r(t)u'(t) > 1 \quad \text{при} \quad t_0 \le t \le b, \quad (r(t)u'(t))' > 0 \quad \text{при почти всех} \quad t \in (t_0, b).$$

Отсюда в силу условия $l_2 \in \Lambda^1_b(t_0, b)$ вытекает, что $l_2(ru') < r(b)u'(b)$. Но это неравенство противоречит второму из равенств (1.3_0). Полученное противоречие доказывает, что $u(t) \equiv 0$.

В заключение рассмотрим случай, когда наряду с (1.11) выполнено одно из условий (1.15) и (1.16). В силу леммы 2.5 и условий (1.3_0) и (1.11) существуют $\tau_0 \in (a, t_0]$ и $b_0 \in (t_0, b]$ такие, что

$$u(a) = u(\tau_0), \quad u'(b_0) = 0.$$

Отсюда по теореме Ролля вытекает, что функция u удовлетворяет равенствам (2.4) для некоторого $a_0 \in (a, \tau_0)$. Однако по лемме 2.4 задача (1.1_0), (2.4) имеет только тривиальное решение. Следовательно, $u(t) \equiv 0$. Теорема доказана.

Теорема 1.3 доказывается аналогично теореме 1.2.

3.3. Доказательство следствий 1.1–1.3. Положим $t_0 = a_1$,

$$l_1(v) = \sum_{i=1}^m l_{1i} v(a_i), \quad l_2(v) = \sum_{i=1}^m l_{2i} v(b_i).$$

Тогда при каждом $k \in \{2, 3, 4\}$ краевые условия $(1.k')$ примут вид $(1.k)$. Если наряду с определениями множеств $\Lambda^-(a, t_0)$, $\Lambda^-(t_0, b)$, $\Lambda^+_a(a, t_0)$ и $\Lambda^+_b(t_0, b)$ примем во внимание неравенства (1.5) и лемму 2.7, то станет ясным, что при каждом $k \in \{7, 8, 9, 10, 11\}$ выполнение условия $(1.k')$ гарантирует выполнение условия $(1.k)$. Поэтому из теорем 1.1–1.3 соответственно вытекают следствия 1.1–1.3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *De la Vallée Poussin C.* Sur l'equation differentielle lineaire du second ordre. Détermination d'une integrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n // J. Math. Pures et Appl. 1929. V. 297. № 2. P. 131–151.
2. *Epheser H.* Uber die Existenz der Losungen von Randwertaufgaben mit gewöhnlichen michtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordung // Math. Z. 1955. V. 61. № 4. P. 435–454.
3. *Hartman P.* Ordinary differential equations // SIAM. Philadelphia. 2002.
4. *Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Л.* Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Нов. достижения. 1987. Т. 30. С. 105–201.
5. *Kiguradze I.* Some optimal conditions for the solvability of two-point singular boundary value problems // Funct. Differ. Equat. 2003. V. 10. № 1–2. P. 259–281.
6. *Agarwal R.P., Kiguradze I.* Two-point boundary value problems for higher-order linear differential equations with strong singularities // Boundary Value Problems. 2006. P. 1–32.
7. *Kiguradze I.* The Neumann problem for the second order nonlinear ordinary differential equations at resonance // Funct. Differ. Equat. 2009. V. 16. № 2. P. 353–371.
8. *Kiguradze T.* On solvability and unique solvability of two-point singular boundary value problems // Nonlinear Analysis. 2009. V. 71. P. 789–798.

9. *Partsvania N.* On Two-Point Boundary Value Problems for Two-Dimensional Linear Differential Systems with Singular Coefficients // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. 2010. V. 51. P. 155–162.
10. *Kiguradze I., Lomtatidze A.* On certain boundary-value problems for second-order linear ordinary differential equations with singularities // J. Math. Anal. Appl. 1984. V. 101. № 2. P. 325–347.
11. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Нелокальная краевая задача первого рода для оператора Штурма–Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 7. С. 1198–1207.
12. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Нелокальная краевая задача второго рода для оператора Штурма–Лиувилля // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 8. С. 1422–1431.
13. *Довлетов Д.М.* О нелокальной краевой задаче первого рода в дифференциальной и разностной трактовках // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 8. С. 1297–1307.
14. *Lomtatidze A.* On a nonlocal boundary value problem for second order linear ordinary differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 193. P. 889–908.
15. *Ломтатидзе А.Г.* Нелокальная краевая задача для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 3. С. 446–455.
16. *Kiguradze T.* On some nonlocal boundary value problems for linear singular differential equations of higher order // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. 2009. V. 47. P. 169–174.
17. *Кигурадзе Т.И.* Об условиях корректности линейных сингулярных краевых задач // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 2. С. 183–190.
18. *Кигурадзе И.Т.* О краевых задачах для линейных дифференциальных систем с сингулярностями // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 2. С. 198–209.
19. *Кигурадзе И.Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Нов. достижения. 1987. Т. 30. С. 3–103.
20. *Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G.* Inequalities. Cambridge, 1934.

Математический институт им. А. Размадзе
Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили, г. Тбилиси, Грузия,
Флоридский технологический институт,
г. Мельбурн, Флорида, США

Поступила в редакцию
07.04.2011 г.