ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2008, том 44 , № 8, с. 1022–1032

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927

О РЕЗОНАНСНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

© **И.Т. Кигурадзе**

1 Формулировка основных результатов

В предлагаемой статье для дифференциальных уравнений вида

$$u^{(n)} = f(t, u) + f_0(t) \tag{1.1}$$

исследуется задача о существовании периодического решения с наперед заданным периодом $\omega > 0$. Здесь $n \geq 1$, f – функция, удовлетворяющая локальным условиям Каратеодори,

$$f(t, 0) = 0, \quad f(t + \omega, x) = f(t, x) \ \text{ при } \ (t, x) \in R^2 \ \text{ и } \ f_0 \in L_\omega. \tag{1.2}$$

Нас в основном интересует мало изученный ранее случай, когда

$$\liminf_{|x|\to+\infty} \left| \frac{f(t, x)}{x} \right| = 0\,.$$

В этом случае рассматриваемая нами периодическая задача является резонансной, ибо соответствующее (1.1) линейное однородное дифференциальное уравнение $u^{(n)} = 0$ имеет бесконечное множество ω-периодических решений.

Всюду в дальнейшем через L_ω (через L_ω^∞) обозначается пространство ω-периодических вещественных функций, интегрируемых по Лебегу (существенно ограниченных и измеримых) на $[0, \omega]$. Для произвольных $p_i \in L_\omega$ $(i = 1, 2)$ запись $p_1(t) \not\equiv p_2(t)$ будет означать, что функции p_1 и p_2 отличны друг от друга на множестве положительной меры.

Теорема 1.1. *Пусть* $n = 2m - 1$, $\sigma \in \{-1, 1\}$ $(n = 2m$, $\sigma = (-1)^{m-1})$ *и существуют положительная постоянная* r *и функция* $g \in L_\omega$ *такие, что*

$$\sigma f(t, x) \operatorname{sgn} x \geq g(t) \ \text{ при } \ (t, x) \in R^2, \ |x| > r, \tag{1.3}$$

$$\left| \int_0^\omega f_0(t)\, dt \right| \leq \int_0^\omega g(t)\, dt\,. \tag{1.4}$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет хотя бы одно* ω*-периодическое решение.*

Теорема 1.2. *Пусть* $n = 2m - 1$, $\sigma \in \{-1, 1\}$ $(n = 2m$, $\sigma = (-1)^{m-1})$ *и существуют* $\ell \in L_\omega$ *и непрерывная функция* $h : R^2 \to [0, +\infty[$ *такие, что* $\ell(t) > 0$ *при* $t \in R$, $h(x, y) > 0$ *при* $x \neq y$ *и*

$$\sigma\, (f(t, x) - f(t, y)) \operatorname{sgn}(x - y) \geq \ell(t) h(x, y) \ \text{ при } \ (t, x, y) \in R^3. \tag{1.5}$$

Пусть, кроме того, для некоторого $r > 0$ *выполнено неравенство* (1.4)*, где*

$$g(t) = \max\left\{|f(t, r)|, \ |f(t, -r)|\right\}. \tag{1.6}$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет единственное* ω*-периодическое решение.*

Для дальнейшего нам понадобится ввести следующее

Определение 1.1. Скажем, что неотрицательная функция $p \in L_\omega$ принадлежит множеству $\mathcal{K}_\omega^m$, если $p(t) \not\equiv 0$ и для произвольной функции $p_0 \in L_\omega$, удовлетворяющей условиям

$$0 \le p_0(t) \le p(t) \quad \text{при} \quad t \in R, \quad p_0(t) \not\equiv 0, \tag{1.7}$$

дифференциальное уравнение

$$u^{(2m)} = (-1)^m p_0(t) u \tag{1.8}$$

не имеет нетривиального ω-периодического решения.

Теорема 1.3. *Пусть* $n = 2m$ *и существуют положительная постоянная* r *и функции* g, p *и* $q \in L_\omega$ *такие, что наряду с* (1.4) *выполнены условия*

$$p \in \mathcal{K}_\omega^m, \tag{1.9}$$

$$g(t) \le (-1)^m f(t,x)\operatorname{sgn} x \le p(t)|x| + q(t) \quad \text{при} \ (t,x) \in R^2, \ \ |x| > r. \tag{1.10}$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет хотя бы одно* ω*-периодическое решение.*

Следствие 1.1. *Пусть* $n = 2m$ *и существуют положительная постоянная* r *и функции* g, p *и* $q \in L_\omega$ *такие, что наряду с* (1.4) *выполнено неравенство* (1.10). *Пусть, кроме того,* p *и* m *удовлетворяют одному из следующих трех условий:*

$$p(t) \le \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{2m} \quad \text{при} \ \ t \in R, \quad p(t) \not\equiv \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{2m}; \tag{1.11}$$

$$\int\limits_0^\omega p(t)\,dt \le \frac{4}{\omega}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{2m-2}; \tag{1.12}$$

$$m = 1, \quad \int\limits_0^\omega p(t)\,dt \le \frac{16}{\omega}\,. \tag{1.13}$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет хотя бы одно* ω*-периодическое решение.*

Теорема 1.4. *Пусть* $n = 2m$ *и существуют* $\ell \in L_\omega$, $p \in \mathcal{K}_\omega^m$ *и непрерывная функция* $h : R^2 \to [0, +\infty[$ *такие, что* $\ell(t) \ge 0$ *при* $t \in R$, $\ell(t) \not\equiv 0$, $h(x,y) > 0$ *при* $x \ne y$ *и*

$$\ell(t)h(x,y) \le (-1)^m \left(f(t,x) - f(t,y)\right)\operatorname{sgn}(x-y) \le p(t)|x-y| \ \ \text{при} \ \ (t,x,y) \in R^3. \tag{1.14}$$

Пусть, кроме того, для некоторого $r > 0$ *выполнено неравенство* (1.4), *где* g *– функция, заданная равенством* (1.6). *Тогда уравнение* (1.1) *имеет единственное* ω*-периодическое решение.*

Следствие 1.2. *Пусть* $n = 2m$ *и существуют положительная постоянная* r, *неотрицательные функции* $p \in L_\omega$, $\ell \in L_\omega$ *и непрерывная функция* $h : R^2 \to [0, +\infty[$ *такие, что* $\ell(t) \not\equiv 0$, $h(x,y) > 0$ *при* $x \ne y$ *и выполнены условия* (1.4) *и* (1.14), *где* g *– функция, заданная равенством* (1.6). *Если, кроме того,* m *и* p *удовлетворяют одному из условий* (1.11), (1.12) *и* (1.13), *то уравнение* (1.1) *имеет единственное* ω*-периодическое решение.*

В качестве примеров рассмотрим дифференциальные уравнения

$$u^{(n)} = \sigma f_1(t)\exp(f_2(t)|u|^\nu)|\sin u|u + f_0(t); \tag{1.15}$$

$$u^{(n)} = \sigma f_1(t)\exp(f_2(t)|u|^\nu)u + f_0(t); \tag{1.16}$$

$$u^{(n)} = \sigma f_1(t)(1 + |u|^\nu)^{-1}|u|^\nu \operatorname{sgn} u + f_0(t), \tag{1.17}$$

где $\sigma \in \{-1, 1\}$, $\nu > 0$, $f_i \in L_\omega$ $(i = 0, 1)$, $f_1(t) \ge 0$ при $t \in R$, $f_2 \in L_\omega^\infty$. В силу теоремы 1.1 и следствия 1.1 уравнение (1.15) имеет хотя бы одно ω-периодическое решение, если $\int\limits_0^\omega f_0(t)\,dt = 0$ и либо выполнено одно из следующих двух условий

$$n = 2m-1, \quad \sigma \in \{-1, 1\}, \tag{1.18}$$

$$n = 2m, \quad \sigma = (-1)^{m-1}, \tag{1.19}$$

либо $n = 2m$, $\sigma = (-1)^m$, $f_2(t) \le 0$ при $t \in R$ и

$$\lim_{x\to+\infty} \int\limits_0^\omega f_1(s)\exp(xf_2(s))\,ds < \frac{4}{\omega}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{2m-2}.$$

Согласно теореме 1.2 и следствию 1.2:

1) если $f_1(t) > 0$, $f_2(t) \ge 0$ при $t \in R$ и выполнено одно из условий (1.18) и (1.19), то уравнение (1.16) имеет единственное ω-периодическое решение;

2) если $f_1(t) > 0$ при $t \in R$, $|\int\limits_0^\omega f_0(s)\,ds| < \int\limits_0^\omega f_1(s)\,ds$ и либо выполнено одно из условий (1.18) и (1.19), либо $n = 2m$, $\sigma = (-1)^m$, $\nu \ge 1$ и $\nu f_1(t) < \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^n$ при $t \in R$, то уравнение (1.17) имеет единственное ω-периодическое решение.

Эти факты не вытекают из известных ранее теорем существования и единственности ω-периодического решения уравнения (1.1) (см. [1]–[15] и цитированную там литературу).

Замечание 1.1. В теоремах 1.1–1.4 и следствиях 1.1 и 1.2 неравенство (1.4) является неулучшаемым в том смысле, что его нельзя заменить неравенством

$$\left|\int\limits_0^\omega f_0(t)\,dt\right| \le (1+\varepsilon)\int\limits_a^b g(t)\,dt \tag{1.20}$$

каким бы малым ни был $\varepsilon > 0$. В самом деле, если

$$f_0(t) = (1+\varepsilon)g(t), \quad f(t,x) = \sigma(1+\varepsilon)g(t)(1+|x|)^{-1}x,$$

где $\varepsilon > 0$, $\sigma \in \{-1, 1\}$, $g \in L_\omega$ и $g(t) > 0$ при $t \in R$, то уравнение (1.1) не имеет ω-периодического решения. С другой стороны, в случае, когда $n \in \{2m-1, 2m\}$ и $\sigma = (-1)^{m-1}$ ($n = 2m$, $\sigma = (-1)^m$ и $(1+\varepsilon)g(t) < \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{2m}$ при $t \in R$) выполнены все условия теоремы 1.2 (следствия 1.2) кроме неравенства (1.4), вместо которого выполнено неравенство (1.20).

Замечание 1.2. В следствиях 1.1 и 1.2 условие (1.11) нельзя заменить условием $p(t) \equiv \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{2m}$, так как если $n = 2m$,

$$f(t,x) \equiv (-1)^m\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{2m} x \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\omega f_0(t)\sin\frac{2\pi t}{\omega}\,dt \ne 0,$$

то уравнение (1.1) не имеет ω-периодического решения.

2 Вспомогательные предложения

Через C_ω (через C_ω^{n-1}) обозначим пространство непрерывных ($(n-1)$-раз непрерывно дифференцируемых) ω-периодических функций $u : R \to R$ с нормой

$$\|u\|_{C_\omega} = \max\{\|u(t)\| : \ 0 \le t \le \omega\} \quad \left(\|u\|_{C_\omega^{n-1}} = \sum_{k=1}^n \|u^{(k-1)}\|_{C_\omega}\right),$$

а через $\widetilde{C}_\omega^{n-1}$ – пространство функций $u \in C_\omega^{n-1}$, для которых $u^{(n-1)}$ является абсолютно непрерывной.

Под $\|v\|_{L_\omega}$ будем понимать норму функции $v \in L_\omega$, заданную равенством

$$\|v\|_{L_\omega} = \int\limits_0^\omega |v(t)|\,dt.$$

Для произвольной $u \in C_\omega$ положим

$$\mu(u) = \min\{|u(t)| :\ 0 \le t \le \omega\}.$$

Введем числа

$$\alpha_{nk} = \frac{\omega}{4}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{n-1-k} \quad (k = 1, \ldots, n-1), \quad \alpha_{nn} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_n = \sum_{k=1}^n \alpha_{nk}. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Если* $u \in \widetilde{C}_\omega^{n-1}$, *то*

$$\|u\|_{C_\omega} \le \mu(u) + \alpha_{n1}\|u^{(n)}\|_{L_\omega}, \quad \|u\|_{C_\omega^{n-1}} \le \mu(u) + \alpha_n\|u^{(n)}\|_{L_\omega}. \tag{2.2}$$

Если, кроме того, u *является знакопеременной функцией, то*

$$\|u\|_{C_\omega} < \alpha_{n1}\|u^{(n)}\|_{L_\omega}, \quad \|u\|_{C_\omega^{n-1}} < \alpha_n\|u^{(n)}\|_{L_\omega}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Выберем $t_0 \in [0,\omega]$ и $t^* \in]t_0, t_0+\omega[$ таким образом, чтобы $\mu(u) = |u(t_0)|$ и $\|u\|_{C_\omega} = \|u(t^*)\|$. Тогда

$$\|u\|_{C_\omega} = \left|u(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t^*} u'(t)\,dt\right| \le \mu(u) + \int\limits_{t_0}^{t^*} |u'(t)|\,dt,$$

$$\|u\|_{C_\omega} = \left|u(t_0) - \int\limits_{t^*}^{t_0+\omega} u'(t)\,dt\right| \le \mu(u) + \int\limits_{t^*}^{t_0+\omega} |u'(t)|\,dt.$$

Поэтому

$$2\|u\|_{C_\omega} \le 2\mu(u) + \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} |u'(t)|\,dt$$

и, следовательно,

$$\|u\|_{C_\omega} \le \mu(u) + \frac{1}{2}\,\|u'\|_{L_\omega}. \tag{2.4}$$

Это неравенство для функции $u^{(n-1)}$ принимает вид

$$\|u^{(n-1)}\|_{C_\omega} \le \frac{1}{2}\,\|u^{(n)}\|_{C_\omega}, \tag{2.5}$$

ибо $\mu(u^{(n-1)}) = 0$.

Если $n > 1$, то согласно теореме Виртингера ([16], теорема 258) и неравенству (2.5) имеем

$$\|u'\|_{L_\omega} \le \omega^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^\omega |u'(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \le \omega^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{n-2}\left(\int\limits_0^\omega |u^{(n-1)}(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \omega\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{n-2}\|u^{(n-1)}\|_{C_\omega} \le 2\alpha_{n1}\|u^{(n)}\|_{L_\omega}, \tag{2.6}$$

согласно чему из неравенства (2.4) находим

$$\|u\|_{C_\omega} \le \mu(u) + \alpha_{n1}\|u^{(n)}\|_{L_\omega}.$$

Если это неравенство применим для функций $u^{(k-1)}$ $(k = 2,\ldots,n)$, то получим

$$\|u^{(k-1)}\|_{C_\omega} \le \alpha_{nk}\|u^{(n)}\|_{L_\omega} \quad (k = 2,\ldots,n). \tag{2.7}$$

Тем самым мы доказали справедливость неравенств (2.2), где α_{nk} $(k = 1,\ldots,n)$ и α_n – числа, заданные равенствами (2.1).

Перейдем к рассмотрению случая, когда u является знакопеременной функцией. Тогда найдутся $t_0 \in [0,\omega]$, $t^* \in]t_0, t_0+\omega[$ и $\sigma \in \{-1,1\}$ такие, что

$$u(t_0) = 0, \quad \|u\|_{C_\omega} = \sigma \int\limits_{t_0}^{t^*} u'(s)\,ds, \quad \|u\|_{C_\omega} = -\sigma \int\limits_{t^*}^{t_0+\omega} u'(s)\,ds.$$

Из этих равенств следует, что либо

$$\|u\|_{C_\omega} < \frac{1}{2}\,\|u'\|_{L_\omega}, \tag{2.8}$$

либо

$$\sigma u'(t)(t^* - t) \ge 0 \quad \text{при почти всех } t \in [t_0, t_0+\omega].$$

Однако, последнее неравенство не может иметь места, так как $u(t_0) = u(t_0+\omega) = 0$ и u является знакопеременной функцией. Следовательно, справедливо неравенство (2.8). С другой стороны, как это было доказано выше, при $n > 1$ функция u удовлетворяет неравенствам (2.6) и (2.7). Из неравенств (2.6)–(2.8) вытекают неравенства (2.3). Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть* $p \in L_\omega$, $p(t) \ge 0$ *при* $t \in R$, $p(t) \not\equiv 0$ *и выполнено одно из условий* (1.11), (1.12) *и* (1.13). *Тогда выполнено и условие* (1.9).

Доказательство. Пусть $p_0 \in L_\omega$ – произвольная функция, удовлетворяющая неравенствам (1.7). Если, кроме того, выполнено условие (1.11) (условие (1.13)), то согласно теореме 1.1 из [11] (согласно лемме, доказанной в §3 работы [1]) уравнение (1.8) не имеет нетривиального ω-периодического решения. Нам остается лишь доказать, что это уравнение не имеет нетривиального ω-периодического решения и в случае, когда выполнено условие (1.12). Допустим противное, что уравнение (1.8) имеет нетривиальное ω-периодическое решение u. Тогда $\int\limits_0^\omega p_0(t)u(t)\,dt = 0$. Отсюда, согласно условиям (1.7), заключаем, что u является знакопеременной функцией. По лемме 2.1 это обстоятельство гарантирует справедливость неравенств (2.3). Если наряду с (2.3) учтем неравенства (1.7) и (1.12), то из (1.8) найдем

$$\|u^{(2m)}\|_{L_\omega} = \|p_0 u\|_{L_\omega} \le \|p_0\|_{L_\omega}\|u\|_{C_\omega} < \alpha_{2m\,1}\|p\|_{L_\omega}\|u^{(2m)}\|_{L_\omega} \le \|u^{(2m)}\|_{L_\omega}.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных неравенств

$$\sigma u^{(n)}(t)\operatorname{sgn} u(t) \ge |u^{(n)}(t)\operatorname{sgn} u(t)| - q(t), \quad |u^{(n)}(t)| \le q_0(t, |u(t)|) \tag{2.9}$$

и двустороннее дифференциальное неравенство

$$-q(t) \le (-1)^m u^{(2m)}(t)\operatorname{sgn} u(t) \le p(t)\,|u(t)| + q(t), \tag{2.10}$$

где $\sigma \in \{-1,1\}$, p и $q \in L_\omega$ суть неотрицательные функции, а $q_0 : R \times [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ такова, что $q_0(\cdot,x) \in L_\omega$ при произвольном $x \in [0,+\infty[$ и $q_0(t,\cdot) : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ является непрерывной, неубывающей функцией при почти всех $t \in R$.

Функция $u \in \widetilde{C}_\omega^{n-1}$ называется ω-периодическим решением системы дифференциальных неравенств (2.9) (дифференциального неравенства (2.10)), если она почти всюду на R удовлетворяет этой системе (этому неравенству).

Лемма 2.3. *Если выполнено одно из условий* (1.18) *и* (1.19), *то произвольное* ω*-периодическое решение* u *системы дифференциальных неравенств* (2.9) *допускает оценку*

$$\|u\|_{C_\omega^{n-1}} \leq \rho_1 \mu(u) + \rho_2 \,, \tag{2.11}$$

где

$$\rho_1 = 1 + \alpha_n \|q\|_{L_\omega} \,, \quad \rho_2 = \alpha_n \rho_1 \int\limits_0^\omega q_0(t, \rho_1)\, dt \,. \tag{2.12}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что по лемме 2.1, функция u допускает оценки (2.2).

Если первое неравенство системы (2.9) умножим на $|u(t)|$ и проинтегрируем от 0 до ω, то получим

$$-(n+1-2m) \int\limits_0^\omega |u^{(m)}(t)|^2\, dt \geq \int\limits_0^\omega |u^{(n)}(t) u(t)|\, dt - \int\limits_0^\omega q(t)\, |u(t)|\, dt.$$

Отсюда в силу (2.2) вытекает, что

$$\int\limits_0^\omega |u^{(n)}(t) u(t)|\, dt \leq \Big(\mu(u) + \alpha_n \|u^{(n)}\|_{L_\omega}\Big) \|q\|_{L_\omega} \,. \tag{2.13}$$

Пусть

$$I_1 = \{t \in [0, \omega] :\ |u(t)| > \rho_1\} \,, \quad I_2 = [0, \omega] \setminus I_1 \,.$$

Тогда на основе второго неравенства системы (2.9) и неравенства (2.13) находим

$$\rho_1 \|u^{(n)}\|_{L_\omega} \leq \int\limits_{I_1} |u^{(n)}(t) u(t)|\, dt + \rho_1 \int\limits_{I_2} |u^{(n)}(t)|\, dt \leq \Big(\mu(u) + \alpha_n \|u^{(n)}\|_{L_\omega}\Big) \|q\|_{L_\omega} +$$
$$+ \rho_1 \int\limits_0^\omega q_0(t, \rho_1)\, dt = (\rho_1 - 1) \Big(\|u^{(n)}\|_{L_\omega} + \mu(u)/\alpha_n\Big) + \rho_2/\alpha_n$$

и, следовательно,

$$\|u^{(n)}\|_{L_\omega} \leq \left((\rho_1 - 1)\mu(u) + \rho_2\right)/\alpha_n,$$

где ρ_1 и ρ_2 – числа, заданные равенствами (2.12). Если наряду с этим учтем и неравенства (2.2), то справедливость оценки (2.11) станет очевидной. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Если выполнено условие* (1.9), *то найдется положительная постоянная* ρ_0 *такая, что для произвольной неотрицательной функции* $q \in L_\omega$ *каждое решение* u *дифференциального неравенства* (2.10) *допускает оценку*

$$\|u\|_{C_\omega^{2m-1}} \leq \rho_0 \left(\mu(u) + \|q\|_{L_\omega}\right). \tag{2.14}$$

Доказательство. Допустим, что лемма неверна. Тогда для произвольного натурального числа k найдутся неотрицательная функция $q_k \in L_\omega$ и ω-периодическое решение u_k дифференциального неравентсва

$$0 \leq (-1)^m u_k^{(2m)}(t) \operatorname{sgn} u_k(t) + q_k(t) \leq p(t)\, |u_k(t)| + 2q_k(t) \tag{2.15}$$

такие, что
$$\|u_k\|_{C_\omega^{2m-1}} > k\left(\mu(u_k) + \|q_k\|_{L_\omega}\right). \tag{2.16}$$

Пусть
$$u_{0k}(t) = u_k(t)/\|u_k\|_{C_\omega^{2m-1}}, \quad q_{0k}(t) = q_k(t)/\|u_k\|_{C_\omega^{2m-1}}, \quad \delta_k(t) = p(t)\,|u_{0k}(t)| + 2q_{0k}(t),$$
$$\eta_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } \ \delta_k(t) = 0, \\ \Big((-1)^m u_{0k}^{(2m)}(t)\operatorname{sgn} u_{0k}(t) + q_{0k}(t)\Big)/\delta_k(t) & \text{при } \ \delta_k(t) > 0, \end{cases}$$
$$p_k(t) = \eta_k(t)p(t), \quad \mathcal{P}_k(t) = \int\limits_0^t p_k(s)\,ds, \quad q_{1k}(t) = (2\eta_k(t) - 1)q_{0k}(t)\operatorname{sgn} u_{0k}(t).$$

Тогда в силу неравенств (2.15) и (2.16) имеем $0 \le \eta_k(t) \le 1$ при почти всех $t \in R$,
$$\|u_{0k}\|_{C_\omega^{2m-1}} = 1, \quad \mu(u_{0k}) < 1/k; \tag{2.17}$$
$$\|q_{1k}\|_{L_\omega} < 1/k. \tag{2.18}$$

Кроме того, ясно, что при каждом натуральном k функция u_{0k} является ω-периодическим решением дифференциального уравнения
$$u_{0k}^{(2m)}(t) = (-1)^m p_{0k}(t)u_{0k}(t) + q_{1k}(t), \tag{2.19}$$

а функция $\mathcal{P}_k$ удовлетворяет условиям
$$\mathcal{P}_k(0) = 0, \quad \mathcal{P}_k(t+\omega) = \mathcal{P}_k(\omega) + \mathcal{P}_k(t), \quad 0 \le \mathcal{P}_k(t) - \mathcal{P}_k(\tau) \le \\ \le \int\limits_\tau^t p(s)\,ds \ \text{ при } \ t \in R, \ \ \tau \le t. \tag{2.20}$$

Согласно (2.17) и (2.18) из (2.19) находим
$$\|u_{0k}^{(2m)}\|_{L_\omega} \le \|p\|_{L_\omega} + 1. \tag{2.21}$$

С другой стороны, в силу леммы Арцела–Асколи и условий (2.17), (2.20) и (2.21) без ограничения общности можем считать, что последовательности $(u_{0k}^{(i-1)})_{k=1}^\infty$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $(\mathcal{P}_k)_{k=1}^\infty$ являются равномерно сходящимися на R, т.е.
$$\lim_{k\to\infty} \|u_{0k} - u\|_{C_\omega^{n-1}} = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \mathcal{P}_k(t) = \mathcal{P}_0(t) \ \text{ равномерно на } \ R, \tag{2.22}$$

где $u \in C_\omega^{n-1}$, а $\mathcal{P}_0 : R \to R$ суть непрерывная функция. Поэтому из (2.17) и (2.20) вытекает, что
$$\|u\|_{C_\omega^{n-1}} = 1, \quad \mu(u) = 0; \tag{2.23}$$
$$\mathcal{P}_0(0) = 0, \ \ \mathcal{P}_0(t+\omega) = \mathcal{P}_0(\omega) + \mathcal{P}_0(t), \ \ 0 \le \mathcal{P}_0(t) - \mathcal{P}_0(\tau) \le \\ \le \int\limits_\tau^t p(s)\,ds \ \text{ при } \ t \in R, \ \tau \in \,]-\infty, t]\,. \tag{2.24}$$

Согласно условиям (2.24) функция $\mathcal{P}_0$ является абсолютно непрерывной и
$$\mathcal{P}_0(t) = \int\limits_0^t p_0(s)\,ds \ \ \text{ при } \ t \in R, \tag{2.25}$$

где функция $p_0 \in L_\omega$ либо тождественно равна нулю, либо удовлетворяет неравенствам (1.7).

В силу леммы 1.1 работы [15] и условий (2.22) и (2.25) имеем

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_0^t p_k(s)u_{0k}(s)\,ds = \int\limits_0^t p_0(s)u(s)\,ds \quad \text{при} \ \ t \in R.$$

Если наряду с этим учтем и условие (2.18), то из равенства

$$u_{0k}^{(2m-1)}(t) = u_{0k}^{(2m)}(0) + \int\limits_0^t [(-1)^m p_k(s)u_{0k}(s) + q_{1k}(s)]\,ds \quad \text{при} \ \ t \in R$$

получим

$$u^{(2m-1)}(t) = u^{(2m-1)}(0) + (-1)^m \int\limits_0^t p_0(s)u(s)\,ds \quad \text{при} \ \ t \in R.$$

Следовательно, u является ω-периодическим решением уравнения (1.8). Если p_0 удовлетворяет неравенствам (1.7), то в силу условия (1.9) уравнение (1.8) не имеет нетривиального ω-периодического решения. Поэтому остается рассмотреть случай, когда $p_0(t) \equiv 0$. В этом случае $u(t) \equiv const$, что противоречит условиям (2.23). Полученное противоречие доказывает лемму.

Наряду с (1.1) нам придется рассмотреть дифференциальное уравнение

$$u^{(n)} = (1-\lambda)a(t)u + \lambda[f(t,u) + f_0(t)], \tag{2.26}$$

зависящее от параметра $\lambda \in]0,1[$ и от функции $a \in L_\omega$. Имеет место следующая

Лемма 2.5. *Пусть существуют $a \in L_\omega$ и положительная постоянная ρ такие, что линейное однородное уравнение*

$$u^{(n)} = a(t)u \tag{2.27}$$

не имеет нетривиального ω-периодического решения и при каждом $\lambda \in]0,1[$ произвольное ω-периодическое решение u дифференциального уравнения (2.26) *допускает оценку*

$$\|u\|_{C_\omega^{n-1}} \le \rho. \tag{2.28}$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет хотя бы одно ω-периодическое решение.*

Доказательство. Если функция $u : [0,\omega] \to R$ является ω-периодическим решением уравнения (1.1) (уравнения (2.26)), удовлетворяющим краевым условиям

$$u^{(i-1)}(\omega) = u^{(i-1)}(0) \quad (i = 1,\dots,n), \tag{2.29}$$

то ввиду условий (1.2), ее ω-периодическое расширение на R является ω-периодическим решением этого уравнения. Поэтому для доказательства леммы достаточно установить, что задача (1.1), (2.29) имеет хотя бы одно решение.

Пусть $\lambda \in]0,1[$, а u – произвольное решение задачи (2.26), (2.29). Тогда, как об этом было сказано выше, ω-периодическое расширение u на R также является решением уравнения (2.26) и согласно одному из условий леммы справедлива оценка (2.28). Однако, в силу следствия 2 из работы [17], эта оценка и наличие у линейной однородной задачи (2.27), (2.29) только тривиального решения гарантирует разрешимость задачи (1.1), (2.29). Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Пусть существуют числа $\sigma \in \{-1,1\}$, $r \ge 0$ и функция $g \in L_\omega$ такие, что наряду с* (1.3) *и* (1.4) *выполнены неравенства*

$$\sigma a(t) \ge 0 \quad \text{при} \ \ t \in R, \quad a(t) \not\equiv 0. \tag{2.30}$$

Тогда при каждом $\lambda \in]0,1[$ *произвольное* ω*-периодическое решение уравнения* (2.26) *допускает оценку*

$$\mu(u) \le r. \tag{2.31}$$

Доказательство. Допустим противное, что $\mu(u) > r$. Тогда с учетом неравенств (1.3) и (2.30) из (2.26) найдем

$$\sigma_0 u^{(n)}(t) = (1-\lambda)\sigma a(t)|u(t)| + \lambda\left[\sigma f(t,u(t))\operatorname{sgn} u(t) + \sigma_0 f_0(t)\right] \ge \\ \ge r(1-\lambda)|a(t)| + \lambda\left(g(t) + \sigma_0 f_0(t)\right),$$

где $\sigma_0 = \sigma \operatorname{sgn} u(0)$. Если это неравенство проинтегрируем от 0 до ω, то в силу условия (1.4) получим

$$0 \ge r(1-\lambda)\int_0^\omega |a(t)|\,dt + \lambda\left[\int_0^\omega g(t)\,dt + \sigma_0\int_0^\omega f_0(t)\,dt\right] > 0.$$

Полученное противоречие доказывает справедливость оценки (2.31). Лемма доказана.

3 Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1.1. Пусть

$$a(t) = \sigma, \quad q_0(t,y) = y + |f_0(t)| + \max\{|f(t,x)| : \ |x| \le y\}, \\ q(t) = 2q_0(t,r) + 2|g(t)| \quad \text{при} \ \ t \in R, \ \ y \ge 0.$$

Тогда

$$a(t)|x| + |f(t,x) + f_0(t)| \le q_0(t,|x|) \quad \text{при} \ \ (t,x) \in R^2. \tag{3.1}$$

С другой стороны, в силу неравенства (1.3), имеем

$$\sigma\left[f(t,x) + f_0(t)\right]\operatorname{sgn} x = |\sigma\left[f(t,x) + f_0(t)\right]\operatorname{sgn} x + q_0(t,r) + |g(t)|\,| - q_0(t,r) - |g(t)| \ge \\ \ge |\sigma\left[f(t,x) + f_0(t)\right]\operatorname{sgn} x| - q(t) \quad \text{при} \ \ (t,x) \in R^2. \tag{3.2}$$

Согласно предложению 1.1 работы [11] уравнение (2.27) не имеет нетривиального ω-периодического решения, так как $\sigma a(t) \equiv 1$ и выполнено одно из условий (1.18) и (1.19). В силу этого факта и леммы 2.5 для доказательства теоремы достаточно установить, что при каждом $\lambda \in]0,1[$ произвольное ω-периодическое решение u дифференциального уравнения (2.26) допускает оценку (2.28), где ρ – не зависящая от λ и u положительная постоянная.

Согласно условиям (3.1) и (3.2) почти всюду на R соблюдаются неравенства

$$|u^{(n)}(t)| = |(1-\lambda)a(t)u(t) + \lambda\left[f(t,u(t)) + f_0(t)\right]| \le q_0(t,|u(t)|),$$
$$\sigma u^{(n)}(t)\operatorname{sgn} u(t) = (1-\lambda)|u(t)| + \lambda\sigma\left[f(t,u(t)) + f_0(t)\right]\operatorname{sgn} u(t) \ge \\ \ge (1-\lambda)|u(t)| + \lambda\,|\sigma\left[f(t,u(t)) + f_0(t)\right]\operatorname{sgn} u(t)| - \lambda q(t) \ge |u^{(n)}(t)\operatorname{sgn} u(t)| - q(t).$$

Следовательно, u является ω-периодическим решением системы дифференциальных неравенств (2.9), что по лемме 2.3 гарантирует справедливость оценки (2.11), где ρ_1 и ρ_2 – числа, заданные равенствами (2.12). С другой стороны, по лемме 2.6 функция u допускает оценку (2.31). Из оценок (2.11) и (2.31) вытекает оценка (2.28), где $\rho = \rho_1 r + \rho_2$ суть положительная постоянная, не зависящая от λ и u. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Из условий (1.2) и (1.5) вытекает условие (1.3), где g – функция, заданная равенством (1.6). Следовательно, выполнены все условия теоремы 1.1, что гарантирует существование хотя бы одного ω-периодического решения уравнения (1.1). Нам остается доказать, что если u_1 и u_2 являются произвольными ω-периодическими решениями уравнения (1.1) и $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$, то $u(t) \equiv 0$. Допустим противное, что $u(t) \not\equiv 0$. Тогда, согласно условию (1.5), почти всюду на R соблюдается неравенство

$$\sigma u^{(n)}(t)u(t) \geq \ell_0(t),$$

где $\ell_0(t) = \ell(t)h(u_1(t), u_2(t))|u(t)| \geq 0$ при $t \in R$ и $\ell_0(t) \not\equiv 0$. Если обе части этого неравенства проинтегрируем от 0 до ω и учтем, что выполнено одно из условий (1.18) и (1.19), то получим

$$-(n+1-2m)\int\limits_0^\omega |u^{(m)}(t)|^2 dt \geq \int\limits_0^\omega \ell_0(t)\,dt > 0.$$

Но это невозможно, ибо $n \geq 2m-1$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство теоремы 1.3 Согласно условию (1.10) без ограничения общности можем считать, что

$$|f_0(t)| - q(t) \leq (-1)^m f(t,x)\operatorname{sgn} x \leq p(t)|x| + q(t) - |f_0(t)| \quad \text{при} \;\; (t,x) \in R^2. \tag{3.3}$$

Пусть ρ_0 – число, фигурирующее в лемме 2.4, $\rho = \rho_0(r + \|q\|_{L_\omega})$,

$$a(t) = (-1)^m p(t), \tag{3.4}$$

а u суть ω-периодическое решение уравнения (2.26) при некотором $\lambda \in]0,1[$. В силу условия (1.9) и леммы 2.5 для доказательства теоремы достаточно установить, что u допускает оценку (2.28).

С учетом условий (3.3) и (3.4) из (2.26) заключаем, что u является ω-периодическим решением дифференциального неравенства (2.10). Поэтому оно допускает оценку (2.14). С другой стороны, по лемме 2.6 справедлива и оценка (2.31). Однако, из оценок (2.14) и (2.31) вытекает оценка (2.28). Теорема доказана.

Доказательство следствия 1.1. Из неравенства (1.10) следует, что $p(t) \geq 0$ при $t \in R$. Не ограничивая общности можем считать, что $p(t) \not\equiv 0$. По лемме 2.2 в этом случае выполнено и условие (1.9), так как p и m удовлетворяют одному из условий (1.11), (1.12) и (1.13). Если теперь применить теорему 1.3, то справедливость следствия 1.1 станет очевидной.

Доказательство теоремы 1.4. Из условий (1.2) и (1.14) вытекает условие (1.10), где g – функция, заданная равенством (1.6). Следовательно, выполнены все условия теоремы 1.3, что гарантирует существование ω-периодического решения уравнения (1.1).

Нам остается доказать единственность. Допустим противное. Тогда найдутся ω-периодические решения u_1 и u_2 уравнения (1.1) такие, что $u(t) = u_1(t) - u_2(t) \not\equiv 0$. Согласно условию (1.14) функция u является решением дифференциального неравенства

$$0 \leq (-1)^m u(t)\operatorname{sgn} u(t) \leq p(t)|u(t)|.$$

Отсюда в силу леммы 2.4 и условия (1.9) вытекает, что

$$0 < \|u\|_{C_\omega^{n-1}} \leq \rho_0 \mu(u),$$

где $\rho_0 = const > 0$. Следовательно, $\mu(u) > 0$. Если наряду с этим учтем и условие (1.14), то станет ясным, что почти всюду на R соблюдается неравенство

$$\sigma_0 u^{(n)}(t) \geq \ell_0(t),$$

где $\sigma_0 = (-1)^m \operatorname{sgn} u(0)$, $\ell_0(t) = \ell(t)\eta(u_1(t), u_2(t)) \geq 0$ при $t \in R$ и $\ell_0(t) \not\equiv 0$. Интегрирование этого неравенства от 0 до ω дает

$$0 = \sigma_0\left(u^{(n-1)}(\omega) - u^{(n-1)}(0)\right) \geq \int\limits_0^\omega \ell_0(t)\,dt > 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

В силу леммы 2.2 из теоремы 1.4 вытекает следствие 1.2.

Работа поддержана Национальным научным фондом Грузии (проект GNSF/ST06/3-002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lasota A., Opial Z.* // Ann. Polon. Math. 1964. V. 16, No. 1. P. 69–94.
2. *Fučik S., Mawhin J.* // Čas. Řest. Mat. 1975. V. 100, No. 2. P. 276–283.
3. *Кипнис Л.А.* // Прикладная мат. и мех. 1977. Т. 41, No. 2. С. 362–365.
4. *Gaianes R.E., Mawhin J.L.* Concidence Degree and Nonlinear Differential Equations. Berlin–Heidelberg–New York. Springer Verlag. 1977.
5. *Bates F.W., Ward Y.R.* // Pacific J. Math. 1979. V. 84, No. 2. P. 275–282.
6. *Fučik S., Kufner A.* Nonlinear Differential Equations. Amsterdam–Oxford–New York. Elsevier Scientific Publishing Company. 1980.
7. *Omari P., Zanolin F.* // Nonlinear Anal. Theory, Methods & Appl. 1984. V. 8, No. 7. P. 723–748.
8. *Гегелиа Г.Т.* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, No. 3. С. 390–396.
9. *Gegelia G.T.* // Colloq. Math. Soc. János. Bolyai. 53. Qual. Th. Diff. Eq. Szeged. 1986. P. 211-217.
10. *Трубников Ю.В., Перов А.И.* Дифференц. уравнения с монотонными нелинейностями. Минск. Наука и Техника. 1986.
11. *Кигурадзе И.Т., Кусано Т.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, No. 1. С. 71–77.
12. *Kiguradze I.* // Nonlinear Anal. 2000. V. 40, No. 1-8. P. 309–321.
13. *Кигурадзе И.Т., Кусано Т.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, No. 10. С. 1436–1442.
14. *Kiguradze I., Kusano T.* // Ann. Mat. Pura Appl. 2001. V. 180, No. 3. P. 285–301.
15. *Кигурадзе И.* // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. 1987. Т. 30. С. 3–103.
16. *Харди Г.Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г.* Неравенства. Москва. ИЛ. 1948.
17. *Kiguradze I., Puža B.* // Mem. Differential Equations Math. Phys. 1997. V. 12. P. 106–113.

Математический институт им. А. Размадзе
Г. Тбилиси

Поступило в редакцию