ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2003, том 39, № 2, 198–209

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.21

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С СИНГУЛЯРНОСТЯМИ

© 2003 г. И. Т. Кигурадзе

1. Постановка задачи и основные обозначения. Пусть n_1 и n_2 – натуральные числа, $-\infty < a \le a_i < b_i \le b < +\infty$, $\mathcal{P}_{ik} \in L_{\rm loc}(]a,b[\,;\mathbb{R}^{n_i\times n_k})$, $q_i \in L_{\rm loc}(]a,b[\,;\mathbb{R}^{n_i})$, $c_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ $(i,k=1,2)$, а $\ell_i : C([a_1,b_1];\mathbb{R}^{n_1}) \times C([a_2,b_2];\mathbb{R}^{n_2}) \to \mathbb{R}^{n_i}$ $(i=1,2)$ – суть линейные ограниченные операторы. Рассмотрим задачу об отыскании решения линейной дифференциальной системы

$$dx_i/dt = \mathcal{P}_{i1}(t)x_1 + \mathcal{P}_{i2}(t)x_2 + q_i(t) \quad (i=1,2), \tag{1.1}$$

удовлетворяющего условиям

$$\ell_i(x_1,x_2) = c_i \quad (i=1,2). \tag{1.2}$$

Известно (см., например, [1–3]), что если $\mathcal{P}_{ik}\in L([a,b];\mathbb{R}^{n_i\times n_k})$, $q_i\in L([a,b];\mathbb{R}^{n_i})$ $(i,k=1,2)$, то задача (1.1), (1.2) является фредгольмовой, т.е. для ее однозначной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная задача

$$dx_i/dt = \mathcal{P}_{i1}(t)x_1 + \mathcal{P}_{i2}(t)x_2 \quad (i=1,2), \tag{1.1$_0$}$$

$$\ell_i(x_1,x_2) = 0 \quad (i=1,2) \tag{1.2$_0$}$$

имела только тривиальное решение. В случае, когда система (1.1) в точках a и b имеет неинтегрируемые сингулярности, т.е. $\mathcal{P}_{ik} \notin L([a,b];\mathbb{R}^{n_i\times n_k})$, $q_i \notin L([a,b];\mathbb{R}^{n_i})$ при некоторых $i,k \in \{1,2\}$, то вопрос о фредгольмовости задачи (1.1), (1.2) требует дополнительного исследования. В настоящей работе рассматривается именно этот случай.

Доказанная ниже теорема 2.1 содержит интегральные условия фредгольмовости задачи (1.1), (1.2). С помощью этой теоремы для дифференциальных систем

$$dx_1/dt = \mathcal{P}_{11}(t)x_1 + \mathcal{P}_{12}(t)x_2 + q_1(t), \quad dx_2/dt = \varepsilon\mathcal{P}_{21}(t)x_1 + \mathcal{P}_{22}(t)x_2 + q_2(t), \tag{1.3}$$

$$dx_1/dt = \mathcal{P}_{11}(t)x_1 + \varepsilon\mathcal{P}_{12}(t)x_2 + q_1(t), \quad dx_2/dt = \varepsilon\mathcal{P}_{21}(t)x_1 + \mathcal{P}_{22}(t)x_2 + q_2(t), \tag{1.4}$$

зависящих от малого параметра ε, установлены признаки существования единственного решения, удовлетворяющего краевым условиям (1.2). Полученные результаты конкретизированы для случая, когда краевые условия (1.2) имеют вид

$$\sum_{k=1}^{m}[A_{1ik}x_1(t_{1ik}) + A_{2ik}x_2(t_{2ik})] = c_i \quad (i=1,2), \tag{1.5}$$

где $A_{jik} \in \mathbb{R}^{n_i\times n_j}$ (см. п. 3). В пп. 4 и 5 опять на основе теоремы 2.1 найдены оптимальные признаки существования единственного решения системы (1.1), удовлетворяющего соответственно краевым условиям

$$x_1(a) = c_1, \quad x_i(b) = c_2, \tag{1.6$_i$}$$

где $i \in \{1,2\}$. Они обобщают и дополняют результаты из работ [4–16], касающихся аналогичных задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка и двумерных дифференциальных систем с сингулярностями.

На протяжении всей работы использованы следующие обозначения: $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$; $\mathbb{R}^n$ – пространство векторов-столбцов $x = (\xi_i)_1^n$ с компонентами $\xi_i \in \mathbb{R}$ $(i=\overline{1,n})$, $|x| = (|\xi_i|)_1^n$,

$\|x\| = \max\{|\xi_i| : i = \overline{1,n}\}$; $\mathbb{R}^{m\times n}$ – пространство $m\times n$-матриц $X = (\xi_{ik})_{1,1}^{m,n}$ с компонентами ξ_{ik} $(i = \overline{1,m};\ k = \overline{1,n})$, $|X| = (|\xi_{ik}|)_{1,1}^{m,n}$, $\|X\| = \max\{\sum_{k=1}^{n}|\xi_{ik}| : i = \overline{1,m}\}$; $\det(X)$ – детерминант матрицы $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$; X^{-1} – матрица, обратная к матрице X; $r(X)$ – спектральный радиус матрицы X; E_n – единичная $n\times n$-матрица; $L(I;\mathbb{R}^{m\times n})$ – пространство матричных функций $\mathcal{P} : I \to \mathbb{R}^{m\times n}$, компоненты которых интегрируемы по Лебегу на I; $L_{\mathrm{loc}}(I;\mathbb{R}^{m\times n})$ – пространство матричных функций $\mathcal{P} : I \to \mathbb{R}^{m\times n}$, компоненты которых интегрируемы по Лебегу на каждом компактном подпромежутке промежутка I; $L_{\mathrm{loc}}(I;\mathbb{R}^{m}) = L_{\mathrm{loc}}(I;\mathbb{R}^{m\times 1})$; $C([a,b];\mathbb{R}^m)$ – банахово пространство непрерывных векторных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ с нормой $\|x\|_C = \max\{\|x(t)\| : a \le t \le b\}$; $\widetilde{C}_{\mathrm{loc}}(I;\mathbb{R}^m)$ – пространство векторных функций $x : I \to \mathbb{R}^m$, компоненты которых абсолютно непрерывны на каждом компактном подпромежутке промежутка I.

Неравенства между векторами и матрицами будем понимать покомпонентно.

Векторная функция $(x_i)_1^2$, где $x_i \in \widetilde{C}_{\mathrm{loc}}(]a,b[;\mathbb{R}^{n_i})$ $(i = 1,2)$, называется решением системы (1.1), если она почти всюду на $]a,b[$ удовлетворяет этой системе. В случае существования правого (левого) предела компоненты x_i в точке a (в точке b) этот предел будем принимать за $x_i(a)$ (за $x_i(b)$) и, следовательно, x_i будем считать непрерывной в упомянутой точке.

Решение $(x_i)_1^2$ системы (1.1) называется решением задачи (1.1), (1.2), если x_1 непрерывна на $[a_1,b_1]$, x_2 – на $[a_2,b_2]$ и выполнены равенства (1.2).

При каждом $i \in \{1,2\}$ через X_i обозначим фундаментальную матрицу дифференциальной системы
$$dx/dt = \mathcal{P}_{ii}(t)x,$$
удовлетворяющую условию $X_i((a+b)/2) = E_{n_i}$.

Ясно, что посредством преобразования
$$x_i(t) = X_i(t)y_i(t) \quad (i = 1,2) \tag{1.7}$$
задачи (1.1), (1.2) и (1.1_0), (1.2_0) сводятся к задачам
$$dy_i/dt = \mathcal{P}_i(t)y_{3-i} + \widetilde{q}_i(t) \quad (i = 1,2), \tag{1.8}$$
$$\widetilde{\ell}_i(y_1,y_2) = c_i \quad (i = 1,2); \tag{1.9}$$
$$dy_i/dt = \mathcal{P}_i(t)y_{3-i} \quad (i = 1,2), \tag{1.8$_0$}$$
$$\widetilde{\ell}_i(y_1,y_2) = 0 \quad (i = 1,2), \tag{1.9$_0$}$$
где
$$\mathcal{P}_i(t) = X_i^{-1}(t)\mathcal{P}_{i\,3-i}(t)X_{3-i}(t), \quad \widetilde{q}_i(t) = X_i^{-1}(t)q_i(t) \quad (i = 1,2), \tag{1.10}$$
$$\widetilde{\ell}_i(y_1,y_2) = \ell_i(X_1y_1, X_2y_2) \quad (i = 1,2). \tag{1.11}$$

Задачу (1.1), (1.2) мы исследуем в двух случаях. В первом случае предполагается, что
$$\int_a^b \big(\|\mathcal{P}_{11}(t)\| + \|\mathcal{P}_1(t)\| + \|q_1(t)\|\big)\,dt < +\infty, \tag{1.12$_1$}$$
$$\int_a^b \bigg(\int_a^t \|\mathcal{P}_1(s)\|\,ds \int_t^b \|\mathcal{P}_1(s)\|\,ds\bigg)\big(\|\mathcal{P}_2(t)\| + \|\widetilde{q}_2(t)\|\big)\,dt < +\infty \tag{1.13$_1$}$$
и $a_1 = a$, $b_1 = b$, $a_2 = a_0 \in]a,b[$, $b_2 = b_0 \in]a_0,b[$, т.е.
$$\ell_i : C([a,b];\mathbb{R}^{n_1}) \times C([a_0,b_0];\mathbb{R}^{n_2}) \to \mathbb{R}^{n_i}\ (i = 1,2) \text{ – линейные ограниченные операторы;} \tag{1.14$_1$}$$

во втором случае –

$$\int\limits_a^{a_0}\big(\|\mathcal{P}_{11}(s)\|+\|\mathcal{P}_1(s)\|+\|q_1(s)\|\big)\,ds<+\infty,\quad \int\limits_{a_0}^{b}\big(\|\mathcal{P}_{22}(s)\|+\|\mathcal{P}_2(s)\|+\|q_2(s)\|\big)\,ds<+\infty, \tag{1.12_2}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_a^{a_0}\bigg(\int\limits_a^{t}\|\mathcal{P}_1(s)\|\,ds\bigg)\big(\|\mathcal{P}_2(t)\|+\|\widetilde{q}_2(t)\|\big)\,dt<+\infty,\\ \int\limits_{a_0}^{b}\bigg(\int\limits_t^{b}\|\mathcal{P}_2(s)\|\,ds\bigg)\big(\|\mathcal{P}_1(t)\|+\|\widetilde{q}_1(t)\|\big)\,dt<+\infty\end{gathered} \tag{1.13_2}$$

и $a_1=a,\ \ b_1=b_0\in\,]a,b[\,,\ \ a_2=a_0\in\,]a,b_0[\,,\ \ b_2=b,$ т.е.

$$\ell_i : C([a,b_0];\mathbb{R}^{n_1})\times C([a_0,b];\mathbb{R}^{n_2})\to\mathbb{R}^{n_i}\ \ (i=1,2) \text{ – линейные ограниченные операторы.} \tag{1.14_2}$$

Имеет место следующая

Лемма 1.1. *Пусть выполнены условия* (1.12_1) *и* (1.13_1) *(условия* (1.12_2) *и* (1.13_2), *где* $a_0\in\,]a,b[\,$ *). Тогда, какое бы ни было решение* $(x_i)_1^2$ *системы (1.1),* x_1 *непрерывна на* $[a,b]$ *(*x_1 *непрерывна на* $[a,b[\,$ *, а* x_2 *– на* $]a,b]$ *).*

Доказательство. Доказательство леммы мы проведем лишь в случае, когда выполнены условия (1.12_1) и (1.13_1) (в случае, когда выполнены условия (1.12_2) и (1.13_2), оно проводится аналогично). Тогда матричная функция X_1 является непрерывной и невырожденной на $[a,b]$.

Рассмотрим произвольные решения $(x_i)_1^2$ и $(y_i)_1^2$ системы (1.1) и (1.8), связанные равенствами (1.7). Согласно сказанному выше, x_1 является непрерывной на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда y_1 имеет правый и левый пределы соответственно в точках a и b. Следовательно, для доказательства леммы достаточно установить существование этих пределов.

Пусть $a_0\in\,]a,b[$ – произвольно фиксированная точка. Тогда

$$y_1(t)=y_{10}(t)+\int\limits_{a_0}^{t}\mathcal{P}_1(\tau)\bigg(\int\limits_{a_0}^{\tau}\mathcal{P}_2(s)y_1(s)\,ds\bigg)\,d\tau\quad\text{при}\quad a<t<b, \tag{1.15}$$

где $y_{10}(t)=y_1(a_0)+\int_{a_0}^{t}[\mathcal{P}_1(\tau)y_2(a_0)+\widetilde{q}_1(\tau)+q(\tau)]\,d\tau$ и $q(t)=\mathcal{P}_1(t)\int_{a_0}^{t}\widetilde{q}_2(\tau)\,d\tau$.

Для каждого $t\in\,]a,b[$ положим

$$\alpha(t)=\|\mathcal{P}_1(t)\|\,\bigg|\int\limits_{a_0}^{t}\|\mathcal{P}_2(s)\|\,ds\bigg|,\quad u(t)=\max\{\|y_1(s)\|:\ 0\le(s-a_0)\,\mathrm{sgn}(t-a_0)\le|t-a_0|\}.$$

Согласно условиям (1.12_1) и (1.13_1), имеем $\mathcal{P}_1\in L([a,b];\mathbb{R}^{n_1\times n_2})$,

$$\widetilde{q}_1\in L([a,b];\mathbb{R}^{n_1}), \tag{1.16}$$

$q\in L([a,b];\mathbb{R}^{n_1})$ и $\alpha\in L([a,b];\mathbb{R})$. Следовательно, $y_{10}\in C([a,b];\mathbb{R}^{n_1})$. С учетом этого факта из (1.15) находим, что $u(t)\le\|y_{10}\|_C+|\int_{a_0}^{t}\alpha(\tau)u(\tau)\,d\tau|$ при $a<t<b$. Отсюда по лемме Гроноулла вытекает, что $u(t)\le\rho_0$ при $a<t<b$, где $\rho_0=\|y_{10}\|_C\exp(\int_a^b\alpha(\tau)\,d\tau)$. Следовательно, $\|y_1(t)\|\le\rho_0$ при $a<t<b$. В силу ограниченности y_1 и суммируемости функции α из представления (1.15) следует, что y_1 имеет правый и левый пределы соответственно в точках a и b. Лемма доказана.

Из доказанной леммы вытекает, что если при некоторых $k\in\{1,2\}$, $a_0\in\,]a,b[$ и $b_0\in\,]a_0,b[$ выполнены условия (1.12_k)–(1.14_k), то операторы ℓ_i $(i=1,2)$ определены на множестве всех решений системы (1.1) и, следовательно, в этом случае постановка задачи (1.1), (1.2) представляется вполне естественной.

2. Фредгольмовость задачи (1.1), (1.2).

Теорема 2.1. *Пусть для некоторых* $k \in \{1,2\}$, $a_0 \in]a,b[$ *и* $b_0 \in]a_0,b[$ *выполнены условия* (1.12_k) – (1.14_k). *Тогда для однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.2) необходимо и достаточно, чтобы задача* (1.1_0), (1.2_0) *имела только тривиальное решение. С другой стороны, задача* (1.1_0), (1.2_0) *имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда задача* (1.8_0), (1.9_0) *имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Для определенности будем считать, что $k=1$, ибо случай, когда $k=2$, рассматривается аналогично.

В силу условий (1.12_1), (1.14_1) и равенств (1.10), (1.11) матричная функция X_1 непрерывна на $[a,b]$, $\widetilde{\ell}_i : C([a,b];\mathbb{R}^{n_1}) \times C([a_0,b_0];\mathbb{R}^{n_2}) \to R^{n_i}$ $(i=1,2)$ являются линейными ограниченными операторами и выполнено условие (1.16). Кроме того, согласно (1.7), задача (1.1), (1.2) эквивалентна задаче (1.8), (1.9), а задача (1.1_0), (1.2_0) – задаче (1.8_0), (1.9_0). Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить, что задача (1.8), (1.9) является однозначно разрешимой тогда и только тогда, когда задача (1.8_0), (1.9_0) имеет только тривиальное решение.

Положим $\gamma(t) = 1 + \big| \int_{a_0}^t (\|\mathcal{P}_2(s)\| + \|\widetilde{q}_2(s)\|)\, ds \big|$, $\gamma_0(t) = 1 + \|\mathcal{P}_1(t)\|\gamma(t)$. Тогда из (1.12_1) и (1.13_1) найдем $\int_a^b \gamma_0(t)\, dt < +\infty$. Поэтому функции ε и δ, заданные на $]a,b[$ равенствами $\varepsilon(t) = \big[\int_a^t \gamma_0(s)\, ds \int_t^b \gamma_0(s)\, ds \big]^{1/2}$, $\delta(t) = \gamma(t)/\varepsilon(t)$, удовлетворяют условиям

$$\lim_{t\to a} \varepsilon(t) = 0, \quad \lim_{t \to b} \varepsilon(t) = 0, \tag{2.1}$$

$$\int_a^b \|\mathcal{P}_1(t)\| \delta(t)\, dt < +\infty. \tag{2.2}$$

Пусть $C_\delta(]a,b[;\mathbb{R}^{n_2})$ – банахово пространство непрерывных и ограниченных с весом $1/\delta$ векторных функций $x :]a,b[\to \mathbb{R}^{n_2}$ с нормой $\|x\|_{C_\delta} = \sup\big\{ \|x(t)\|/\delta(t) : a < t < b \big\}$, а $\mathcal{B}$ – банахово пространство векторов $y = (y_i)_1^4$ с компонентами $y_1 \in C([a,b];\mathbb{R}^{n_1})$, $y_2 \in C_\delta(]a,b[;\mathbb{R}^{n_2})$, $y_3 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y_4 \in \mathbb{R}^{n_2}$ и нормой $\|y\|_{\mathcal{B}} = \|y_1\|_C + \|y_2\|_{C_\delta} + \|y_3\| + \|y_4\|$. Для произвольного $y = (y_i)_1^4 \in \mathcal{B}$ положим

$$h_1(y)(t) = y_3 + \int_{a_0}^t \mathcal{P}_1(s) y_2(s)\, ds, \quad h_2(y)(t) = y_4 + \int_{a_0}^t \mathcal{P}_2(s) y_1(s)\, ds,$$

$$h_3(y) = y_3 - \widetilde{\ell}_1(y_1,y_2), \quad h_4(y) = y_4 - \widetilde{\ell}_2(y_1,y_2), \quad h(y) = (h_i(y))_1^4$$

и в пространстве $\mathcal{B}$ рассмотрим операторное уравнение

$$y = h(y) + y_0, \tag{2.3}$$

где $y_0 = (y_{0i})_1^4$, $y_{01}(t) = \int_{a_0}^t \widetilde{q}_1(s)\, ds$, $y_{02}(t) = \int_{a_0}^t \widetilde{q}_2(s)\, ds$, $y_{03} = c_1$, $y_{04} = c_2$.

Пусть $y \in \mathcal{B}$ и $\|y\|_{\mathcal{B}} = 1$. Тогда в силу (1.16) и (2.2) будем иметь $\|h_1(y)\|_C \le 1 + \int_a^b \|\mathcal{P}_1(s)\| \delta(s)\, ds$, $\|h_1(y)(t) - h_1(y)(\tau)\| \le \int_\tau^t \|\mathcal{P}_1(s)\| \delta(s)\, ds$ при $a \le \tau \le t \le b$, $\|h_2(y)(t)\|/\delta(t) < \varepsilon(t)$, $\|h_2(y)(t) - h_2(y)(\tau)\| \le \int_\tau^t \|\mathcal{P}_2(s)\|\, ds$ при $a < \tau \le t < b$, $h(y) \in \mathcal{B}$ и $\|h(y)\|_{\mathcal{B}} \le \rho$, где ρ – не зависящая от y положительная постоянная. Если наряду с этим учтем условие (2.1) и применим лемму Арцела–Асколи, то компактность линейного оператора $h :\ \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ станет очевидной. С другой стороны, из определения y_0 и условия (1.16) следует, что $y_0 \in \mathcal{B}$.

Согласно альтернативе Фредгольма для операторных уравнений [17, гл. XIII, § 5, теорема 1], для однозначной разрешимости уравнения (2.3) необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное уравнение

$$y = h(y) \tag{2.3$_0$}$$

имело только тривиальное решение. Однако операторное уравнение (2.3) эквивалентно задаче (1.8), (1.9), ибо $y = (y_i)_1^4 \in \mathcal{B}$ является решением уравнения (2.3) тогда и только тогда, когда $(y_i)_1^2$ есть решение задачи (1.8), (1.9) и $y_3 = y_1(a_0)$, $y_4 = y_2(a_0)$. Аналогично уравнение (2.3_0) эквивалентно задаче (1.8_0), (1.9_0). Следовательно, для однозначной разрешимости задачи (1.8), (1.9) необходимо и достаточно, чтобы задача (1.8_0), (1.9_0) имела только тривиальное решение. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает

Следствие 2.1. *Пусть: либо $t_{1ik} \in [a,b]$, $t_{2ik} \in]a,b[$ $(i = 1,2;\ k = \overline{1,m})$ и выполнены условия (1.12_1), (1.13_1), либо $t_{1ik} \in [a,b[\,$, $t_{2ik} \in]a,b]$ $(i = 1,2;\ k = \overline{1,m})$ и для некоторого $a_0 \in]a,b[$ выполнены условия (1.12_2), (1.13_2). Тогда для однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.5) необходимо и достаточно, чтобы система (1.1_0) при краевых условиях*

$$\sum_{k=1}^{m}[A_{1ik}x_1(t_{1ik}) + A_{2ik}x_2(t_{2ik})] = 0 \quad (i = 1,2) \tag{2.4}$$

имела только тривиальное решение. С другой стороны, задача (1.1_0), (2.4) имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда система (1.8_0) при краевых условиях

$$\sum_{k=1}^{m}[A_{1ik}X_1(t_{1ik})y_1(t_{1ik}) + A_{2ik}X_2(t_{2ik})y_2(t_{2ik})] = 0 \quad (i = 1,2)$$

имеет только тривиальное решение.

3. Задачи (1.3), (1.2) и (1.4), (1.2). Введем матричную функцию

$$\mathcal{P}_0(t) = \int_a^t \mathcal{P}_1(\tau)\,d\tau \tag{3.1}$$

и рассмотрим системы линейных алгебраических уравнений

$$\widetilde{\ell}_i(c_1 + \mathcal{P}_0 c_2, c_2) = 0 \quad (i = 1,2) \tag{3.2}$$

и $\widetilde{\ell}_i(c_1, c_2) = 0$ $(i = 1,2)$. Детерминанты этих систем обозначим соответственно через Δ и Δ_0.

Теорема 3.1. *Пусть для некоторых $k \in \{1,2\}$, $a_0 \in]a,b[$ и $b_0 \in]a_0,b[$ выполнены условия (1.12_k)–(1.14_k) и $\Delta \neq 0$ $(\Delta_0 \neq 0)$. Тогда найдется не зависящее от q_i и c_i $(i = 1,2)$ положительное число ε_0 такое, что при каждом $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ задача (1.3), (1.2) (задача (1.4), (1.2)) имеет одно и только одно решение.*

Доказательство. Для определенности будем считать, что $k = 1$, и рассмотрим только задачу (1.3), (1.2), ибо задача (1.4), (1.2) исследуется аналогично. Согласно теореме 2.1, в рассматриваемом нами случае достаточно установить, что при малых ε однородная система $dy_1/dt = \mathcal{P}_1(t)y_2$, $dy_2/dt = \varepsilon\mathcal{P}_2(t)y_1$ не имеет нетривиального решения, удовлетворяющего краевым условиям (1.9_0). Допустим противное. Тогда найдется сходящаяся к нулю последовательность чисел $\varepsilon_k \in [-1,1]$ $(k = 1,2,\ldots)$ такая, что при каждом натуральном k система $dy_1/dt = \mathcal{P}_1(t)y_2$, $dy_2/dt = \varepsilon_k\mathcal{P}_2(t)y_1$ имеет решение $(y_{ik})_1^2$, удовлетворяющее краевым условиям (1.9_0) и равенству $\|y_{1k}(a_0)\| + \|y_{2k}(a_0)\| = 1$. Не ограничивая общности, последовательности $(y_{1k}(a_0))_1^{+\infty}$ и $(y_{2k}(a_0))_1^{+\infty}$ можем считать сходящимися. Положим

$$c_2 = \lim_{k\to+\infty} y_{2k}(a_0), \quad c_1 = \lim_{k\to+\infty} y_{1k}(a_0) - \mathcal{P}_0(a_0)c_2. \tag{3.3}$$

Тогда

$$\|c_1 + \mathcal{P}_0(a_0)c_2\| + \|c_2\| = 1. \tag{3.4}$$

Если наряду с условиями (1.12_1), (1.13_1) учтем равенство (3.3), то на основе способа, примененного при доказательстве леммы 1.1, покажем, что $\|y_{1k}(t)\| \leq \beta$ при $a \leq t \leq b$, где

$\beta = \left(1 + \int_a^b \|\mathcal{P}_1(t)\|\, dt\right) \exp\left(\int_a^b \alpha(t)\, dt\right)$, $\alpha(t) = \|\mathcal{P}_1(t)\| \left| \int_{a_0}^t \|\mathcal{P}_2(\tau)\|\, d\tau \right|$. Согласно этой оценке и равенствам (3.1), (3.3), (3.4), из представлений

$$y_{1k}(t) = y_{1k}(a_0) + \int_{a_0}^{t} \mathcal{P}_1(\tau) y_{2k}(\tau)\, d\tau, \quad y_{2k}(t) = y_{2k}(a_0) + \varepsilon_k \int_{a_0}^{t} \mathcal{P}_2(\tau) y_{1k}(\tau)\, d\tau$$

вытекает, что $\lim\limits_{k\to+\infty} y_{2k}(t) = c_2$ равномерно на каждом сегменте, содержащемся в $]a,b[$ и $\lim\limits_{k\to+\infty} y_{1k}(t) = c_1 + \mathcal{P}_0(t)c_2$ равномерно на $[a,b]$. Если теперь в равенствах $\widetilde{\ell}_i(y_{1k}, y_{2k}) = 0$ $(i=1,2)$ перейдем к пределу, когда $k \to +\infty$, то с учетом (1.14_1) убедимся, что $(c_i)_1^2$ является решением системы (3.2). Но это противоречит условию (3.4), так как система (3.2) имеет только тривиальное решение. Полученное противоречие доказывает теорему.

Пример 3.1. Рассмотрим дифференциальную систему

$$dx_1/dt = (t-a)^{-\alpha_1}(b-t)^{-\beta_1} A_1 x_2 + q_1(t), \quad dx_2/dt = \varepsilon (t-a)^{-\alpha_2}(b-t)^{-\beta_2} A_2 x_1 + q_2(t), \tag{3.5}$$

где $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(i=1,2)$, A_1 не вырождена, $\alpha_1 < 1$, $\beta_1 < 1$, $\alpha_2 < 2-\alpha_1$, $\beta_2 < 2-\beta_1$, $q_1 \in L([a,b];\mathbb{R}^n)$, $q_2 \in L_{\mathrm{loc}}(]a,b[\,;\mathbb{R}^n)$ и $\int_a^b (t-a)^{1-\alpha_1}(b-t)^{1-\alpha_2}\|q_2(t)\|\, dt < +\infty$ $(A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_{3-i}}$ $(i=1,2)$, $\alpha_1 < 1$, $\beta_1 < 2-\beta_2$, $\alpha_2 < 2-\alpha_1$, $\beta_2 < 1$, $q_1 \in L_{\mathrm{loc}}([a,b[\,;\mathbb{R}^{n_1})$, $q_2 \in L_{\mathrm{loc}}(]a,b];\mathbb{R}^{n_2})$, $\int_a^b (b-t)^{1-\beta_2}\|q_1(t)\|\, dt < +\infty$ и $\int_a^b (t-a)^{1-\alpha_1}\|q_2(t)\|\, dt < +\infty)$. Согласно теореме 3.1, найдется не зависящее от c_i и q_i $(i=1,2)$ положительное число ε_0 такое, что при произвольном $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ задача (3.5), (1.6_1) (задача (3.5), (1.6_2)) имеет одно и только одно решение. Следовательно, в условиях упомянутой теоремы коэффициенты системы (1.1) в точках a и b могут иметь сингулярности произвольного порядка.

4. Задача (1.1), (1.6_1). В случае, когда $n_1 = n_2$ и матрица $\int_a^b \mathcal{P}_1(\tau)\, d\tau$ не вырождена, положим

$$\mathcal{G}_1(t,s) = \begin{cases} \displaystyle\int_t^b \mathcal{P}_1(\tau)\, d\tau \left(\int_a^b \mathcal{P}_1(\tau)\, d\tau\right)^{-1} \int_a^s \mathcal{P}_1(\tau)\, d\tau & \text{при} \quad s \le t, \\ \displaystyle\int_a^t \mathcal{P}_1(\tau)\, d\tau \left(\int_a^b \mathcal{P}_1(\tau)\, d\tau\right)^{-1} \int_s^b \mathcal{P}_1(\tau)\, d\tau & \text{при} \quad s > t. \end{cases} \tag{4.1}$$

Теорема 4.1. *Пусть $n_1 = n_2$ и выполнены условия (1.12_1), (1.13_1). Если, кроме того, матрица $\int_a^b \mathcal{P}_1(\tau)\, d\tau$ не вырождена и существует матрица $A \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$ такая, что $r(A) < 1$ и*

$$\int_a^b |\mathcal{G}_1(t,s)|\, |\mathcal{P}_2(s)|\, ds \le A \quad \text{при} \quad a \le t \le b, \tag{4.2}$$

то задача (1.1), (1.6_1) имеет одно и только одно решение.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая очевидная

Лемма 4.1. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – неотрицательная матрица, а $\rho \in \mathbb{R}^n$ – неотрицательный вектор такие, что $r(A) < 1$ и*

$$\rho \le A\rho. \tag{4.3}$$

Тогда $\rho = 0$.

Лемма 4.2. *Пусть $n_1 = n_2$ и выполнены условия (1.12_1), (1.13_1). Если, кроме того, матрица $\int_a^b \mathcal{P}_1(\tau)\, d\tau$ не вырождена, то для однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.6_1) необходимо и достаточно, чтобы система линейных интегральных уравнений*

$$y_1(t) = -\int_a^b \mathcal{G}_1(t,\tau)\mathcal{P}_2(\tau) y_1(\tau)\, d\tau \tag{4.4}$$

в пространстве $C([a,b];\mathbb{R}^{n_1})$ имела только тривиальное решение.

Доказательство. Заметим прежде всего, что в силу условий (1.12_1), (1.13_1), в частности, имеем

$$\mathcal{P}_1 \in L([a,b];\mathbb{R}^{n_1}), \quad \int\limits_a^b \bigg(\int\limits_a^s \|\mathcal{P}_1(\tau)\|\,d\tau \int\limits_s^b \|\mathcal{P}_1(\tau)\|\,d\tau\bigg)\|\mathcal{P}_2(s)\|\,ds < +\infty. \tag{4.5}$$

Согласно следствию 2.1, для однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.6_1) необходимо и достаточно, чтобы система (1.8_0) при краевых условиях

$$y_1(a) = 0, \quad y_1(b) = 0 \tag{4.6}$$

имела только тривиальное решение.

Пусть $(y_i)_1^2$ – произвольное решение задачи (1.8_0), (4.6). Тогда в силу условия (4.5) и невырожденности матрицы $\int_a^b \mathcal{P}_1(s)\,ds$ векторная функция y_1 допускает представление (4.4), а y_2 – представление

$$y_2(t) = -\int\limits_a^b \mathcal{G}_2(t,s)\mathcal{P}_2(s)y_1(s)\,ds, \tag{4.7}$$

где

$$\mathcal{G}_2(t,s) = \begin{cases} -\bigg(\int\limits_a^b \mathcal{P}_1(\tau)\,d\tau\bigg)^{-1} \int\limits_a^s \mathcal{P}_1(\tau)\,d\tau & \text{при} \quad s \le t, \\ \bigg(\int\limits_a^b \mathcal{P}_1(\tau)\,d\tau\bigg)^{-1} \int\limits_s^b \mathcal{P}_1(\tau)\,d\tau & \text{при} \quad s > t. \end{cases} \tag{4.8}$$

Предположим теперь обратное, что $y_1 \in C([a,b];\mathbb{R}^{n_1})$ есть решение системы (4.4), а y_2 задана равенством (4.7). Тогда в силу условия (4.5) и равенств (4.1), (4.8) ясно, что $(y_i)_1^2$ есть решение задачи (1.8_0), (4.6). Таким образом, для того чтобы задача (1.8_0), (4.6) имела только тривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы система (4.4) в пространстве $C([a,b];\mathbb{R}^{n_1})$ имела только тривиальное решение. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.1. Пусть $y_1 = (y_{1i})_1^n \in C([a,b];\mathbb{R}^{n_1})$ – произвольное решение системы (4.4). Если положим $\rho_i = \max\{|y_{1i}(t)| : \ a \le t \le b\}$, $\rho = (\rho_i)_1^{n_1}$, то с учетом условия (4.2) из (4.4) получим неравенство (4.3). Однако из этого неравенства в силу леммы 4.1 и условия $r(A) < 1$ вытекает, что $\rho = 0$, т.е. $y_1(t) \equiv 0$. Если теперь применим лемму 4.2, то справедливость теоремы 4.1 станет очевидной.

Следствие 4.1. *Пусть $n_1 = n_2$ и выполнены условия (1.12_1), (1.13_1). Если, кроме того, матрица $\int_a^b \mathcal{P}_1(\tau)\,d\tau$ не вырождена,*

$$\int\limits_a^t \mathcal{P}_1(s)\,ds \int\limits_t^b \mathcal{P}_1(s)\,ds = \int\limits_t^b \mathcal{P}_1(s)\,ds \int\limits_a^t \mathcal{P}_1(s)\,ds \quad \textit{при} \quad a \le t \le b \tag{4.9}$$

и $r(A) < 1$, где

$$A = \bigg|\bigg(\int\limits_a^b \mathcal{P}_1(\tau)\,d\tau\bigg)^{-1}\bigg| \int\limits_a^b \bigg(\int\limits_a^s |\mathcal{P}_1(\tau)|\,d\tau \int\limits_s^b |\mathcal{P}_1(\tau)|\,d\tau\bigg)|\mathcal{P}_2(s)|\,ds, \tag{4.10}$$

то задача (1.1), (1.6_1) имеет одно и только одно решение.

Доказательство. В силу равенств (4.1) и (4.9) имеем

$$\mathcal{G}_1(t,s)=\begin{cases}\Big(\int\limits_a^b \mathcal{P}_1(\tau)\,d\tau\Big)^{-1}\int\limits_a^s \mathcal{P}_1(\tau)\,d\tau\int\limits_t^b \mathcal{P}_1(\tau)\,d\tau & \text{при}\quad s\le t,\\ \Big(\int\limits_a^b \mathcal{P}_1(\tau)\,d\tau\Big)^{-1}\int\limits_a^t \mathcal{P}_1(\tau)\,d\tau\int\limits_s^b \mathcal{P}_1(\tau)\,d\tau & \text{при}\quad s> t.\end{cases}$$

Поэтому $|\mathcal{G}_1(t,s)|\le\big|\big(\int_a^b\mathcal{P}_1(\tau)\,d\tau\big)^{-1}\big|\int_a^s|\mathcal{P}_1(\tau)|\,d\tau\int_s^b|\mathcal{P}_1(\tau)|\,d\tau$ и соблюдается неравенство (4.2), где A – матрица, заданная равенством (4.10). Следовательно, выполнены все условия теоремы 4.1, что и гарантирует однозначную разрешимость задачи (1.1), (1.6_1). Следствие доказано.

Теорема 4.2. *Пусть $n_1=n_2$ и выполнены условия (1.12_1), (1.13_1). Пусть, кроме того, матрица $\int_a^b\mathcal{P}_1(\tau)\,d\tau$ не вырождена и либо $\gamma<1$, где*

$$\gamma=\bigg\|\Big(\int\limits_a^b \mathcal{P}_1(\tau)\,d\tau\Big)^{-1}\bigg\|\int\limits_a^b\Big(\int\limits_a^s \|\mathcal{P}_1(\tau)\|\,d\tau\int\limits_s^b \|\mathcal{P}_1(\tau)\|\,d\tau\Big)\|\mathcal{P}_2(s)\|\,ds,$$

либо $\gamma\le 1$ и выполнено одно из следующих двух условий

$$\operatorname{mes}\big\{s\in\,]a,t[:\quad \|\mathcal{P}_i(s)\|>0\big\}>0\quad \textit{при}\quad a<t<b\quad (i=1,2),\tag{4.11}$$

$$\operatorname{mes}\big\{s\in\,]t,b[:\quad \|\mathcal{P}_i(s)\|>0\big\}>0\quad \textit{при}\quad a<t<b\quad (i=1,2).\tag{4.12}$$

Тогда задача (1.1), (1.6_1) имеет одно и только одно решение.

Доказательство. Пусть $y_1\in C([a,b];\mathbb{R}^{n_1})$ – произвольное решение системы (4.4) и $\rho_0=\max\{\|y_1(t)\|:\ a\le t\le b\}$. По лемме 4.2 для доказательства теоремы достаточно установить, что $\rho_0=0$. Допустим противное, что $\rho_0>0$. Тогда для некоторого достаточно малого $\delta>0$ соблюдается неравенство

$$\|y_1(t)\|<\rho_0\quad \text{при}\quad t\in[a,a+\delta]\cap[b-\delta,b].\tag{4.13}$$

С другой стороны, согласно (4.1), из (4.4) находим

$$\rho_0\le\bigg\|\Big(\int\limits_a^b \mathcal{P}_1(\tau)\,d\tau\Big)^{-1}\bigg\|\int\limits_a^b\Big(\int\limits_a^s \|\mathcal{P}_1(\tau)\|\,d\tau\int\limits_s^b \|\mathcal{P}_1(\tau)\|\,d\tau\Big)\|\mathcal{P}_2(s)\|\,\|y_1(s)\|\,ds.$$

Если $\gamma<1$ (если $\gamma\le1$ и выполнено одно из условий (4.11), (4.12)), то из последнего неравенства с учетом (4.13) находим $\rho_0<\rho_0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Пример 4.1. Пусть $n_1=n_2=1$, $a=0$, $b=1$, $\mathcal{P}_{11}(t)\equiv\mathcal{P}_{22}(t)\equiv0$,

$$\mathcal{P}_{12}(t)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad t\in[0,1/4]\cup[1/2,1],\\ 0 & \text{при}\quad t\in\,]1/4,1/2[,\end{cases}\qquad \mathcal{P}_{21}(t)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad t\in[0,1/4]\cup[1/2,1],\\ -24 & \text{при}\quad t\in\,]1/4,1/2[.\end{cases}$$

Тогда $\mathcal{P}_i(t)\equiv\mathcal{P}_{i\,3-i}(t)$ $(i=1,2)$, $\int_a^b\mathcal{P}_1(\tau)\,d\tau=3/4$, $\int_a^b\big(\int_a^s|\mathcal{P}_1(\tau)|\,d\tau\int_s^b|\mathcal{P}_1(\tau)|\,d\tau\big)|\mathcal{P}_2(s)|\,ds=\int_{1/4}^{1/2}3\,ds=3/4$ и, следовательно, $\gamma=1$. С другой стороны, система (1.1_0) при краевых условиях

$$x_1(a)=0,\quad x_1(b)=0\tag{4.14}$$

имеет нетривиальное решение $(x_i)_1^2$ с компонентами

$$x_1(t)=\begin{cases}4t & \text{при} \quad 0\le t\le 1/4,\\ 1 & \text{при} \quad 1/4<t<1/2,\\ 2(1-t) & \text{при} \quad 1/2\le t\le 1,\end{cases} \qquad x_2(t)=\begin{cases}4 & \text{при} \quad 0\le t\le 1/4,\\ 10-24t & \text{при} \quad 1/4<t<1/2,\\ -2 & \text{при} \quad 1/2\le t\le 1.\end{cases}$$

Этот пример показывает, что в следствии 4.1 условие $r(A)<1$ нельзя заменить условием $r(A)\le 1$. Кроме того, в случае, когда нарушены условия (4.11) и (4.12), в теореме 4.2 условие $\gamma<1$ нельзя заменить условием $\gamma\le 1$.

Пример 4.2. Пусть $n_1=n_2=1$, $a=0$, $b=2$, $\mathcal{P}_{11}(t)\equiv\mathcal{P}_{22}(t)\equiv 0$, $\mathcal{P}_{12}(t)\equiv 1$, $\mathcal{P}_{21}(t)=-[(2/\varepsilon+1)t^{2/\varepsilon-2}-t^{4/\varepsilon-2}]$ при $0\le t\le 1$ и $\mathcal{P}_{21}(t)=\mathcal{P}_{21}(2-t)$ при $1<t\le 2$. Тогда $\mathcal{P}_i(t)=\mathcal{P}_{i\,3-i}(t)$ $(i=1,2)$ и $\gamma=\big(\int_a^b\mathcal{P}_1(\tau)\,d\tau\big)^{-1}\int_a^b\big(\int_a^t\mathcal{P}_1(\tau)\,d\tau\int_t^b\mathcal{P}_1(\tau)\,d\tau\big)|\mathcal{P}_2(\tau)|\,d\tau=$ $=(1/2)\int_0^2 t(2-t)|\mathcal{P}_{21}(t)|\,dt=\int_0^1 t(2-t)[(2/\varepsilon+1)t^{2/\varepsilon-2}-t^{4/\varepsilon-2}]\,dt=1+\varepsilon/2+\varepsilon/(4+\varepsilon)<1+\varepsilon$. С другой стороны, однородная задача (1.1_0), (4.14) имеет нетривиальное решение $x=(x_i)_1^2$ с компонентами $x_1(t)=t\exp(-(2/\varepsilon)t^{2/\varepsilon})$, $x_2(t)=(1-t^{2/\varepsilon})\exp(-(\varepsilon/2)t^{2/\varepsilon})$ при $0\le t\le 1$, $x_i(t)=(-1)^{i-1}x_i(2-t)$ при $1<t\le 2$ $(i=1,2)$. Таким образом, даже в том случае, когда выполнены условия (4.11) и (4.12), в теореме 4.2 условие $\gamma\le 1$ нельзя заменить условием $\gamma<1+\varepsilon$, каким бы малым ни был $\varepsilon>0$.

5. Задача (1.1), (1.6_2).

Теорема 5.1. *Пусть для некоторого $a_0\in\,]a,b[$ выполнены условия (1.12_2), (1.13_2) и, кроме того, либо*

$$r\bigg(\int_a^b|\mathcal{P}_1(t)|\int_t^b|\mathcal{P}_2(s)|\,ds\,dt\bigg)<1, \tag{5.1}$$

либо

$$r\bigg(\int_a^b|\mathcal{P}_2(t)|\int_a^t|\mathcal{P}_1(s)|\,ds\,dt\bigg)<1. \tag{5.2}$$

Тогда задача (1.1), (1.6_2) имеет одно и только одно решение.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится

Лемма 5.1. *Пусть*

$$\mathcal{P}_1\in L_{\mathrm{loc}}([a,b[\,;\mathbb{R}^{n_1\times n_2}),\quad \mathcal{P}_2\in L_{\mathrm{loc}}(]a,b];\mathbb{R}^{n_2\times n_1}), \tag{5.3}$$

$$\int_a^b\|\mathcal{P}_2(t)\|\int_a^t\|\mathcal{P}_1(s)\|\,ds\,dt<\infty. \tag{5.4}$$

Тогда произвольное решение системы (1.8_0) при краевых условиях

$$y_1(a)=0,\quad y_2(b)=0 \tag{5.5}$$

непрерывно на $[a,b]$.

Доказательство. В силу условия (5.4) найдется точка $t_*\in\,]a,b[$ такая, что

$$\int_t^b\|\mathcal{P}_2(s)\|\int_t^s\|\mathcal{P}_1(\tau)\|\,d\tau\,ds<\frac{1}{2}\quad \text{при}\quad t\ge t_*. \tag{5.6}$$

Пусть $(y_i)_1^2$ – произвольное решение задачи (1.8_0), (5.5). Тогда

$$y_1(s)=y_1(t)+\int_t^s\mathcal{P}_1(\tau)y_2(\tau)\,d\tau\quad \text{при}\quad a\le t,s<b, \tag{5.7}$$

$$y_2(t) = -\int\limits_t^b \mathcal{P}_2(s) y_1(s)\, ds \quad \text{при} \quad a < t \le b. \tag{5.8}$$

Если для произвольного $t \in]a,b[$ положим $v_1(t) = \max\{\|y_1(s)\| : a \le s \le t\}$, $v_2(t) = \max\{\|y_2(s)\| : t \le s \le b\}$, то с учетом (5.3) и (5.6) из (5.7) и (5.8) найдем

$$v_1(s) \le v_1(t) + v_2(t) \int\limits_t^s \|\mathcal{P}_1(\tau)\|\, d\tau \quad \text{при} \quad a < t \le s < b,$$

$$v_2(t) \le v_1(t) \int\limits_t^b \|\mathcal{P}_2(s)\|\, ds + v_2(t) \int\limits_t^b \|\mathcal{P}_2(s)\| \int\limits_t^s \|\mathcal{P}_1(\tau)\|\, d\tau\, ds \le$$

$$\le v_1(t) \int\limits_t^b \|\mathcal{P}_2(s)\|\, ds + \frac{v_2(t)}{2} \quad \text{при} \quad t_* \le t < b$$

и, следовательно,

$$v_2(t) \le 2 v_1(t) \int\limits_t^b \|\mathcal{P}_2(s)\|\, ds \quad \text{при} \quad t_* \le t < b. \tag{5.9}$$

В силу этой оценки из (5.7) получаем $v_1(s) \le v_1(t_*) + 2\int_{t_*}^s p(\tau) v_1(\tau)\, d\tau$ при $t_* \le s < b$, где $p(\tau) = \|\mathcal{P}_1(\tau)\| \int_\tau^b \|\mathcal{P}_2(s)\|\, ds$. Отсюда по лемме Гроноулла вытекает, что

$$v_1(s) \le v_1(t_*) \exp\biggl(2 \int\limits_{t_*}^s p(\tau)\, d\tau\biggr) \quad \text{при} \quad t^* \le s < b. \tag{5.10}$$

С другой стороны, в силу условий (5.3) и (5.4) имеем $\int_a^b p(t)dt = \int_a^b \|\mathcal{P}_2(t)\| \int_a^t \|\mathcal{P}_1(s)\| ds\, dt < +\infty$. С учетом этого из (5.7), (5.9) и (5.10) найдем $\|y_1(s) - y_1(t)\| \le \gamma \int_t^s p(\tau)\, d\tau$ при $t_* \le t \le s < b$, где $\gamma = 2v_1(t_*) \exp\bigl(2\int_{t_*}^b p(\tau)\, d\tau\bigr)$. Отсюда ясно, что y_1 в точке b имеет левый предел, который, как это было сказано выше, принимается за $y_1(b)$. Следовательно, y_1 непрерывна на $[a,b]$. Аналогично можно показать, что y_2 является непрерывной на $[a,b]$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5.1. Для определенности будем считать, что выполнено неравенство (5.1), ибо случай, когда выполнено неравенство (5.2), рассматривается аналогично.

Согласно следствию 2.1, достаточно установить, что задача (1.8_0), (5.5) имеет только тривиальное решение. Пусть $(y_i)_1^2$ – произвольное решение этой задачи, которое по лемме 5.1 непрерывно на $[a,b]$, и $y_1 = (y_{1i})_1^n$. Если положим $\rho_i = \max\{|y_{1i}(t)| : a \le t \le b\}$, $\rho = (\rho_i)_1^n$, то из представлений (5.7) и (5.8) найдем

$$|y_1(t)| = \biggl| \int\limits_a^t \mathcal{P}_1(s) \int\limits_s^b \mathcal{P}_2(\tau) y_1(\tau)\, d\tau\, ds \biggr| \le \biggl(\int\limits_a^b |\mathcal{P}_1(s)| \int\limits_s^b |\mathcal{P}_2(\tau)|\, d\tau\, ds \biggr) \rho \quad \text{при} \quad a \le t \le b$$

и, следовательно, $\rho \le \bigl(\int_a^b |\mathcal{P}_1(s)| \int_s^b |\mathcal{P}_2(\tau)|\, d\tau\, ds\bigr)\rho$. Отсюда в силу условия (5.1) и леммы 4.1 вытекает, что $\rho = 0$. Следовательно, $y_1(t) \equiv 0$, согласно чему из (5.8) находим, что $y_2(t) \equiv 0$. Теорема доказана.

Следствие 5.1. *Пусть для некоторого* $a_0 \in]a,b[$ *выполнены условия* (1.12_2), (1.13_2) *и, кроме того,*

$$\int\limits_a^b \|\mathcal{P}_1(t)\| \int\limits_t^b \|\mathcal{P}_2(s)\|\, ds\, dt < 1. \tag{5.11}$$

Тогда задача (1.1), (1.6_2) *имеет одно и только одно решение.*

Чтобы убедиться в справедливости этого следствия, достаточно заметить, что неравенство (5.11) гарантирует выполнение неравенства (5.1).

Замечание 5.1. В силу условия (1.12_2) неравенство (5.11) эквивалентно неравенству $\int_a^b \|\mathcal{P}_2(t)\| \int_a^t \|\mathcal{P}_1(s)\|\,ds\,dt < 1$, а последнее гарантирует выполнение неравенства (5.2).

Пример 5.1. Пусть $n_1 = n_2 = 1$, $a = 0$, $b = 1$, $\mathcal{P}_{11}(t) \equiv \mathcal{P}_{22}(t) \equiv 0$,

$$\mathcal{P}_{12}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \in [0, 1/4] \cup [1/2, 1], \\ 0 & \text{при} \quad t \in]1/4, 1/2[, \end{cases} \qquad \mathcal{P}_{21}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \in [0, 1/4] \cup [1/2, 1], \\ -16 & \text{при} \quad t \in]1/4, 1/2[. \end{cases}$$

Тогда, с одной стороны, $\mathcal{P}_i(t) \equiv \mathcal{P}_{i\,3-i}(t)$ и $\int_a^b |\mathcal{P}_1(t)| \int_t^b |\mathcal{P}_2(s)|\,ds\,dt = \int_0^{1/4} \int_t^1 |\mathcal{P}_{21}(s)|\,ds\,dt = 1$, а с другой стороны, система (1.1_0) при краевых условиях

$$x_1(a) = 0, \quad x_2(b) = 0 \tag{5.12}$$

имеет нетривиальное решение $(x_i)_1^2$ с компонентами

$$x_1(t) = \begin{cases} 4t & \text{при} \quad 0 \le t \le 1/4, \\ 1 & \text{при} \quad 1/4 < t \le 1, \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 4 & \text{при} \quad 0 \le t \le 1/4, \\ 4(2-4t) & \text{при} \quad 1/4 < t < 1/2, \\ 0 & \text{при} \quad 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Построенный пример показывает, что в теореме 5.1 условие (5.1) (условие (5.2)) нельзя заменить условием $r(\int_a^b |\mathcal{P}_1(t)| \int_t^b |\mathcal{P}_2(s)|\,ds\,dt) \le 1$ $(r(\int_a^b |\mathcal{P}_2(t)| \int_a^t |\mathcal{P}_1(s)|\,ds\,dt) \le 1)$, а в следствии 5.1 условие (5.11) нельзя заменить условием

$$\int_a^b \|\mathcal{P}_1(t)\| \int_t^b \|\mathcal{P}_2(s)\|\,ds\,dt \le 1. \tag{5.13}$$

Теорема 5.2. *Пусть для некоторого $a_0 \in]a, b[$ выполнены условия (1.12_2), (1.13_2) и (5.13). Если, кроме того, соблюдено либо условие (4.11), либо условие (4.12), то задача (1.1), (1.6_2) имеет одно и только одно решение.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что в силу условий (1.12_2) неравенство (5.13) эквивалентно неравенству

$$\int_a^b \|\mathcal{P}_2(t)\| \int_a^t \|\mathcal{P}_1(s)\|\,ds\,dt \le 1. \tag{5.14}$$

Согласно следствию 2.1, нам остается установить, что задача (1.8_0), (5.5) имеет только тривиальное решение. Допустим противное, что эта задача имеет нетривиальное решение $(y_i)_1^2$, которое по лемме 5.1 непрерывно на $[a, b]$. Положим $\rho_i = \max\{\|y_i(t)\| : \ a \le t \le b\}$ $(i = 1, 2)$. Тогда для некоторого $\delta \in]0, b-a[$ будем иметь

$$\|y_1(t)\| < \rho_1 \quad \text{при} \quad a \le t \le a + \delta, \qquad \|y_2(t)\| < \rho_2 \quad \text{при} \quad b - \delta \le t \le b. \tag{5.15}$$

Из представлений

$$y_1(t) = -\int_a^t \mathcal{P}_1(s) \int_s^b \mathcal{P}_2(\tau) y_1(\tau)\,d\tau\,ds, \qquad y_2(t) = -\int_t^b \mathcal{P}_2(s) \int_a^s \mathcal{P}_1(\tau) y_2(\tau)\,d\tau\,ds$$

следует, что

$$\rho_1 \le \int_a^b \|\mathcal{P}_1(s)\| \int_s^b \|\mathcal{P}_2(\tau)\|\,\|y_1(\tau)\|\,d\tau\,ds, \qquad \rho_2 \le \int_a^b \|\mathcal{P}_2(s)\| \int_a^s \|\mathcal{P}_1(\tau)\|\,\|y_2(\tau)\|\,d\tau\,ds. \tag{5.16}$$

Если выполнено условие (4.11) (условие (4.12)), то в силу неравенств (5.13) и (5.15) (неравенств (5.14) и (5.15)) из (5.16) найдем $\rho_1 < \rho_1$ $(\rho_2 < \rho_2)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Приведенный выше пример 5.1 показывает, что в теореме 5.2 требование о выполнении одного из условий (4.11), (4.12) является существенным и отказаться от него нельзя.

Пример 5.2. Пусть $n_1 = n_2 = 1$, $a = 0$, $b = 1$, $\varepsilon > 0$, $\mathcal{P}_{11}(t) \equiv \mathcal{P}_{22}(t) \equiv 0$, $\mathcal{P}_{12}(t) \equiv 1$, $\mathcal{P}_{21}(t) \equiv -[(1/\varepsilon + 1)t^{1/\varepsilon-2} - t^{2/\varepsilon-2}]$. Тогда $\mathcal{P}_i(t) \equiv \mathcal{P}_{i\,3-i}(t)$ и

$$\int\limits_a^b |\mathcal{P}_i(t)| \int\limits_t^b |\mathcal{P}_2(s)|\, ds\, dt = \int\limits_0^1 \left[\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)t^{1/\varepsilon-1} - t^{2/\varepsilon-1}\right] dt = 1 + \varepsilon/2.$$

С другой стороны, однородная задача (1.1_0), (5.12) имеет нетривиальное решение $x = (x_i)_1^2$ с компонентами $x_1(t) = t\exp(-\varepsilon t^{1/\varepsilon})$, $x_2(t) = (1 - t^{1/\varepsilon})\exp(-\varepsilon t^{1/\varepsilon})$.

Построенный пример показывает, что в теореме 5.2 условие (5.13) является оптимальным и его нельзя заменить условием

$$\int\limits_a^b \|\mathcal{P}_1(t)\| \int\limits_t^b \|\mathcal{P}_2(s)\|\, ds\, dt < 1 + \varepsilon,$$

каким бы малым ни было $\varepsilon > 0$.

Работа поддержана INTAS (грант 00136).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
2. *Кигурадзе И.Т.* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. 1987. Т. 30. С. 3–103.
3. *Кигурадзе И.Т.* Начальная и краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I. Тбилиси, 1997.
4. *Hartman P., Wintner A.* // Amer. J. Math. 1951. V. 73. P. 885–890.
5. *Nehari Z.* // Amer. J. Math. 1954. V. 76. P. 689–697.
6. *Кигурадзе И.Т.* // Мат. заметки. 1969. Т. 6. № 5. С. 633–639.
7. *Гогиберидзе Н.В., Кигурадзе И.Т.* // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 11. С. 2064–2067.
8. *Кигурадзе И.Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси, 1975.
9. *Shekhter B.L.* // Arch. Math. 1983. V. 29. № 1. P. 19–42.
10. *Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Л.* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. 1987. Т. 30. С. 105–201.
11. *Ломтатидзе А.Г.* // Докл. семинара Ин-та прикл. математики им. И.Н. Векуа. 1985. Т. 19. С. 39–53.
12. *Ломтатидзе А.Г.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 3. С. 446–455.
13. *Lomtatidze A.* // Georgian Math. J. 1995. V. 2. № 1. P. 93–98.
14. *Lomtatidze A.* // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 193. P. 889–908.
15. *Půža B., Rabbimov A.* // Mem. Differential Equations Math. Phys. 2000. V. 21. P. 125–130.
16. *Kiguradze I., Půža B., Stavroulakis I.P.* // Georgian Math. J. 2001. V. 8. № 4. P. 791–814.
17. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М., 1977.

Математический институт им. А. Размадзе АН Грузии,
г. Тбилиси

Поступила в редакцию
06.08.2002 г.