ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 6, 747–755

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.4

О НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2004 г. И. Т. Кигурадзе, С. В. Мухигулашвили

§ 1. Формулировка основных результатов

1.1. Постановка задач. Предлагаемая статья посвящена исследованию краевой задачи

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(t, u_1, u_2) \ \ (i = 1, 2), \tag{1.1}$$

$$\varphi_i\big(u_1(a), u_2(a), u_1(b), u_2(b)\big) = 0 \ \ (i = 1, 2), \tag{1.2}$$

где $f_i : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ – функции, удовлетворяющие локальным условиям Каратеодори, а $\varphi_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ суть непрерывные функции, удовлетворяющие в пространстве $\mathbb{R}^4$ одному из двух неравенств

$$\big(\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) - x_1\big)x_2 - \big(\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) - x_3\big)x_4 \le \gamma; \tag{1.3}$$

$$\big(\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) - x_1\big)x_2 - \big(\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) - x_4\big)x_3 \le \gamma, \tag{1.4}$$

где $\gamma = \text{const} \ge 0$.

Отдельно рассмотрен случай, когда $f_i(t, x_1, x_2) \equiv f_i(t, x_{3-i})$ $(i = 1, 2)$ и либо $\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - \mu x_4 + \psi_1(x_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv x_3 - \mu x_2 - \psi_2(x_4)$, либо $\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - \mu x_3 + \psi_1(x_2)$ и $\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv x_4 - \mu x_2 - \psi_2(x_3)$, т.е. случай, когда система (1.1) имеет вид

$$\frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_2), \quad \frac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1), \tag{1.5}$$

а краевые условия (1.2) – один из следующих двух видов

$$u_1(a) = \mu u_2(b) - \psi_1(u_2(a)), \quad u_1(b) = \mu u_2(a) + \psi_2(u_2(b)); \tag{1.2$_1$}$$

$$u_1(a) = \mu u_1(b) - \psi_1(u_2(a)), \quad u_2(b) = \mu u_2(a) + \psi_2(u_1(b)), \tag{1.2$_2$}$$

где μ – произвольное вещественное число, а $\psi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ – непрерывные функции такие, что

$$x\psi_1(x) + y\psi_2(y) \le \gamma \ \text{ при } \ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{1.6}$$

В рассматриваемый нами класс краевых условий входят, например, хорошо известные двухточечные, периодическая и антипериодическая краевые условия

$$u_1(a) = 0, \quad u_1(b) = 0; \tag{1.2$_3$}$$

$$u_1(a) = 0, \quad u_2(b) = 0; \tag{1.2$_4$}$$

$$u_1(a) = u_1(b), \quad u_2(a) = u_2(b); \tag{1.2$_5$}$$

$$u_1(a) = -u_1(b), \quad u_2(a) = -u_2(b). \tag{1.2$_6$}$$

Краевым задачам вида (1.1), (1.2) (в частности, задачам (1.1), (1.2_k) $(k = 1, \dots, 6)$) посвящена обширная литература (см., напр., [1]–[17] и приведённую там библиографию). Тем не менее, в случае, когда правые части системы (1.1) являются быстро растущими по фазовым переменным функциями, упомянутые задачи остаются пока ещё мало изученными. Приведённые ниже результаты относятся именно к этому случаю.

1.2. Задача (1.1), (1.2). На протяжении всей статьи мы будем пользоваться следующими обозначениями. $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$; $M([a,b]\times\mathbb{R}_+)$ – множество суммируемых по первому аргументу и непрерывных и неубывающих по второму аргументу функций $\omega : [a,b]\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ таких, что $\omega(t,0)\equiv 0$; $D_0(x_0) = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : \ x_1x_3 > 0, \ |x_1|\geq x_0, \ |x_3|\geq x_0\}$; $D(x_0) = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : \ |x_1|+|x_4|\geq x_0, \ x_1x_3>0\}\cup\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : \ |x_1|+|x_4|\geq x_0, \ x_2x_4>0\}$. Если $u_{i0} : [a,b]\to\mathbb{R}$ $(i=1,2)$ – непрерывные функции, то под $U_r(u_{10},u_{20})$ понимается множество непрерывных векторных функций $(u_1,u_2) : [a,b]\to\mathbb{R}$ таких, что $|u_1(t)-u_{10}(t)|+|u_2(t)-u_{20}(t)|<r$ при $a\leq t\leq b$.

Наряду с задачей (1.1), (1.2) рассмотрим возмущённую задачу

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(t,u_1,u_2)+\eta_i(t,u_1,u_2) \ \ (i=1,2), \tag{1.7}$$

$$\varphi_i\bigl(u_1(a),u_2(a),u_1(b),u_2(b)\bigr)+\zeta_i\bigl(u_1(a),u_2(a),u_1(b),u_2(b)\bigr)=0 \ \ (i=1,2), \tag{1.8}$$

и следуя [4] введём

Определение 1.1. Задача (1.1), (1.2) называется **корректной**, если она имеет единственное решение (u_{10},u_{20}) и для любых чисел $r>0$, $\varepsilon\in]0,r[$ и функции $\omega\in M([a,b]\times\mathbb{R}_+)$ найдется положительное число δ такое, что каковы бы ни были функции из класса Каратеодори $\eta_i : [a,b]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $(i=1,2)$ и непрерывные функции $\zeta_i : \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ $(i=1,2)$, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{k=1}^{2}\Bigl|\int_a^t \eta_k(s,x_1,x_2)\,ds\Bigr|\leq\delta, \quad \sum_{k=1}^{2}\bigl|\eta_k(t,x_1,x_2)-\eta_k(t,y_1,y_2)\bigr|\leq\omega\bigl(t,|x_1-y_1|+|x_2-y_2|\bigr)$$

$$\text{при } \ a\leq t\leq b, \ \ \sum_{k=1}^{2}\bigl|x_k-u_{k0}(t)\bigr|\leq r, \quad \sum_{k=1}^{2}\bigl|y_k-u_{k0}(t)\bigr|\leq r,$$

$$\sum_{k=1}^{2}\bigl|\zeta_k(x_1,x_2,x_3,x_4)\bigr|\leq\delta \ \text{ при } \ \sum_{k=1}^{2}\bigl(|x_k-u_{k0}(a)|+|x_{2+k}-u_{k0}(b)|\bigr)\leq r,$$

задача (1.1), (1.2) имеет хотя бы одно решение $(u_1,u_2)\in U_r(u_{10},u_{20})$ и каждое такое решение удовлетворяет неравенству $\sum\limits_{k=1}^{2}|u_k(t)-u_{k0}(t)|<\varepsilon$ при $a\leq t\leq b$.

Теорема 1.1. *Пусть φ_1 и φ_2 удовлетворяют либо условию (1.3), либо условию (1.4), где $\gamma=\mathrm{const}\geq 0$. Пусть, кроме того, существуют $h_i\in M([a,b]\times\mathbb{R}_+)$ $(i=1,2)$, суммируемые функции $h_{0i} : [a,b]\to\mathbb{R}_+$ $(i=1,2)$, $h : [a,b]\to\mathbb{R}_+$ и постоянные $\ell\geq 0$, $\delta>0$ и $x_0>0$ такие, что*

$$f_i(t,x_1,x_2)x_{3-i}\geq h_i\bigl(t,|x_{3-i}|\bigr)-h_{0i}(t) \ \ \textit{при} \ \ a\leq t\leq b, \ \ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \ \ (i=1,2), \tag{1.9}$$

$$|f_i(t,x_1,x_2)|\leq\ell h_{3-i}\bigl(t,|x_i|\bigr)+h(t) \ \ \textit{при} \ \ a<t<b, \ \ x_i\in\mathbb{R}, \ \ |x_{3-i}|\leq\delta \ \ (i=1,2) \tag{1.10}$$

и выполнено одно из следующих трех условий

$$\int_a^b h_i(s,x_0)\,ds>\gamma+\int_a^b\bigl(h_{01}(s)+h_{02}(s)\bigr)\,ds \ \ (i=1,2); \tag{1.11}$$

$$\int_a^b h_1(s,x_0)\,ds>\gamma+\int_a^b\bigl(h_{01}(s)+h_{02}(s)\bigr)\,ds, \quad \sum_{k=1}^{2}\bigl|\varphi_k(x_1,x_2,x_3,x_4)\bigr|>0 \tag{1.12}$$

$$\textit{при} \ \ (x_1,x_2,x_3,x_4)\in D_0(x_0),$$

$$\sum_{k=1}^{2}\big|\varphi_k(x_1,x_2,x_3,x_4)\big|>0 \ \textit{при} \ (x_1,x_2,x_3,x_4)\in D(x_0). \tag{1.13}$$

Тогда задача (1.1), (1.2) разрешима.

Задачи (1.1), (1.2_1) и (1.1), (1.2_2) будем рассматривать в случае, когда вместо (1.12) и (1.13), соответственно, выполняются условия

$$\int_a^b h_1(s,x_0)\,ds>\gamma+\int_a^b\big(h_{01}(s)+h_{02}(s)\big)\,ds,\quad \mu=0,\quad |\psi_1(x)|\le x_0 \ \text{при} \ x\in\mathbb{R}; \tag{1.12_1}$$

$$\int_a^b h_1(s,x_0)\,ds>\gamma+\int_a^b\big(h_{01}(s)+h_{02}(s)\big)\,ds,\quad \mu\le 0,\quad |\psi_1(x)|\le x_0 \ \text{при} \ x\in\mathbb{R}; \tag{1.12_2}$$

$$\mu\le 0,\quad |\psi_1(x)|+|\psi_2(x)|\le x_0 \ \text{при} \ x\in\mathbb{R}. \tag{$1.13'$}$$

Из теоремы 1.1 непосредственно вытекает

Следствие 1.1. *Пусть существуют $h_i\in M([a,b]\times\mathbb{R}_+)$ $(i=1,2)$, суммируемые функции $h_{0i}:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ $(i=1,2)$, $h:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ и постоянные $\ell\ge 0$, $\gamma\ge 0$, $\delta>0$, $x_0>0$ такие, что наряду с условиями (1.6), (1.9) и (1.10) выполнено одно из условий (1.11) и (1.12_1) (одно из условий (1.11), (1.12_2) и $(1.13')$). Тогда задача (1.1), (1.2_1) (задача (1.1), (1.2_2)) разрешима.*

Пример 1.1. Пусть m – натуральное число, $p_0\in\mathbb{R}$, а $p:[a,b]\to]0,+\infty[$ – суммируемая функция. Тогда для дифференциальной системы

$$\frac{du_1}{dt}=(1+|u_2|)^{-2}u_2+p_0(1+|u_2|)^{-1},\quad \frac{du_2}{dt}=p(t)u_1^{2m-1} \tag{1.14}$$

выполнены условия (1.9) и (1.10), где $h_1(t,x)=(1+x)^{-2}x^2$, $h_2(t,x)=p(t)x^{2m}$, $h_{10}(t)=|p_0|$, $h_{20}(t)=0$, $\ell=0$, $\delta=1$ и $h(t)=1+|p_0|+p(t)$. Поэтому для выполнения неравенств (1.11) при $\gamma=0$ и некотором достаточно большом x_0 необходимо и достаточно, чтобы $|p_0|<1$. Отсюда в силу следствия 1.1 вытекает, что если $|p_0|<1$, то задачи (1.14), (1.2_3) и (1.14), (1.2_5) являются разрешимыми. С другой стороны, если $|p_0|\ge 1$, то первая компонента произвольного решения системы (1.14) является возрастающей функцией и, следовательно, задачи (1.14), (1.2_3) и (1.14), (1.2_5) не имеют решения.

Построенный пример показывает, что в теореме 1.1 и в ее следствии условия, наложенные на функции h_i и h_{i0} $(i=1,2)$, являются в определенном смысле оптимальными.

Теорема 1.2. *Если выполнены условия теоремы 1.1, то однозначная разрешимость задачи (1.1), (1.2) гарантирует ее корректность.*

1.3. Задачи (1.5), (1.2_1) и (1.5), (1.2_2). В случае, когда $f_i(t,x_1,x_2)\equiv f_i(t,x_{3-i})$ $(i=1,2)$, условие (1.9) принимает вид

$$f_i(t,x)x\ge h_i(t,|x|)-h_{0i}(t) \ \text{при} \ a\le t\le b,\ \ x\in\mathbb{R} \ \ (i=1,2). \tag{1.15}$$

Что же касается условия (1.10), оно автоматически выполнено при $\ell=0$, $\delta=1$ и $h(t)=\max\{|f_1(t,x)|+|f_2(t,x)|:\ |x|\le 1\}$. Поэтому из следствия 1.1 и теоремы 1.2 вытекает

Теорема 1.3. *Пусть существуют $h_i\in M([a,b]\times\mathbb{R}_+)$ $(i=1,2)$, суммируемые функции $h_{0i}:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ $(i=1,2)$, $h:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ и постоянные $\gamma\ge 0$, $x_0>0$ такие, что наряду с условиями (1.6) и (1.15) выполнено одно из условий (1.11) и (1.12_1) (одно из условий (1.11), (1.12_2) и $(1.13')$). Пусть, кроме того, f_i $(i=1,2)$ являются возрастающими по второму аргументу функциями, а ψ_i $(i=1,2)$ – невозрастающими функциями. Тогда задача (1.5), (1.2_1) (задача (1.5), (1.2_2)) корректна.*

Частным случаем системы (1.5) является система Эмдена–Фаулера

$$\frac{du_i}{dt}=\sum_{k=1}^{m_i}p_{ik}(t)|u_{3-i}|^{\lambda_{ik}}\operatorname{sgn}u_{3-i}+q_i(t) \ \ (i=1,2), \tag{1.16}$$

где $\lambda_{ik} = \mathrm{const} > 0$, а p_{ik} и $q_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(i = 1,2;\ k = 1,\dots,m_i)$ – суть суммируемые функции.

Следствие 1.3. *Пусть*

$$p_{ik}(t) \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij}(t) > 0 \ \text{ при } \ a \leq t \leq b \ \ (i = 1,2; \ \ k = 1,\dots,m_i), \tag{1.17}$$

$$\int_a^b \Big[\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik}(s)\Big]^{-1/\lambda_i} |q_i(s)|^{1+1/\lambda_i}\, ds < +\infty \ \ (i = 1,2), \tag{1.18}$$

где $\lambda_i = \min\{\lambda_{ik} :\ k = 1,\dots,m_i\}$. *Пусть, кроме того,* ψ_1 *и* ψ_2 *являются неубывающими функциями, удовлетворяющими условию (1.6),* $\gamma = \mathrm{const} \geq 0$. *Тогда задачи (1.16), (1.2_1) и (1.16), (1.2_2) корректны.*

Из следствия 1.3, в частности, вытекает, что если выполнены условия (1.17) и (1.18), то задачи (1.16), (1.2_k) $(k = 3,4,5,6)$ являются корректными.

§ 2. Вспомогательные предложения

2.1. Леммы об априорных оценках. Пусть δ – положительная постоянная, $\ell \geq 0$,

$$\nu_\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \ x > \delta \\ 1 & \text{при } \ 0 \leq x \leq \delta \end{cases},$$

$\widetilde{h}_i \in M([a,b] \times \mathbb{R}_+)$ $(i = 1,2)$, а $h_{0i} : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ $(i = 1,2)$ и $\widetilde{h} : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ – суммируемые функции. Рассмотрим систему дифференциальных неравенств

$$u_i'(t) u_{3-i}(t) \geq \widetilde{h}_i\big(t, |u_{3-i}(t)|\big) - h_{0i}(t) \ \ (i = 1,2), \tag{2.1}$$

$$|u_i'(t)| \nu_\delta\big(|u_{3-i}(t)|\big) \leq \ell \widetilde{h}_{3-i}\big(t, |u_i(t)|\big) + \widetilde{h}(t) \ \ (i = 1,2). \tag{2.2}$$

Под решением этой системы будем понимать векторную функцию (u_1, u_2) с абсолютно непрерывными компонентами $u_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$, которая почти всюду на $[a,b]$ удовлетворяет дифференциальным неравенствам (2.1) и (2.2).

Лемма 2.1. *Пусть* γ *и* x_0 *– некоторые неотрицательные постоянные. Тогда произвольное решение* (u_1, u_2) *системы (2.1), (2.2), удовлетворяющее условиям*

$$u_1(b) u_2(b) - u_1(a) u_2(a) \leq \gamma, \tag{2.3}$$

$$\min\big\{|u_i(t)| :\ a \leq t \leq b\big\} \leq x_0 \ \ (i = 1,2), \tag{2.4}$$

допускает оценки

$$|u_i(t)| \leq \rho \ \text{ при } \ a \leq t \leq b \ \ (i = 1,2), \tag{2.5}$$

где

$$\rho = x_0 + (\ell + 1/\delta)\gamma + (\ell + 2/\delta) \int_a^b \big(h_{01}(s) + h_{02}(s)\big)\, ds + \int_a^b \widetilde{h}(s)\, ds. \tag{2.6}$$

Доказательство. Согласно неравенств (2.1) и (2.3), имеем

$$u_i'(t) u_{3-i}(t) = \big|u_i'(t) u_{3-i}(t) + h_{0i}(t)\big| - h_{0i}(t) \geq \big|u_i'(t) u_{3-i}(t)\big| - 2h_{0i}(t) \ \ (i = 1,2),$$

$$\int_a^b \big[u_1'(s) u_2(s) + u_1(s) u_2'(s)\big]\, ds = u_1(b) u_2(b) - u_1(a) u_2(a) \leq \gamma.$$

Поэтому

$$\int_a^b \Big[\widetilde{h}_1\big(s,|u_2(s)|\big)+\widetilde{h}_2\big(s,|u_2(s)|\big)\Big]\,ds \le \gamma+\int_a^b \big(h_{01}(s)+h_{02}(s)\big)\,ds, \tag{2.7}$$

$$\int_a^b \Big[\big|u_1'(s)u_2(s)\big|+\big|u_1(s)u_2'(s)\big|\Big]\,ds \le \gamma+2\int_a^b \big(h_{01}(s)+h_{02}(s)\big)\,ds. \tag{2.8}$$

Пусть $I_k=\{t\in[a,b]:\ |u_{3-k}(t)|\le\delta\}$ $(k=1,2)$. Тогда с учетом условия (2.4) найдем

$$|u_i(t)|\le x_0+\int_a^b |u_i'(s)|\,ds\le$$

$$\le x_0+\int_{I_i}|u_i'(s)|\,ds+\frac{1}{\delta}\int_{[a,b]\setminus I_i}\big|u_i'(s)u_{3-i}(s)\big|\,ds \ \text{ при } \ a\le t\le b \ \ (i=1,2).$$

С другой стороны, в силу неравенств (2.2) имеем

$$\int_{I_i}|u_i'(s)|\,ds\le\int_{I_i}\big[\ell\widetilde{h}_{3-i}\big(s,|u_i(s)|\big)+\widetilde{h}(s)\big]\,ds\le\int_a^b\big[\ell\widetilde{h}_{3-i}\big(s,|u_i(s)|\big)+\widetilde{h}(s)\big]\,ds \ \ (i=1,2).$$

Если теперь применим условия (2.7) и (2.8), то станет ясной справедливость оценок (2.5), где ρ – число, заданное равенством (2.6). Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть существуют числа $\gamma\ge0$ и $x_0>0$ такие, что*

$$\int_a^b \widetilde{h}_1(s,x_0)\,ds>\gamma+\int_a^b\big(h_{01}(s)+h_{02}(s)\big)\,ds. \tag{2.9}$$

Тогда произвольное решение (u_1,u_2) системы (2.1), (2.2), удовлетворяющее наряду с условием (2.3) и неравенству

$$\min\big\{|u_1(t)|:\ a\le t\le b\big\}\le x_0, \tag{2.10}$$

допускает оценки (2.5), где ρ – число, заданное равенством (2.6).

Доказательство. Пусть (u_1,u_2) – произвольное решение системы (2.1), (2.2), удовлетворяющее условиям (2.3) и (2.10). Тогда, как это показано выше, выполнено неравенство (2.7). Если теперь положим $\mu_0=\min\{|u_2(t)|:\ a\le t\le b\}$, то из (2.7) найдем

$$\int_a^b \widetilde{h}_1(s,\mu_0)\,ds\le\gamma+2\int_a^b\big(h_{01}(s)+h_{02}(s)\big)\,ds.$$

Отсюда в силу условия (2.9) вытекает, что $\mu_0\le x_0$. Следовательно, выполнены неравенства (2.4). Если теперь применим лемму 2.1, то справедливость леммы 2.2 станет очевидной.

Аналогично доказывается

Лемма 2.3. *Пусть существуют числа $\gamma\ge0$ и $x_0>0$ такие, что*

$$\int_a^b \widetilde{h}_i(s,x_0)\,ds>\gamma+\int_a^b\big(h_{01}(s)+h_{02}(s)\big)\,ds \ \ (i=1,2). \tag{2.11}$$

Тогда произвольное решение (u_1, u_2) *системы (2.1), (2.2), удовлетворяющее условию (2.3), допускает оценки (2.5), где* ρ *– число, заданное равенством (2.6).*

2.2. Леммы о разрешимости и корректности задачи (1.1), (1.2). Для произвольного положительного числа r положим

$$\chi_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \ 0 \le x \le r \\ 2 - x/r & \text{при } \ r < x < 2r \ . \\ 0 & \text{при } \ x \ge 2r \end{cases} \tag{2.12}$$

Наряду с (1.1), (1.2) нам придется рассмотреть вспомогательные линейную и нелинейную задачи

$$u_i' = \sum_{k=1}^{2} p_{ik}(t) u_k \ \ (i = 1, 2), \tag{2.13}$$

$$\sum_{k=1}^{2} \big(\alpha_{ik} u_k(a) + \beta_{ik} u_k(b)\big) = 0 \ \ (i = 1, 2); \tag{2.14}$$

$$u_i' = \sum_{k=1}^{2} p_{ik}(t) u_k + q_{i\rho}(t, u_1, u_2) \ \ (i = 1, 2), \tag{2.15}$$

$$\sum_{k=1}^{2} \big(\alpha_{ik} u_k(a) + \beta_{ik} u_k(b)\big) = \Delta_{i\rho}\big(u_1(a), u_2(a), u_1(b), u_2(b)\big) \ \ (i = 1, 2), \tag{2.16}$$

где

$$q_{i\rho}(t, x_1, x_2) = \chi_{2\rho}\big(|x_1| + |x_2|\big)\Big[f_i(t, x_1, x_2) - \sum_{k=1}^{2} p_{ik}(t) x_k\Big] \ \ (i = 1, 2), \tag{2.17}$$

$$\Delta_{i\rho}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \chi_{4\rho}\Big(\sum_{k=1}^{4} |x_k|\Big)\Big[\sum_{k=1}^{2} \big(\alpha_{ik} x_k + \beta_{ik} x_{k+2}\big) - \varphi_i(x_1, x_2, x_3, x_4)\Big] \ \ (i = 1, 2). \tag{2.18}$$

Имеет место следующая

Лемма 2.4. *Пусть существуют суммируемые функции* $p_{ik} : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(i, k = 1, 2)$ *и постоянные* $\alpha_{ik} \in \mathbb{R}$, $\beta_{ik} \in \mathbb{R}$ $(i, k = 1, 2)$, $\rho \in]0, +\infty[$ *такие, что задача (2.13), (2.14) имеет только тривиальное решение и произвольное решение* (u_1, u_2) *задачи (2.15), (2.16) допускает оценки (2.5). Тогда задача (2.15), (2.16) разрешима и каждое ее решение является и решением задачи (1.1), (1.2).*

Доказательство. В силу обозначений (2.12), (2.17) и (2.18) ясно существование суммируемой функции $q_\rho^* : [a, b] \to]0, +\infty[$ и положительной постоянной Δ_ρ^* таких, что соответственно на множестве $[a, b] \times \mathbb{R}^2$ и в пространстве $\mathbb{R}^4$ соблюдаются неравенства

$$\big|q_{i\rho}(t, x_1, x_2)\big| \le q_\rho^*(t), \quad \big|\Delta_{i\rho}(x_1, x_2, x_3, x_4)\big| \le \Delta_\rho^* \ \ (i = 1, 2). \tag{2.19}$$

Согласно теореме Р. Конти [13] (см. также [4], следствие 2.1), условие (2.19) и однозначная разрешимость однородной задачи (2.13), (2.14) гарантируют разрешимость задачи (2.15), (2.16).

Пусть (u_1, u_2) – произвольное решение задачи (2.15), (2.16). Тогда по одному из условий леммы справедливы оценки (2.5) и, следовательно, $\chi_{2\rho}(|u_1(t)| + |u_2(t)|) \equiv 1$ и $\chi_{4\rho}(|u_1(a)| + |u_2(a)| + |u_1(b)| + |u_2(b)|) = 1$. Если наряду с этим учтем равенства (2.17) и (2.18), то станет ясным, что (u_1, u_2) является и решением задачи (1.1), (1.2). Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Пусть существуют суммируемые функции* $p_{ik} : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(i, k = 1, 2)$ *и постоянные* $\alpha_{ik} \in \mathbb{R}$, $\beta_{ik} \in \mathbb{R}$ $(i, k = 1, 2)$ *и* $\rho_0 > 0$ *такие, что задача (2.13), (2.14) имеет только тривиальное решение и при каждом* $\rho \ge \rho_0$ *произвольное решение* (u_1, u_2) *задачи (2.15), (2.16) допускает оценки (2.5). Тогда однозначная разрешимость задачи (1.1), (1.2) гарантирует ее корректность.*

Доказательство. Задача (1.1), (1.2) разрешима, так как выполнены все условия леммы 2.4. Наша цель – доказать, что если эта задача имеет единственное решение (u_{10}, u_{20}), то она является корректной.

По лемме 2.4, при каждом $\rho \geq \rho_0$ векторная функция (u_{10}, u_{20}) является и единственным решением задачи (2.15), (2.16). По определению 3.1 работы [4] это означает, что (u_{10}, u_{20}) является сильно изолированным решением задачи (1.1), (1.2) в произвольном радиусе. Отсюда в силу теоремы 3.1 упомянутой работы вытекает корректность задачи (1.1), (1.2). Лемма доказана.

§ 3. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1.1. Доказательство проведем лишь в случае, когда выполнено условие (1.3), ибо случай, когда выполнено условие (1.4), рассматривается аналогично. Кроме того, не ограничивая общности, будем считать, что $x_0 > 1$.

Допустим сперва, что функции h_i $(i = 1, 2)$ удовлетворяют условиям (1.11), и положим

$$p_i(t) = 1 + h_i(t, x_0) \ \ (i = 1, 2), \quad \widetilde{h}(t) = \big(p_1(t) + p_2(t)\big)\delta + h(t), \tag{3.1}$$

$$q_{i\rho}(t, x_1, x_2) = \chi_{2\rho}\big(|x_1| + |x_2|\big)\big[f_i(t, x_1, x_2) - p_i(t)x_{3-i}\big] \ \ (i = 1, 2), \tag{3.2}$$

$$\Delta_{i\rho}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \chi_{4\rho}\Big(\sum_{k=1}^{4}|x_k|\Big)\big[x_{2i-1} - \varphi_i(x_1, x_2, x_3, x_4)\big] \ \ (i = 1, 2), \tag{3.3}$$

где ρ и χ_r – число и функция, заданные равенствами (2.6) и (2.12). Тогда линейная однородная задача

$$\frac{du_i}{dt} = p_i(t)u_{3-i} \ \ (i = 1, 2), \quad u_1(a) = 0, \ \ u_1(b) = 0$$

имеет только тривиальное решение, ибо $p_i(t) > 0$ при $a \leq t \leq b$ $(i = 1, 2)$. В силу этого факта и леммы 2.4, для доказательства разрешимости задачи (1.1), (1.2) достаточно установить, что произвольное решение (u_1, u_2) задачи

$$\frac{du_i}{dt} = p_i(t)u_{3-i} + q_{i\rho}(t, u_1, u_2) \ \ (i = 1, 2), \tag{3.4}$$

$$u_1(a) = \Delta_{1\rho}\big(u_1(a), u_2(a), u_1(b), u_2(b)\big), \quad u_1(b) = \Delta_{2\rho}\big(u_1(a), u_2(a), u_1(b), u_2(b)\big) \tag{3.5}$$

допускает оценки (2.5).

Пусть $\lambda(t) = \chi_{2\rho}(|u_1(t)| + |u_2(t)|)$, $\lambda_0 = \chi_{4\rho}(|u_1(a)| + |u_2(a)| + |u_1(b)| + |u_2(b)|)$ и

$$\widetilde{h}_i(t, x) = (1 - \lambda(t))h_i(t, x_0)x + \lambda(t)h_i(t, x) \ \ (i = 1, 2). \tag{3.6}$$

С учетом равенств (3.2) и (3.3), из (3.4) и (3.5) находим

$$u_i'(t) = (1 - \lambda(t))p_i(t)u_{3-i}(t) + \lambda(t)f_i\big(t, u_1(t), u_2(t)\big) \ \ (i = 1, 2),$$
$$u_1(a) = \lambda_0\big(u_1(a) - \varphi_1\big(u_1(a), u_2(a), u_1(b), u_2(b)\big)\big), \ u_1(b) = \lambda_0\big(u_1(b) - \varphi_2\big(u_1(a), u_2(a), u_1(b), u_2(b)\big)\big).$$

Отсюда, в силу условий (1.3), (1.9), (1.10), (3.1) и (3.6) ясно, что векторная функция (u_1, u_2) является решением системы дифференциальных неравенств (2.1), (2.2), удовлетворяющим условию (2.3). С другой стороны, согласно обозначению (3.6), из неравенств (1.11) вытекают неравенства (2.11), ибо $x_0 > 1$. Таким образом, выполнены все условия леммы 2.3, что и гарантирует справедливость оценок (2.5). Тем самым, разрешимость задачи (1.1), (1.2) доказана.

Перейдем к рассмотрению случая, когда выполнено условие (1.12) или условие (1.13); при этом, не ограничивая общности, будем считать, что $x_0 > \delta$. Пусть $\widetilde{h}(t) = h(t)$, а ρ – число, заданное равенством (2.6). Положим $\zeta_\rho(x) = 0$ при $|x| \leq \rho$, $\zeta_\rho(x) = (|x| - \rho)\operatorname{sgn} x$ при $|x| > \rho$,

$$\widetilde{f}_i(t, x_1, x_2) = f_i(t, x_1, x_2) + \zeta_\rho(x_{3-i}), \quad \widetilde{h}_i(t, x) = h_i(t, x) + \zeta_\rho(x)x \ \ (i = 1, 2) \tag{3.7}$$

и рассмотрим дифференциальную систему

$$\frac{du_i}{dt} = \widetilde{f}_i(t, u_1, u_2) \ \ (i = 1, 2). \tag{3.8}$$

В силу условий (1.9) и (1.10), из (3.7) находим

$$\widetilde{f}_i(t, x_1, x_2)x_{3-i} \geq \widetilde{h}_i\big(t, |x_{3-i}|\big) - h_{0i}(t) \ \text{ при } \ a \leq t \leq b, \ \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ \ (i = 1, 2), \tag{3.9}$$

$$\big|\widetilde{f}_i(t, x_1, x_2)\big| \leq \ell\widetilde{h}_{3-i}\big(t, |x_i|\big) + \widetilde{h}(t) \ \text{ при } \ a \leq t \leq b, \ \ x_i \in \mathbb{R}, \ \ |x_{3-i}| \leq \delta \ \ (i = 1, 2). \tag{3.10}$$

С другой стороны, ясно, что

$$\int\limits_a^b \widetilde{h}_i(s, \widetilde{x}_0)\, ds > \gamma + \int\limits_a^b \big(h_{01}(s) + h_{02}(s)\big)\, ds \ \ (i = 1, 2), \tag{3.11}$$

где $\widetilde{x}_0 = \rho + 1 + (b-a)^{-1}\int\limits_a^b (h_{01}(s) + h_{02}(s))\, ds \ \ (i = 1, 2)$. Однако, согласно вышедоказанному, условия (1.3) и (3.9)–(3.11) гарантируют разрешимость задачи (3.8), (1.2).

Пусть (u_1, u_2) – произвольное решение задачи (3.8), (1.2). Тогда в силу условий (3.9) и (3.10), векторная функция (u_1, u_2) является и решением системы дифференциальных неравенств (2.1), (2.2), удовлетворяющим условию (2.3). С другой стороны, из условий (1.2) и (1.12) (из условий (1.2) и (1.13)) вытекают неравенства (2.9) и (2.10) (неравенства (2.4)). Следовательно, выполнены все условия леммы 2.2 (леммы 2.1), что гарантирует справедливость оценок (2.5). В силу этих оценок и обозначений (3.7) ясно, что (u_1, u_2) является и решением задачи (1.1), (1.2). Теорема доказана.

Теорема 1.2 доказывается аналогично теореме 1.1. Разница в доказательствах заключается лишь в том, что вместо леммы 2.4 применяется лемма 2.5.

Доказательство теоремы 1.3. Как было отмечено выше (см. пункт 1.3), если для задачи (1.5), (1.2_1) или для задачи (1.5), (1.2_2) выполнены условия теоремы 1.3, то для этой задачи выполнены и условия теоремы 1.1. В силу этого обстоятельства и теоремы 1.2, для доказательства теоремы 1.3 достаточно установить, что если f_i $(i = 1, 2)$ являются возрастающими по второму агрументу, а ψ_i $(i = 1, 2)$ – невозрастающими функциями, то как задача (1.5), (1.2_1), так и задача (1.5), (1.2_2) имеет не более одного решения.

Допустим противное, что задача (1.5), (1.2_1) (задача (1.5), (1.2_2)) имеет два различные решения (u_1, u_2) и (v_1, v_2). Положим $w_i(t) = u_i(t) - v_i(t)$ $(i = 1, 2)$. Тогда

$$\big(w_1(t)w_2(t)\big)' = \Delta(t), \quad w_1(b)w_2(b) - w_1(a)w_2(a) = \Delta_0, \tag{3.12}$$

где $\Delta(t) = (f_1(t, v_2(t) + w_2(t)) - f_1(t, v_2(t)))w_2(t) + (f_2(t, v_1(t) + w_1(t)) - f_2(t, v_1(t)))w_1(t)$ и

$$\Delta_0 = \Big(\psi_1\big(v_2(a) + w_2(a)\big) - \psi_1(v_2(a))\Big)w_2(a) + \Big(\psi_2\big(v_2(b) + w_2(b)\big) - \psi_2(v_2(b))\Big)w_2(b)$$

$$\bigg(\Delta_0 = \Big(\psi_1\big(v_2(a) + w_2(a)\big) - \psi_1(v_2(a))\Big)w_2(a) + \Big(\psi_2\big(v_1(b) + w_1(b)\big) - \psi_2(v_1(b))\Big)w_1(b)\bigg).$$

Кроме того, $\Delta(t) \geq 0$ при $a \leq t \leq b$, $\int\limits_a^b \Delta(t)\, dt > 0$ и $\Delta_0 \leq 0$. Поэтому из равенств (3.12) находим $0 \geq \Delta_0 = \int\limits_a^b \Delta(t)\, dt > 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство следствия 1.2. Система (1.16) получается из системы (1.5) в случае, когда

$$f_i(t, x) = \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik}(t)|x|^{\lambda_{ik}} \operatorname{sgn} x + q_i(t) \ \ (i = 1, 2). \tag{3.13}$$

Отсюда в силу условия (1.17) следует, что f_1 и f_2 являются возрастающими по второму аргументу функциями. С другой стороны, если положим $p_{0i}(t) = \sum\limits_{k=1}^{m_i} p_{ik}(t) \quad (i = 1, 2)$, то согласно неравенству Юнга и условиям (1.17) и (3.13) найдём

$$f_i(t,x)x \geq p_{0i}(t)|x|^{\lambda_i+1} - |q_i(t)|\,|x| \geq \frac{1}{2}\,p_{0i}(t)|x|^{\lambda_i+1} - (2p_{0i}(t))^{-1/\lambda_i}|q_i(t)|^{1+1/\lambda_i}$$
$$\text{при } a \leq t \leq b, \ \ |x| \geq 1 \ \ (i = 1, 2).$$

Следовательно, выполнены неравенства (1.15), где $h_i(t,x) = \frac{1}{2}\,p_{0i}(t)|x|^{\lambda_i+1}$, $h_{0i}(t) = |q_i(t)| + (2p_{0i}(t))^{-1/\lambda_i}|q_i(t)|^{1/\lambda_i} \quad (i = 1, 2)$, причём, ввиду условия (1.18), функции $h_{0i} \quad (i = 1, 2)$ являются суммируемыми. С другой стороны, в силу положительности $p_{0i} \quad (i = 1, 2)$ для некоторого достаточно большого x_0 будут выполнены неравенства (1.11). Если теперь применим теорему 1.3, то справедливость следствия 1.2 станет очевидной.

Работа поддержана грантом INTAS № 00136 и грантом INTAS YS 2001-2/80.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев Н.И., Клоков Ю.А.* Основы теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига, 1969.
2. *Кигурадзе И.Т.* // Тр. Тбилисск. ун-та. 1971. Т. 1(137)А. С. 77–87.
3. *Кигурадзе И.Т.* // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 996–1007.
4. *Кигурадзе И.Т.* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. 1987. Т. 30. С. 3–103.
5. *Кигурадзе И.Т., Лежава Н.Р.* // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 12. С. 2147–2161.
6. *Кигурадзе И.Т., Пужа Б.* // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 12. С. 2139–2148.
7. *Мильштейн Г.Н.* // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 12. С. 1628–1639.
8. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. Москва, 1966.
9. *Перов А.И.* // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144, № 3. С. 493–496.
10. *Пужа Б.* // Scr. Fac. sc. natur. UJEP brun. 1980. № 8. P. 411–426.
11. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва, 1970.
12. *Capietto A., Qian D., Zanolin F.* // Differential Equations Dynam. Systems. 1999. V. 7, № 1, P. 99–120.
13. *Conti R.* // Ann. Mat. Pura ed Appl. 1962. V. 57. P. 49–61.
14. *Gaines R.E., Mawhin J.L.* Coincidence degree and nonlinear differential equations. Berlin–Heidelberg–New York, 1977.
15. *Lomtatidze A.* // Georgian Math. J. 1994. V. 1, № 3. P. 303–314.
16. *Mawhin J.* // Continuation theorems and periodic solutions of ordinary differential equations, Dordrecht–Boston–London, 1995. P. 291–375.
17. *Zanolin F.* // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. 1996. V. 54, № 1. P. 1–23.

Математический институт им. А. Размадзе АН Грузии,
Г. Тбилиси

Поступило в редакцию

УДК 517.927.4

Кигурадзе И.Т., Мухигулашвили С.В. **О нелинейных краевых задачах для двумерных дифференциальных систем** // Дифференц. уравнения.

Установлены достаточные условия разрешимости и корректности краевой задачи

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(t, u_1, u_2) \;\; (i = 1, 2),$$
$$\varphi_i\big(u_1(a), u_2(a), u_1(b), u_2(b)\big) = 0 \;\; (i = 1, 2),$$

где $f_i : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \;\; (i = 1, 2)$ – функции, удовлетворяющие локальным условиям Каратеодори, а $\varphi_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \;\; (i = 1, 2)$ – непрерывные функции.

Библиогр. 17 назв.