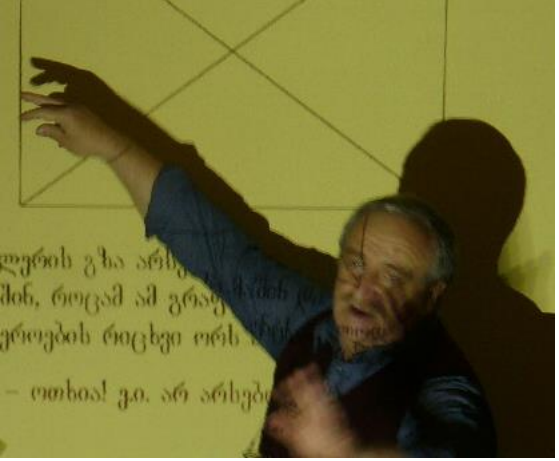


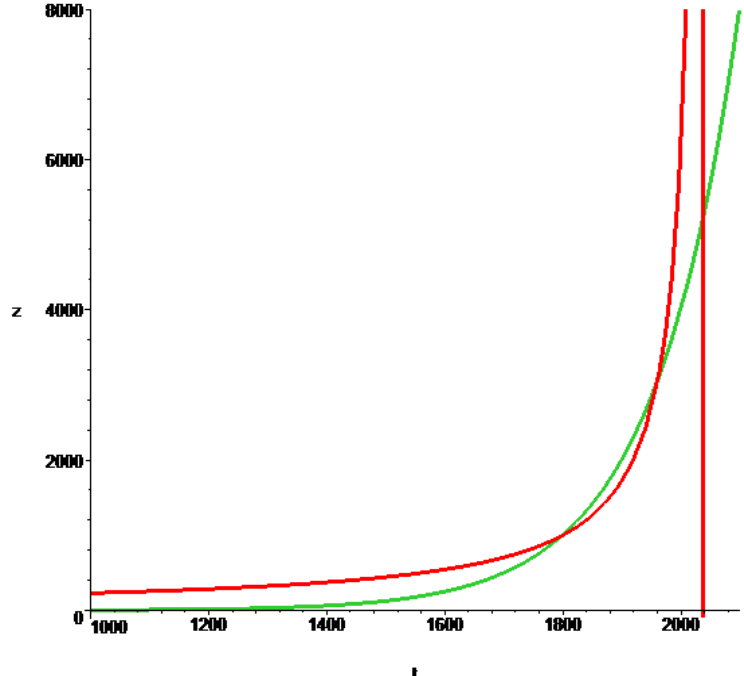
თორნიკე ქადეიშვილი

ანდრია რაზმაძის მათემატიკის ინსტიტუტი

ISET

როგორი იქნება დედამიწის მოსახლეობა 2050 წელს, ანუ გვეშველება რამე?

პალეოლითის დროს - **100** ათასი;
წელთაღრიცხვის დასაწყისში - **100** მილიონი;
1800 წელს - **1** მილიარდი;
1960 წელს - **3** მილიარდი;
ახლა - **7** მილიარდი.



მალთუსი - ექსპონენციალური ზრდა

მათემატიკური მოდელის შედგენისას, ცხადია, გარკვეულ დაშვებებს ეყრდნობიან.

მაშ, დავუშვათ, t მომენტში დედამიწის მოსახლეობა იყო $P(t)$.

მათგან ალბათ ნახევარი ქალი იყო და ნახევარი მამაკაცი.

თეორიულად შესაძლებელი იყო $\frac{P(t)}{2}$ ოჯახის შექმნა, მაგრამ,

თუ დავუშვებთ, რომ მოსახლეობის მხოლოდ 60% ოჯახდება,

მაშინ ოჯახების რაოდენობა იქნება $0.3 \cdot P(t)$.

მათგან შვილოსნობის (!) ასაკშია, ვთქვათ, 10% და მათგან თითო ოჯახი, კვლავ, ვთქვათ, ამ წელს საშუალოდ 0.3 ბავშვს აჩენს. ანუ ამ წელს გაჩნდება $0.3 \cdot 0.1 \cdot 0.3 \cdot P(t)$ ბავშვი. სამწუხაროდ იმ წელს, ალბათ მოსახლეობის 0.5% გარდაიცვლება, ამდენად 1 წლის შემდეგ მოსახლეობა იქნება

$$\boldsymbol{P(t+1) = P(t) + 0.009 \cdot P(t) - 0.005 \cdot P(t) = 1.004 \cdot P(t)}$$

მათგან შვილოსნობის (!) ასაკშია, ვთქვათ, 10% და მათგან თითო ოჯახი, კვლავ, ვთქვათ, ამ წელს საშუალოდ 0.3 ბავშვს აჩენს. ანუ ამ წელს გაჩნდება $0.3 \cdot 0.1 \cdot 0.3 \cdot P(t)$ ბავშვი. სამწუხაროდ იმ წელს, ალბათ მოსახლეობის 0.5% გარდაიცვლება, ამდენად 1 წლის შემდეგ მოსახლეობა იქნება

$$\boldsymbol{P(t+1) = P(t) + 0.009 \cdot P(t) - 0.005 \cdot P(t) = 1.004 \cdot P(t)}$$

ანუ მოსახლეობის წლიური ნაზრდი იმ წელს იყო

$$\boldsymbol{\Delta P(t) = P(t+1) - P(t) = 0.004 \cdot P(t)}.$$

ანუ მოსახლეობის წლიური ნაზრდი იმ წელს იყო

$$\Delta P(t) = P(t+1) - P(t) = 0.004 \cdot P(t).$$

ანუ მოსახლეობის წლიური ნაზრდი იმ წელს იყო

$$\Delta P(t) = P(t+1) - P(t) = 0.004 \cdot P(t).$$

აქ ყველა ეს რიცხვი პირობითია, აქ მთავარი ისაა, რომ წლიური ნაზრდი პროპორციული მოსახლეობის რაოდენობისა

$$\Delta P(t) = P(t+1) - P(t) = k \cdot P(t)$$

პროპორციულობის გარკვეული k კოეფიციენტით.

თუ გახსოვთ, ფუნქციის წარმოებული განმარტებულია როგორც ზღვარი ფუნქციის ნაზრდის შეფარდებისა არგუმენტის ნაზრდთან, როდესაც არგუმენტის ნაზრდი ნულისკენ მიისწრაფის. ნაზრდი $\Delta t = 1$ დროის ჩვენს მონაკვეთში (წელს $t = 2016$) მცირედ შეიძლება ჩაითვალოს, ამიტომ

$$\boldsymbol{P'(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} \approx \frac{P(t+1) - P(t)}{1} =$$

$$P(t+1) - P(t) = k \cdot P(t)$$

თუ გახსოვთ, ფუნქციის წარმოებული განმარტებულია როგორც ზღვარი ფუნქციის ნაზრდის შეფარდებისა არგუმენტის ნაზრდთან, როდესაც არგუმენტის ნაზრდი ნულისკენ მიისწრაფის. ნაზრდი $\Delta t = 1$ დროის ჩვენს მონაკვეთში (წელს $t = 2016$) მცირედ შეიძლება ჩაითვალოს, ამიტომ

$$\boldsymbol{P'(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} \approx \frac{P(t+1) - P(t)}{1} =$$

$$P(t+1) - P(t) = \boldsymbol{k \cdot P(t)}$$

ამრიგად მივიღეთ დიფერენციალური განტოლება, რომელიც მართავს მოსახლეობის ზრდას

$$\boldsymbol{P'(t) = k \cdot P(t)}$$

ვისაც გახსოვთ „განცალებად ცვლადებიანი“ განტოლების ამოხსნა - ამოხსენით, ვისაც არა - შეამოწმეთ (ან დაიჯერეთ), რომ ამ განტოლების ამონახსნია ექსპონენციალური ფუნქცია

$$\boldsymbol{P(t) = C \cdot e^{k \cdot t}},$$

აქ $\boldsymbol{C}$ *გასარკვევი* კონსტანტაა, ხოლო $\boldsymbol{k}$ *დასაზუსტებელი*, უკვე ნახსენები, პროპორციულობის კოეფიციენტი.

დროის ერთეულად გამოვიყენოთ ჩვენი წელთაღიცხვის დაწყებიდან გასული წლები,

ხოლო მოსახლების რაოდენობა ჩავწეროთ მილიონებში,

ანუ დღევანდელი 7 მილიარდიანი მდგომარეობა ასე ჩავწეროთ

$$P(2016) = 7000$$

$$P(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$$

ამონახსნში შემავალი ამ ორი, C და k, კონსტანტის გასარკვევად გამოვიყენოთ ორი ე.წ. *საწყისი პირობა:*

$$P(1800) = 1000,$$

ანუ 1800 წელს მოსახლეობა იყო 1 მილიარდი, და

$$P(1960) = 3040,$$

ანუ 1960 წელს დედამიწის მოსახლეობა იყო 3 მილიარდ 40 მილიონი

ეს საწყისი პირობები გვაძლევენ სისტემას

$$\begin{cases} C \cdot e^{k \cdot 1800} = 1000 \\ C \cdot e^{k \cdot 1960} = 3040 \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} C = 122 \\ e^{1800 \cdot k} = 10 \end{matrix} \Bigg| \begin{matrix} C = 0.0036 \\ k = 0.00695 \end{matrix}$$

ეს საწყისი პირობები გვაძლევენ სისტემას

$$\begin{cases} C \cdot e^{k \cdot 1800} = 1000 \\ C \cdot e^{k \cdot 1960} = 3040 \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} C = 122 \\ e^{1800 \cdot k} = 10 \end{matrix} \Bigg| \begin{matrix} C = 0.0036 \\ k = 0.00695 \end{matrix}$$

ამრიგად საწყისი პირობების გათვალისწინებით მოსახლეობა

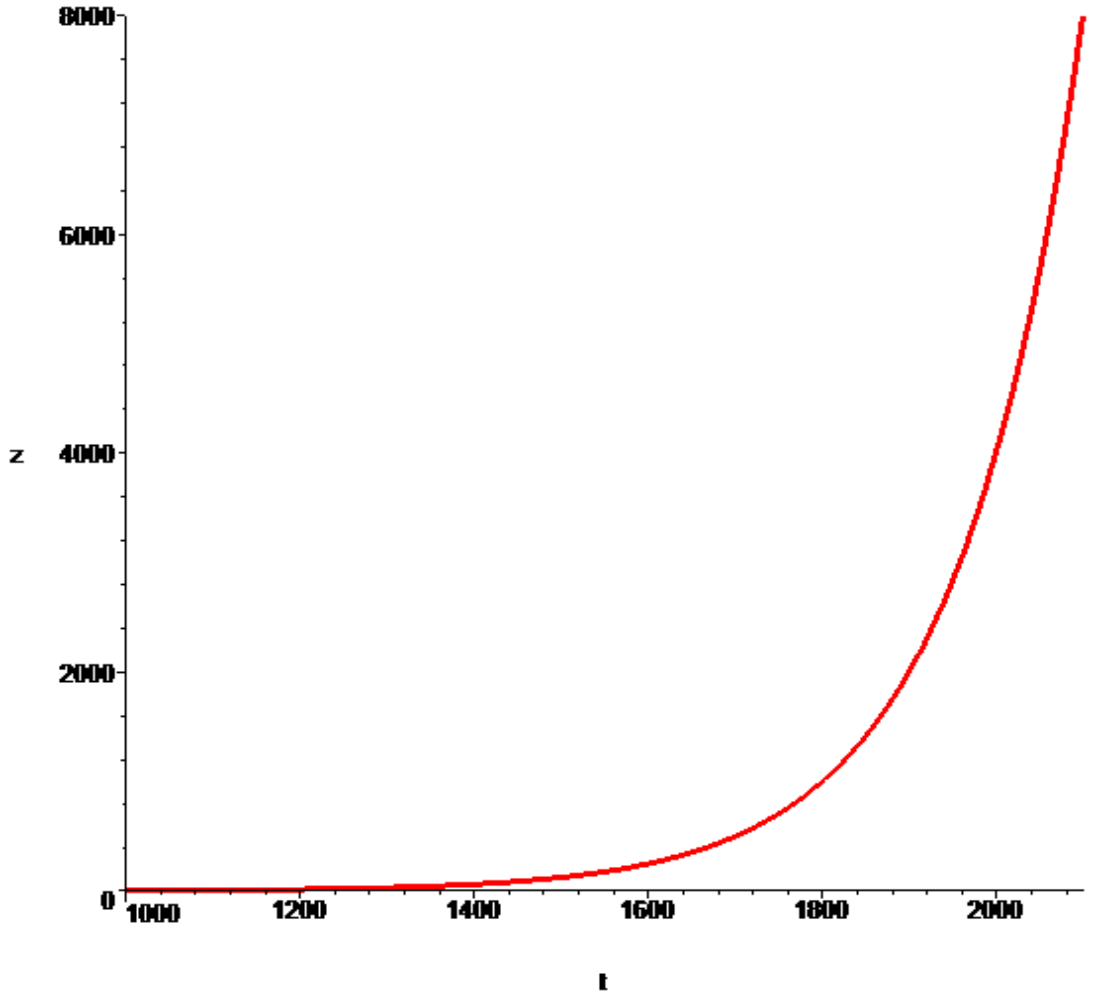
იზრდება ექსპონენციალური კანონით

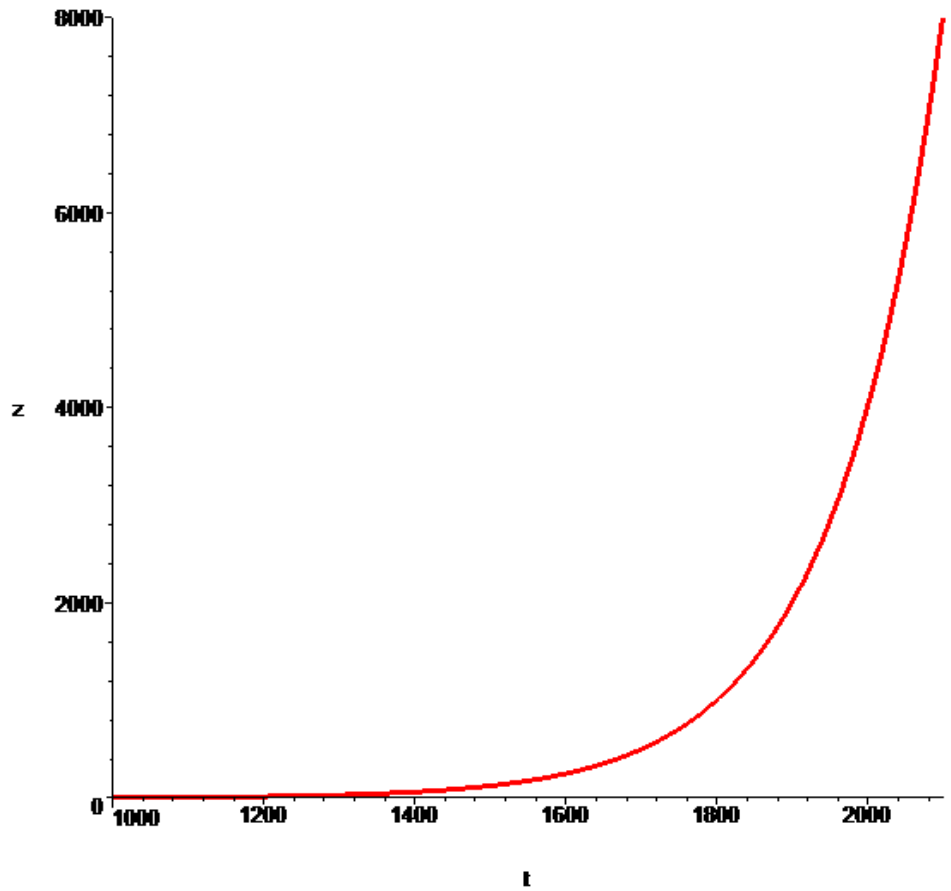
$$P(t) = 0.0036 \cdot e^{0.00695 \cdot t}.$$

ამრიგად საწყისი პირობების გათვალისწინებით მოსახლეობა იზრდება ექსპონენციალური კანონით

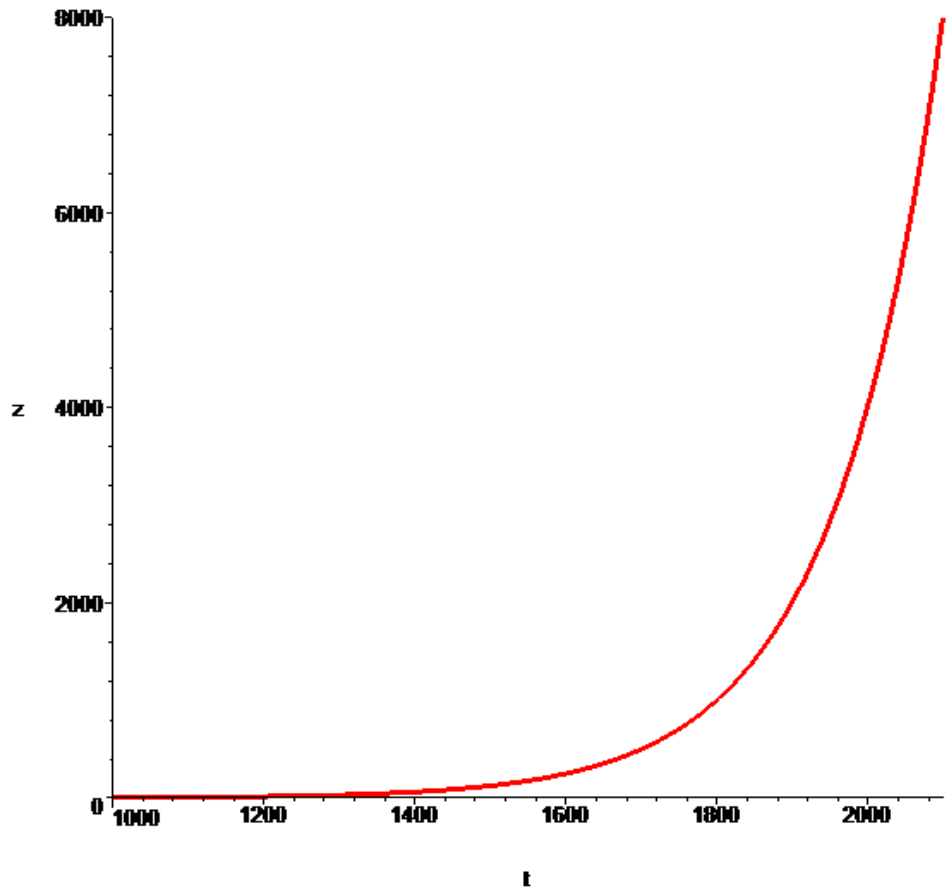
$$P(t) = 0.0036 \cdot e^{0.00695 \cdot t}.$$

მისი გრაფიკია

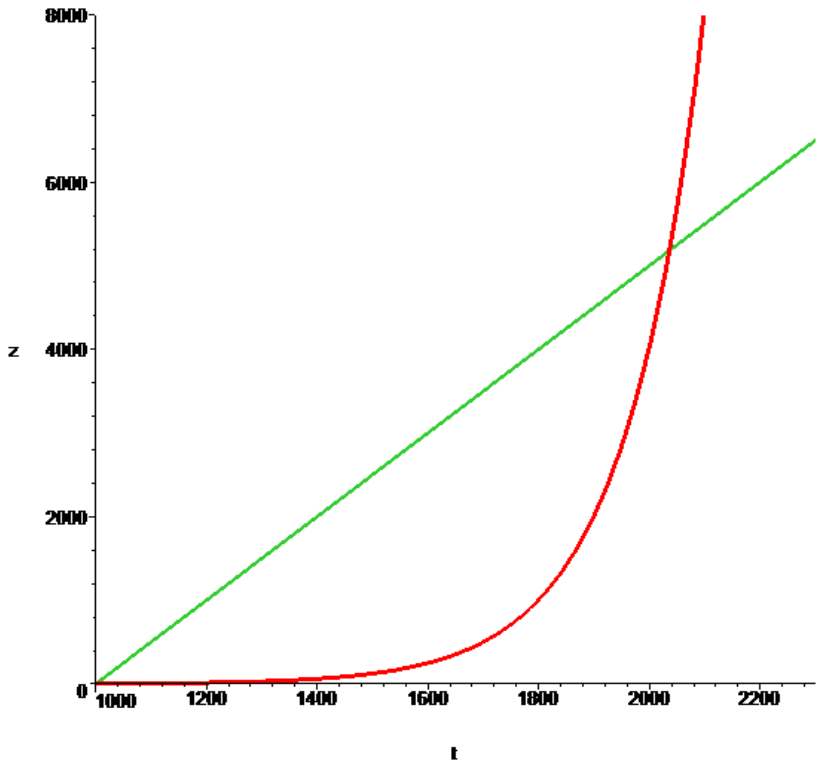




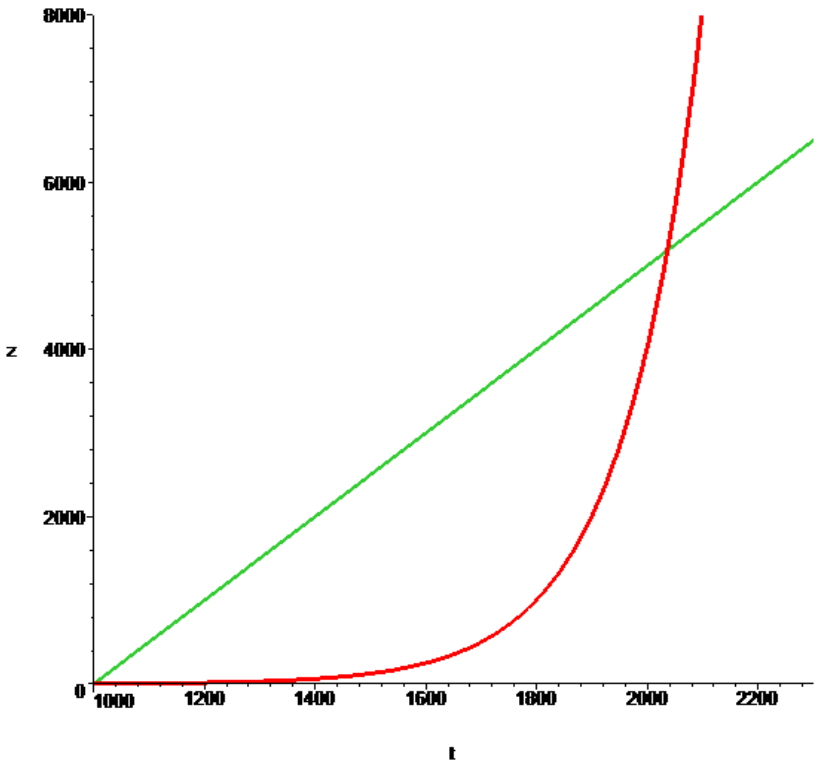
ამ ფუნქციის თავისებურება იმაშია, რომ თავიდან ის ძალიან ნელა იზრდება, შემდეგ კი ზრდის ტემპი არნახულად მატულობს.



ამ ფუნქციის თავისებურება იმაშია, რომ თავიდან ის ძალიან ნელა იზრდება, შემდეგ კი ზრდის ტემპი არნახულად მატულობს. სწორედ ამისი ეშინოდათ მალთუსელებს: მოსახლეობა იზრდება ექსპონენციალურად, სასიცოცხლო რესურსები კი მხოლოდ წრფივად

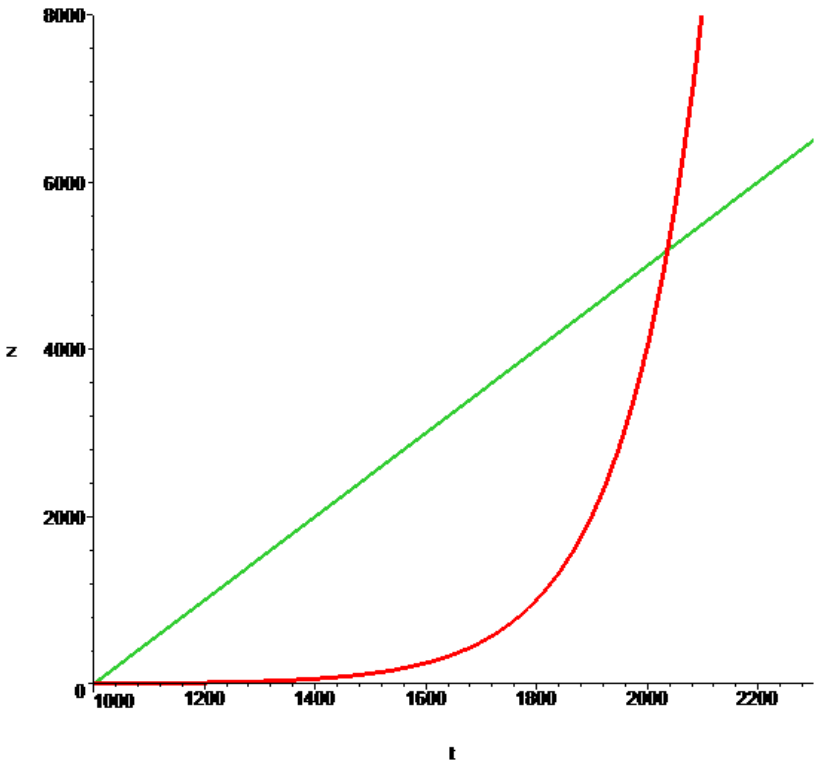


სწორედ ამისი ეშინოდათ მალთუსელებს: მოსახლეობა იზრდება ექსპონენციალურად, სასიცოცხლო რესურსები კი მხოლოდ წრფივად



სწორედ ამისი ეშინოდათ მალთუსელებს: მოსახლეობა იზრდება ექსპონენციალურად, სასიცოცხლო რესურსები კი მხოლოდ წრფივად

ამიტომ ერთ „მშვენიერ“ დღეს კაცობრიობას აღარ ეყოფა საკვები, სუფთა წყალი, სუფთა ჰაერი, ...



სწორედ ამისი ეშინოდათ მალთუსელებს: მოსახლეობა იზრდება ექსპონენციალურად, სასიცოცხლო რესურსები კი მხოლოდ წრფივად

ამიტომ ერთ „მშვენიერ“ დღეს კაცობრიობას აღარ ეყოფა საკვები, სუფთა წყალი, სუფთა ჰაერი, ...

მაგრამ, ...

ამ კანონით

$$P(0) = 0.0037$$

ანუ წელთაღრიცხვის დასაწყისში მოსახლეობა უნდა ყოფილიყო 3 ათას 700, ნაცვლად რეალური (ნავარაუდევი) 100 მილიონისა,

ამ კანონით

$$P(0) = 0.0037$$

ანუ წელთაღრიცხვის დასაწყისში მოსახლეობა უნდა ყოფილიყო 3 ათას 700, ნაცვლად რეალური (ნავარაუდევი) 100 მილიონისა,

$$P(2016) = 4494,$$

ანუ 4 მილარდ ნახევარი, რაც ბევრად ნაკლებია რეალურ 7 მილიარდზე

ამ კანონით

$$P(0) = 0.0037$$

ანუ წელთაღრიცხვის დასაწყისში მოსახლეობა უნდა ყოფილიყო 3 ათას 700, ნაცვლად რეალური (ნავარაუდევი) 100 მილიონისა,

$$P(2016) = 4494,$$

ანუ 4 მილარდ ნახევარი, რაც ბევრად ნაკლებია რეალურ 7 მილიარდზე, და

$$P(2050) = 5692,$$

ანუ 2050 წელს იქნება დაახლოებით 6 მილიარდი, რაც აგრეთვე ნაკლებია დღევანდელ მაჩვენებელზე.

ამრიგად, მალთუსის ექსპონენციალური ზრდა (რომლისაც პანიკურად ეშინოდათ მალთუსელებს) ბევრად ჩამორჩება დღევანდელ რეალობას.

რეალობა უფრო მძიმეა, ვიდრე მალთუსს ეგონა.

ჰიპერბოლური ზრდა

რეალობასთან უფრო მიახლოებული აღმოჩნდა ზრდის სხვა დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dP(t)}{dt} = k \cdot P^2(t),$$

აქ პოპულაციის წარმოებული $P'(t) = \frac{dP(t)}{dt}$, (მოსახლეობის ნაზრდი დროის ერთეულში - წელიწადში) პროპორციულია არა მოსახლეობისა რაოდენობისა $P(t)$, როგორც ეს მალთუსის შემთხვევაში იყო, არამედ ადამიანებს შორის კავშირების რაოდენობისა, რაც მოსახლეობის რაოდენობის კვადრატის $P^2(t)$ ტოლია.

წინა - მალთუსის - განტოლების $\frac{dP(t)}{dt} = k \cdot P(t),$ ლოგიკა იყო მემკვიდრეობის მომცემი ოჯახების წილი და პროდუქტიულობა მთელს პოპულაციაში,

აქ ლოგიკა სხვაა - ადამიანების ურთიერთკავშირი, გაცვლა ცოდნის და მათ მიერ წარმოებული პროდუქციისა.

წინა - მალთუსის - განტოლების $\frac{dP(t)}{dt} = k \cdot P(t),$ ლოგიკა იყო მემკვიდრეობის მომცემი ოჯახების წილი და პროდუქტიულობა მთელს პოპულაციაში,

აქ ლოგიკა სხვაა - ადამიანების ურთიერთკავშირი, გაცვლა ცოდნის და მათ მიერ წარმოებული პროდუქციისა.

ჰიპერბოლური ზრდის ლოგიკა ასეთია: თუ მოსახლეობის რაოდენობაა $P(t),$ მაშინ თითეულ ინდივიდს შეუძლია ისარგებლოს თავისი და დანარჩენი $P(t) - 1$ ადამიანის ნაწარმოები პროდუქციით.

შვილებსაც ამის იმედით გააჩენს - შესაძლო ურთიერთკავშირების რაოდენობის პროპორციულად.

ასეთი კავშირების რაოდენობაა $P^2(t)$, რაც იძლევა განტოლებას

$$\frac{dP(t)}{dt} = k \cdot P^2(t),$$

ამ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნია *ჰიპერბოლური* ფუნქცია

$$P(t) = \frac{1}{C - k \cdot x}.$$

ამონახსნში მონაწილე C და k კონსტანტების დასადგენად კვლავ გამოვიყენოთ ორი საწყისი პირობა

$$P(1800) = 100 \text{ და } P(1960) = 3040.$$

ეს საწყისი პირობები გვაძლევენ სისტემას

$$\begin{cases} \frac{1}{C-k\cdot 1800} = 1000 \\ \frac{1}{C-k\cdot 1960} = 3040 \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} C = 0.00855 \\ k = 0.0000041941 \end{matrix} \Bigg| P(t) = \frac{1}{0.00855-0.0000042\cdot t} = \frac{238430}{2039-t},$$

ეს საწყისი პირობები გვაძლევენ სისტემას

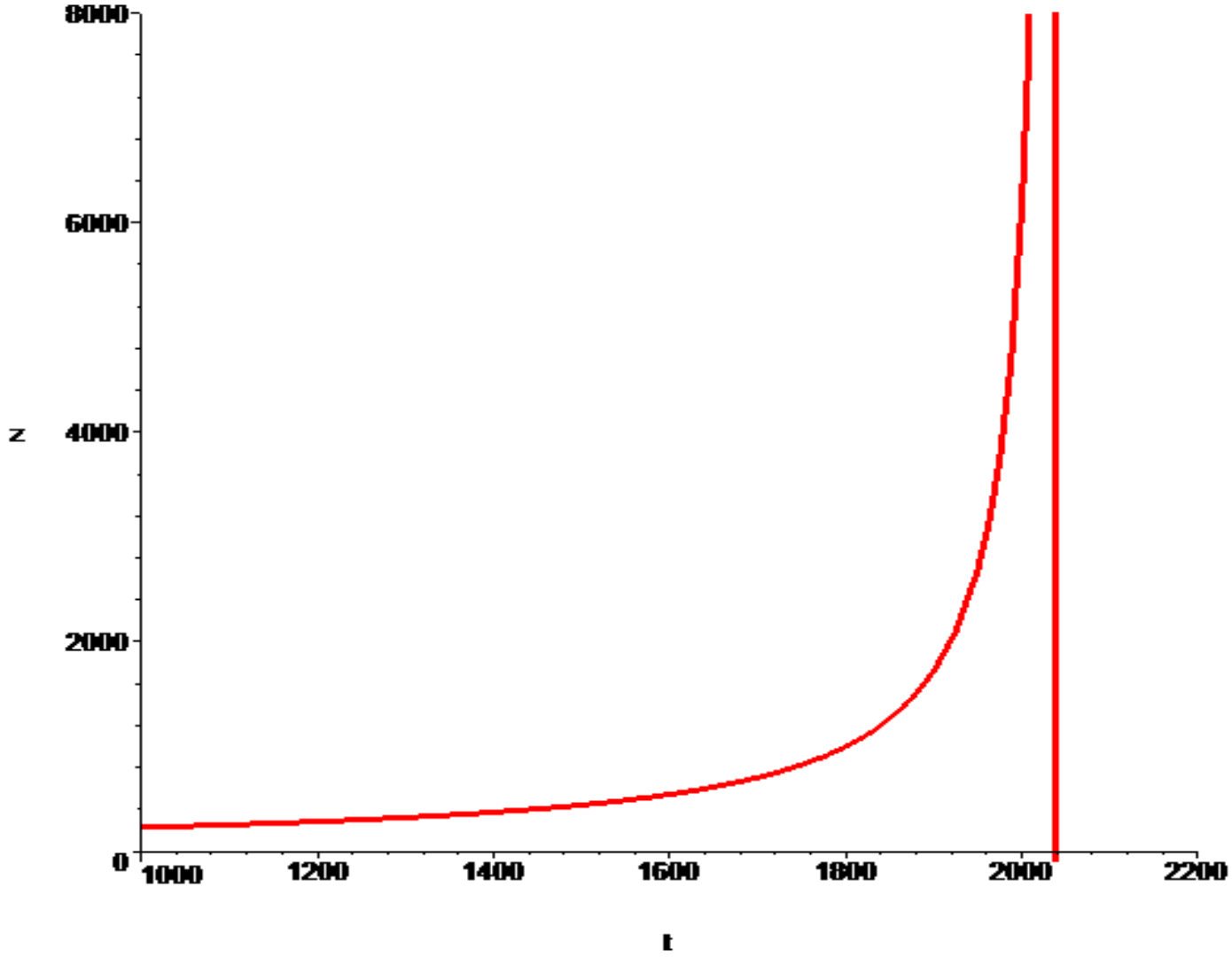
$$\begin{cases} \frac{1}{C-k\cdot 1800} = 1000 \\ \frac{1}{C-k\cdot 1960} = 3040 \end{cases} \Big|_{\substack{C=0.00855 \\ k=0.0000041941}} \Big| P(t) = \frac{1}{0.00855-0.0000042\cdot t} = \frac{238430}{2039-t},$$

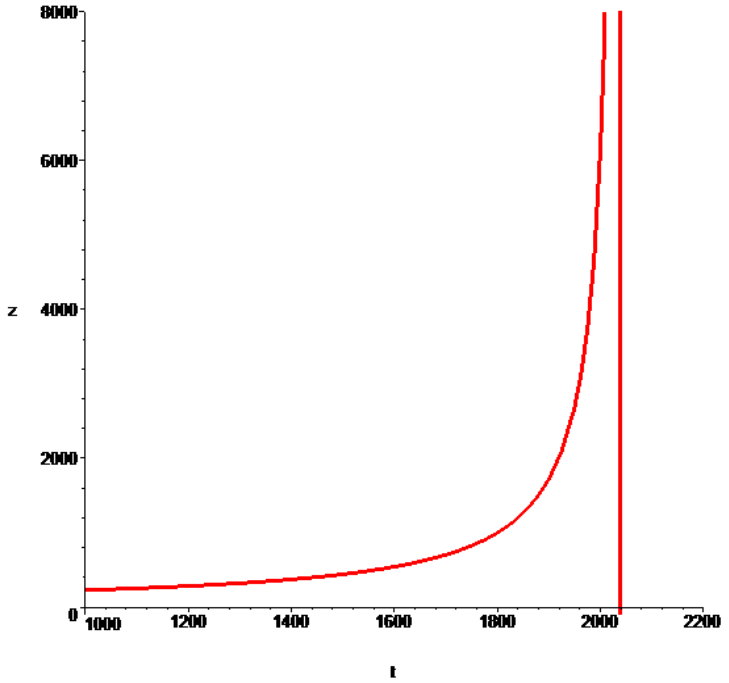
ანუ ამ შემთხვევაში მოსახლეობის ზრდის კანონია

$$\boldsymbol{P(t) = \frac{238430}{2039 - t}}.$$

$$P(t) = \frac{238430}{2039 - t}$$

მას *ჰიპერბოლური* ფუნქცია ჰქვია. მისი გრაფიკია





ესპონენტას მსგავსად ისიც თავიდან ნელა იზრდება, შემდეგ ზრდის ტემპი მატულობს. მაგრამ ახლა, განსხვავებით ექსპონენტისგან, ფუნქცია უსასრულოდ იზრდება სასრულ დროში! 2039 წლის მიდამოში დედამიწის მოსახლეობა თითქმის *უსასრულო* გახდება (რადგან ფუნქციაში $\boldsymbol{P(t) = \frac{238430}{2039-t}}$ ამ წელს მნიშვნელი ნული ხდება).

ამოტომაც ჰქვია ამ ფუნქციას ჰიპერბოლური, რაც უკიდურეს გაზვიადებას ნიშნავს.

ამ კანონით

$$P(0) = 116$$

ანუ წელთაღრიცხვის დასაწყისში მოსახლეობა უნდა ყოფილიყო

116 მილიონი რაც კარგად შეესაბამება რეალურ **100 მილიონს**

ამ კანონით

$$P(0) = 116$$

ანუ წელთაღრიცხვის დასაწყისში მოსახლეობა უნდა ყოფილიყო

116 მილიონი რაც კარგად შეესაბამება რელურ **100 მილიონს**

$$P(2016) = 10560,$$

რაც ცოტათი აჭარბებს რეალურ 7 მილიარდს ,

ამ კანონით

$$P(0) = 116$$

ანუ წელთაღრიცხვის დასაწყისში მოსახლეობა უნდა ყოფილიყო

116 მილიონი რაც კარგად შეესაბამება რელურ **100 მილიონს**

$$P(2016) = 10560,$$

რაც ცოტათი აჭარბებს რეალურ 7 მილიარდს ,

ხოლო

$$\boldsymbol{P(2039)}$$

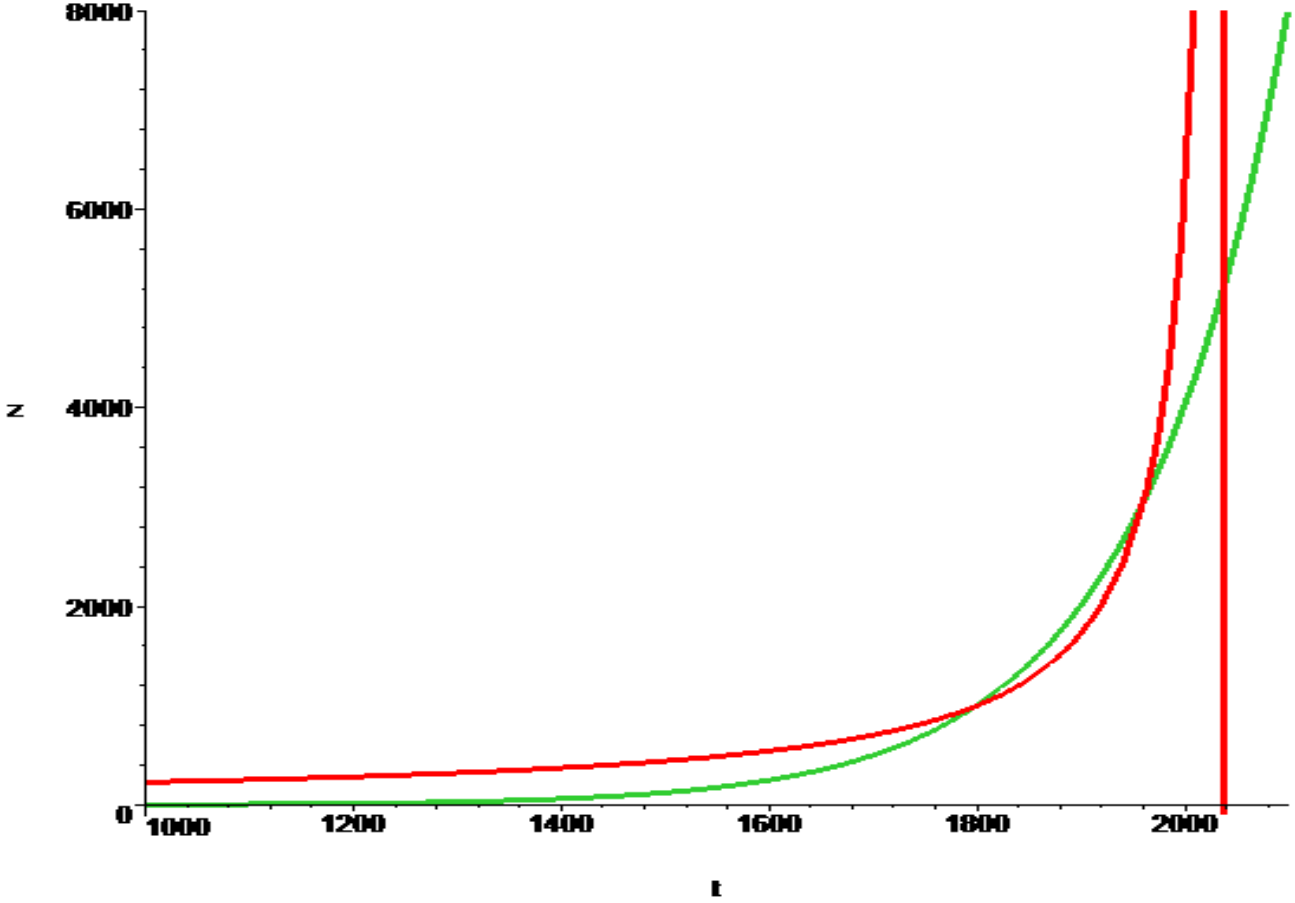
საერთოდ არ არსებობს, მოსახლეობა ამ დროისთვის

უსასრულოდ დიდი უნდა გახდეს!

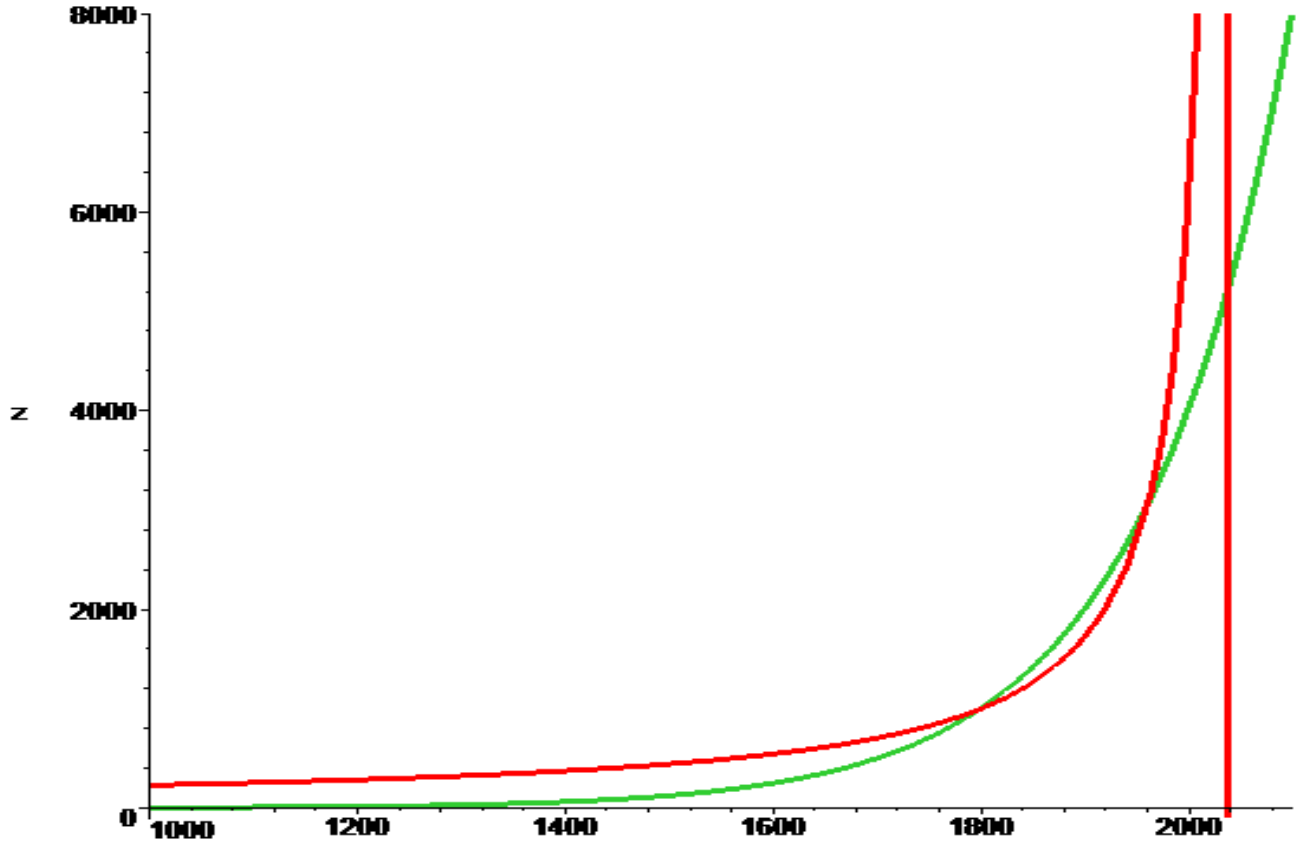
წარსულს ჰიპერბოლა უკეთ ასახავს ვიდრე ექსპონენტა, რეალური ზრდა საუკუნეების განმავლობაში მასთან უფრო ახლოა.

საინტერესოა, რომ კატაკლიზმების დროს ეს კანონი მცირედად ირღვევა, მაგრამ მერე ისევ სწორდება და რეალური ზრდა ისევ ჰიპერბოლურს უბრუნდება.

აქ ხედავთ ორივე გრაფიკს, ექსპონენტას და ჰიპერბოლას ერთად

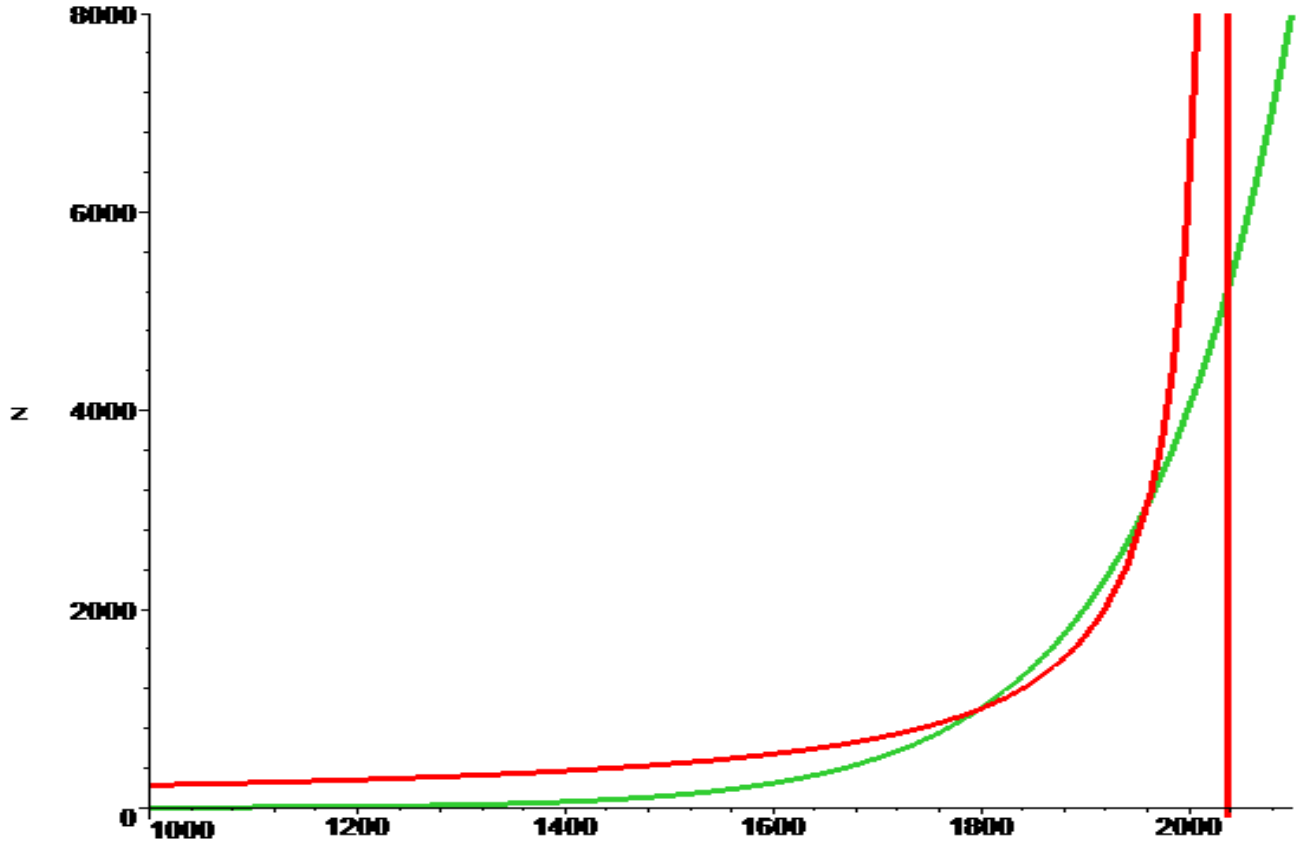


აქ ხედავთ ორივე გრაფიკს, ექსპონენტას და ჰიპერბოლას ერთად



ხედავთ, ექსპონენციალური კანონით 2039 წლის შემდეგ სიცოცხლე ისევ გრძელდება, ჰიპერბოლურით კი - არა.

აქ ხედავთ ორივე გრაფიკს, ექსპონენტას და ჰიპერბოლას ერთად



ხედავთ, ექსპონენციალური კანონით 2039 წლის შემდეგ სიცოცხლე ისევ გრძელდება, ჰიპერბოლურით კი - არა.

მაგრამ ვითარება არც ისე ტრაგიკულია, ამას ახლა გაჩვენებთ.

გვეშველება რამე?

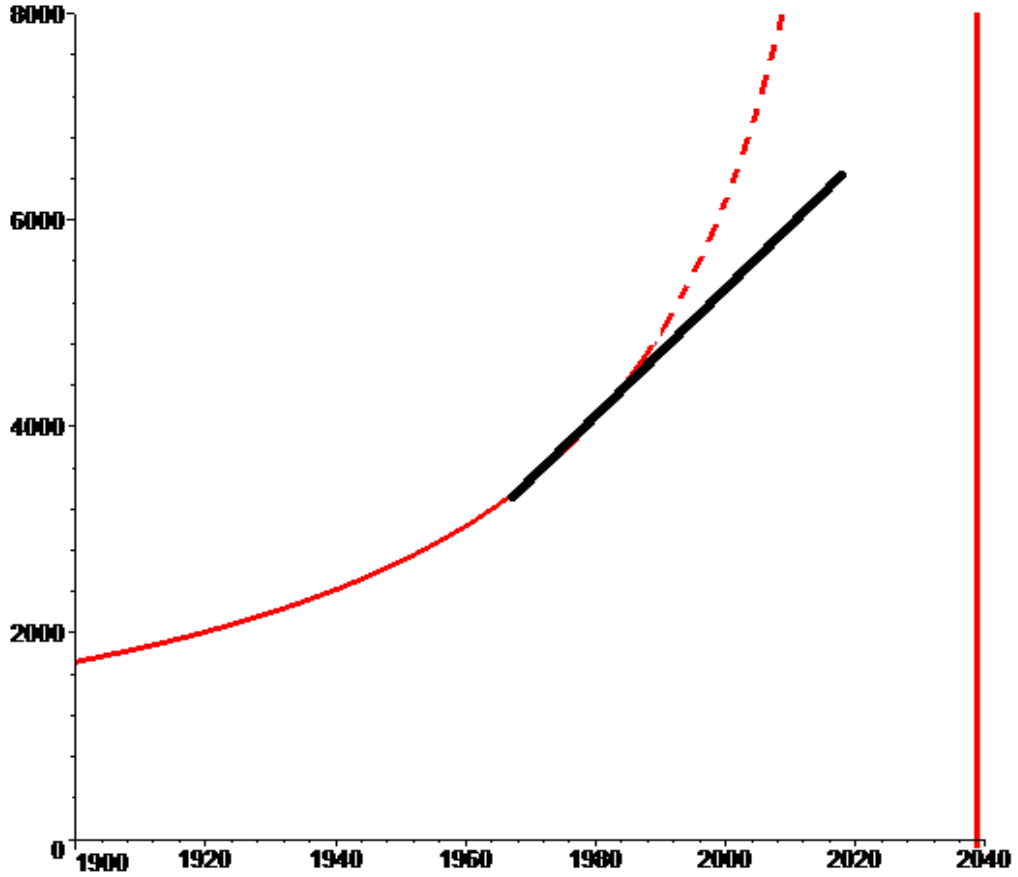
ჰიპერბოლური ზრდა გვიჩვენებს, რომ დღეს $P(2016) = 10560$, ანუ მოსახლეობა **10 მილიარდი უნდა იყოს**, **არადა** რეალურად მხოლოდ **7 მილიარდია**.

გვეშველება რამე?

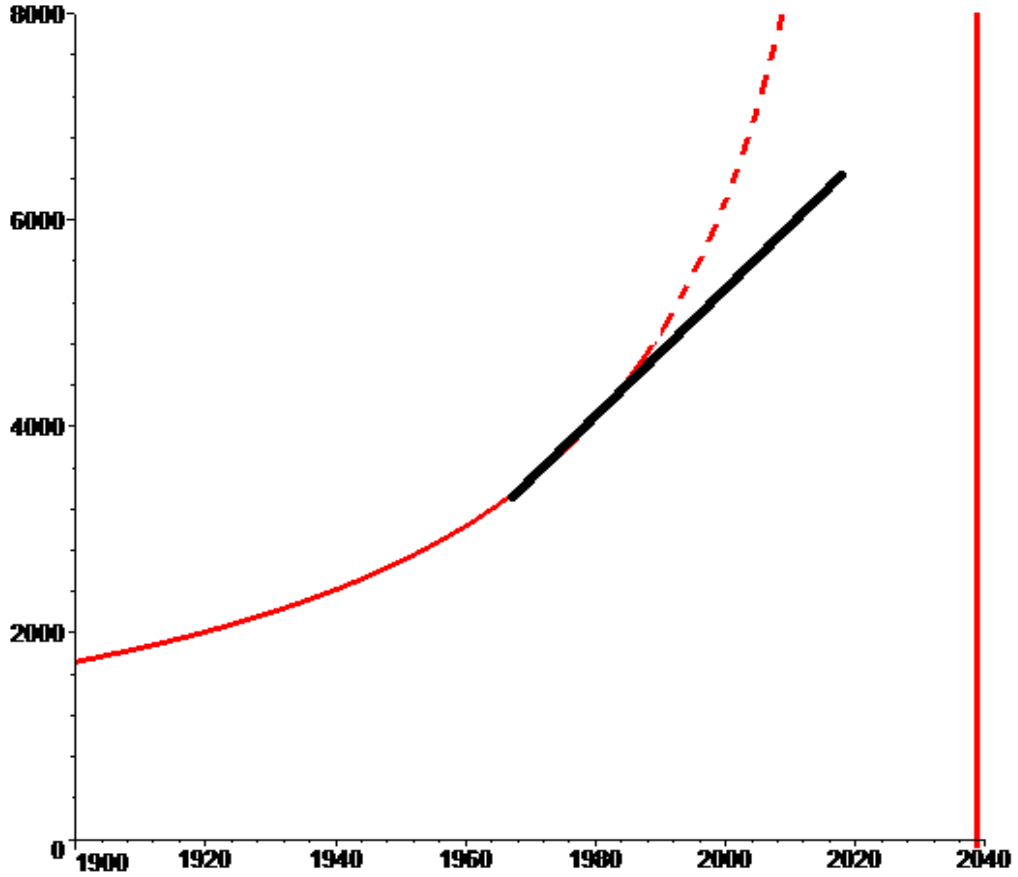
ჰიპერბოლური ზრდა გვაჩენებს, რომ დღეს $P(2016) = 10560$, ანუ მოსახლეობა **10 მილიარდი უნდა იყოს**, **არადა** რეალურად მხოლოდ **7 მილიარდია**.

საერთოდ, დაახლოებით 1970 წლიდან რეალური ზრდა შემცირდა ჰიპერბოლურთან შედარებით, ტემპი დავარდა. როგორც სჩანს მოხდა ე.წ. ფაზური ცვლილება, წინა პლანზე გამოვიდა ახალი ფაქტორები (მაგ. განვითარებულ ქვეყნებში ქორწინებები და შობადობა მკვეთრად შემცირდა).

კაცობრიობამ იგრძნო საშიშროება (2039 წელი!) და ჩართო დამცავი მექანიზმები. მოსახლეობის ზრდა ახლა იმართება უკვე სხვა დიფერენციალური განტოლებით. გრაფიკულად კი ასე გამოიყურება



კაცობრიობამ იგრძნო საშიშროება (2039 წელი!) და ჩართო დამცავი მექანიზმები. მოსახლეობის ზრდა ახლა იმართება უკვე სხვა დიფერენციალური განტოლებით. გრაფიკულად კი ასე გამოიყურება



2039 წელს არ იქნება კაცობრიობის დასასრული!

მადლობა

tornike.kadeishvili@gmail.com

rmi.ge/~kade