ნ. ვახანია, ვ. კვარაცხელია

# პროფესორი დავით კვესელავა

## მოკლე ბიოგრაფია

ბატონ დავით კვესელავას ბავშვობამ მარტვილის მახლობლად სოფელ ლეცი-ცხვაიეში გაიარა. იგი იქაური მკვიდრის, ალექსანდრე კვესელავას ოჯახში დაიბადა 1911 წლის 25 აგვისტოს. ოჯახი საიმედო საფუძველზე იდგა, ტრადიციების ერთგული იყო და წიგნიერების ფასიც კარგად იცოდა. მან მრავალ სხვა სიკეთესთან ერთად თავიდანვე ჩაუნერგა ორივე ვაჟს, დავითსა და მიხეილს, საკუთარი კუთხის სიყვარული, ღირსების გრძნობა და შრომისმოყვარეობა. ცოდნის წყურვილი კი მათ ბუნებით დაჰყვათ. ძმების მომავალი წარმატებული შემოქმედებითი ცხოვრების გზას სწორედ მაშინ დაედო სათავე. აქ მოვლენებს რამდენადმე წინ გავუსწრებთ და აღვნიშნავთ, რომ ბატონი მიხეილ კვესელავა, შემდგომში ცნობილი ლიტერატურათმცოდნე, სხვადასხვა დროს იყო უცხო ენათა პედაგოგიური ინსტიტუტისა და კინოსტუდია "ქართული ფილმის" დირექტორი. იგი ერთადერთი ქართველი გახლდათ, ვინც ნიურნბერგის პროცესს დაესწრო, სადაც მიღებულმა შთაბეჭდილებებმა შესანიშნავი მხატვრული ნაწარმოებები შეაქმნევინა.

შვილების განათლებისათვის უკეთესი პირობების შესაქმნელად კვესელავების ოჯახი 1930 წელს თბილისში გადავიდა საცხოვრებლად. მომდევნო წელს კი ბატონმა დავითმა საშუალო სასწავლებელი დაამთავრა და სწავლა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე გააგრძელა. მისი მონდომება და ნიჭი შეუმჩნეველი არ დარჩენილა. ბატონმა დავითმა, როგორც წარჩინებულმა სტუდენტმა და დიპლომანტმა, მიიქცია 1937 წლის სახელმწიფო საგამოცდო კომისიის თავმჯდომარის ნიკო მუსხელიშვილის ყურადღება. მისი შუამდგომლობით შემდგომი სამეცნიერო ხელმძღვანელობა გამოჩენილმა მათემატიკოსმა და მექანიკოსმა მიხეილ ლავრენტიევმა იკისრა. მაშინ საქართველოს მეცნიერებათა აკადემია დამოუკიდებლად ჯერ არ არსებობდა. ბატონი დავითი უნივერსიტეტის დამთავრებისთანავე ჩაირიცხა საბჭოთა კავშირის მეცნიერებათა აკადემიის საქართველოს ფილიალის მათემატიკის ინსტიტუტის ასპირანტურაში.

ნაყოფიერი და საინტერესო იყო ასპირანტურის წლები. მეტად ინტენსიური იყო მისი კვლევითი სამეცნიერო საქმიანობა, რაც თავისთავად დიდ მოთმინებასა და ენერგიას მოითხოვდა. ასეთი მძიმე დატვირთვის მიუხედავად მას არც აქტიური პედაგოგიური საქმიანობისთვის დაუშურებია დრო და ყურადღება. ასპირანტურის პირველივე წლიდან ასწავლიდა ახალგაზრდობას თბილისის რკინიგზის ტრანსპორტის ინჟინერთა ინსტიტუტსა და თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, იაკობ გოგებაშვილის სახელობის თელავის პედაგოგიურ ინსტიტუტში, სადაც მათემატიკის კათედრას ხელმძღვანელობდა. ამ პერიოდში ყალიბდებოდა მისი, როგორც პროფესი-

ონალი პედაგოგისა და ლექტორის სახე. ყალიბდებოდა წმინდა და ლაკონური ქართულით რთული მასალის დამაჯერებელი გადაცემის მხოლოდ მისთვის დამახასიათებელი მანერა, რომელიც მომდევნო წლების მანძილზე უფრო და უფრო იხვეწებოდა. ამ სტილით დარჩა მისი კოლორიტული სახე მრავალრიცხოვან სტუდენტთა და მსმენელთა მეხსიერებაში.

პედაგოგიურ სარბიელზე წარმატებული მუშაობისათვის 1940 წელს საკავშირო უმაღლესმა საატესტაციო კომისიამ მას დოცენტის წოდება მიანიჭა. ამავე წელს შეჯამდა ბატონი დავითის შემოქმედებითი ცხოვრების პირველი სამწლეული. სწორედ ამ დროს დაასრულა ასპირანტურაც და საკანდიდატო დისერტაციაც დაიცვა. „კონფორმულ ასახვათა თეორიის შესახებ" - ასეთი იყო სადისერტაციო ნაშრომის სათაური. ცნება „კონფორმული" გვიანდელი ლათინურით „მსგავსს" ნიშნავს. მაგალითად, სფეროს ასახვა სიბრტყეზე კონფორმულია, თუ სფეროს ნებისმიერ წერტილში აღებულ ორ ნებისმიერ მიმართულებას შორის კუთხე სიბრტყეზე გადასახვის შემდეგაც სიდიდით იგივე რჩება. ასეთი ასახვები გეოგრაფიული რუკების შექმნას უკავშირდება და მათ კარტოგრაფიაში, და არა მხოლოდ კარტოგრაფიაში, ამჟამადაც არ დაუკარგავს მნიშვნელობა. როცა სფეროს კი არა, სიბრტყეს ასახავენ სიბრტყეზე, კონფორმულობისათვის შესაბამისი კუთხეების ტოლობის გარდა კიდევ ერთი პირობის შესრულებას ითხოვენ. სახელდობრ, წრე ისევ წრეში უნდა აისახოს და წრეწირიც – წრეწირში. ოღონდ აქ საუბარია არა ჩვეულებრივ წრეებსა და წრეწირებზე, არამედ ისეთებზე, რომელთა რადიუსიც უსასრულოდ მცირეა. როგორც შემდეგში გამოირკვა, ასეთი ასახვები თურმე კომპლექსური ცვლადის ანალიზური ფუნქციებით ხორციელდება. ფუნქცია ანალიზურია რაიმე წერტილის სიახლოვეს, თუ იქ მისი წარმოდგენა თავისივე არგუმენტის ხარისხების შემცველ უსასრულო რაოდენობის შესაკრებთა ჯამით შეიძლება. ბუნებრივად გაჩნდა ერთი მხრივ კონფორმულ ასახვათა, მეორე მხრივ კი მათი შესატყვისი ანალიზური ფუნქციების თვისებათა შედარების მოთხოვნილება. ბატონ დავითს უნდა გამოეკვლია, თუ რამდენად და როგორ უნდა შეფასებულიყო ამსახავი ფუნქციის პარამეტრები, როცა ასახულსა და წინასახე–არეებს შორის განსხვავება უმნიშვნელოა. ამ თემაზე მანამდეც იყო გამოთქმული გარკვეული მოსაზრებები და ახალგაზრდა მკვლევარის წინამორბედების მიერ შედეგებიც იყო მიღებული. მათ შორის ცნობილი რუსი მეცნიერის ა. ოსტროგრადსკის მიერაც, რომლის დასკვნების მნიშვნელოვანი განზოგადებაც მოახერხა ბატონმა დავითმა თავის ხელმძღვანელთან ერთად. შედეგი იმდენად საინტერესოდ მიიჩნია მიხეილ ლავრენტიევმა, რომ არ „იუკადრისა" მოწაფესთან თანაავტორობით ამ თემაზე ნაშრომის გამოქვეყნება.

დისერტაციის წარმატებით დაცვის შემდეგ ბატონი დავითი მათემატიკის ინსტიტუტში დატოვეს სამუშაოდ, სადაც დასაწყისში სწავლული მდივანი იყო. ცოტა ხანში კი უფროსი მეცნიერი თანამშრომლის თანამდებობა– დაიკავა და 1941 წელს შესაბამისი წოდებაც მიენიჭა. მას სამეცნიერო საქმიანობის ორგანიზების განსაკუთრებული უნარი აღმოაჩნდა და როცა ამაში თვალნათლივ დარწმუნდნენ, საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა განყოფილების სწავლული მდივნის პოსტიც ჩააბარეს. თუმცა ადმინისტრაციულ საქმიანობას მისთვის ხელი არ შეუშლია კვლევითი მუშაობის გაგრძელებაში. და, აი, 1952 წელს საბჭოთა მათემატიკის ფლაგმანის, საბჭოთა კავშირის მეცნიერებათა აკადემიის ვ. სტეკლოვის

სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის საბჭოზე სადოქტორო დისერტაცია “ფუნქციათა თეორიის და სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების ზოგიერთი სასაზღვრო ამოცანა” წარადგინა დასაცავად. მიუკერძოებელი საბჭოს გადაწყვეტილება დისერტანტის სასარგებლოდ ერთსულოვანი იყო.

არც პედაგოგიური საქმიანობა შეუწყვეტია ბატონ დავითს. იგი უნივერსიტეტის გამორჩეული პროფესორი გახლდათ. ლექციის წარმართვის მისეული დინჯი და აუჩქარებელი, თუმცა იმავე დროს საკმაოდ აზარტული მანერა ბევრს დღესაც კარგად ახსოვს და აფასებს. პროფესორის წოდებასაც არ დაუგვიანია – ის სადოქტორო დისერტაციის დაცვის შემდეგ ორიოდ წელიწადში მიანიჭეს.

1956 წლის 8 ოქტომბერი ბატონი დავითის ცხოვრებაში განსაკუთრებული თარიღია - მაშინ ჩაუდგა იგი სათავეში საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ახლად შექმნილ გამოთვლით ცენტრს. იმ დროისათვის ტექნიკამ და ტექნოლოგიებმა არნახული ტემპით იწყეს განვითარება. ყოველივე ეს მიახლოებითი ანალიზის, გამოთვლითი მათემატიკისა და, რაც მთავარია, გამოთვლითი ტექნიკის წინაშე ახალ ამოცანებს აყენებდა. წამოჭრილ პრობლემათა გადასაწყვეტად მსოფლიოს მრავალ განვითარებულ ქვეყანაში იქმნებოდა სამეცნიერო ცენტრები და ინსტიტუტები. ამაში არც იმდროინდელი საბჭოთა კავშირი იყო გამონაკლისი. შეუჯერებელი კონცეფციების პირობებში ამ ახალ და უჩვეულო საქმეს ყველა საკუთარი მოსაზრებით უდგებოდა. ასეთ ვითარებაში საქმის სწორად წარმართვისათვის ხელმძღვანელის ალღოსა და უნარზე ბევრი რამეა დამოკიდებული. პროფესორ დავით კვესელავას სასახელოდ უნდა ითქვას, რომ ღვთით ბოძებულმა ორგანიზატორულმა ნიჭმა და სამეცნიერო ორგანიზატორის ტალანტმა ეფექტურად მოქმედი გამოთვლითი ცენტრის შექმნა შეაძლებინა. ამიტომაც იყო, რომ საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის გამოთვლით ცენტრს ბატონი დავითი სიცოცხლის ბოლომდე უცვლელად ხელმძღვანელობდა.

პროფესორი დავით კვესელავა 1978 წლის 6 ნოემბერს გარდაიცვალა. ორგანიზატორულის გარდა მისი სამეცნიერო მემკვიდრეობა მრავალ სამეცნიერო ნაშრომსა და მონოგრაფიას მოიცავს. მისი დაწყებული საქმე ახლაც ცოცხალია და ნიკო მუსხელიშვილის სახელობის გამოთვლითი მათემატიკის ინსტიტუტი ამჟამადაც ნაყოფიერად იღვწის საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის შემადგენლობაში. საზოგადოება მის მეცნიერულ და პედაგოგიურ ღვაწლს იმთავითვე სათანადოდ აფასებდა, რაც თავის დროზე საქართველოს მეცნიერების დამსახურებული მოღვაწის წოდების მინიჭებითა და სხვადასხვა ჯილდოებით გამოიხატა. მაგრამ ყველაზე მთავარი ჯილდო, ალბათ, ის დიდი სიყვარული და პატივისცემაა, მის ყოფილ თანამშრომლებს დღეისთვისაც სათუთად რომ შემოუნახავთ.

## დ. კვესელავას ძირითადი სამეცნიერო შედეგების მოკლე მიმოხილვა

ბატონი დავითი ყოველთვის სამართლიანი და კეთილგანწყობილი იყო ნებისმიერი თანრიგისა თუ ასაკის ადამიანებთან როგორც პირად ურთიერთობებში, ასევე საქმეშიც. ყოველივე ამან და კოლექტიური მუშაობის თანდაყოლილმა ნიჭმა მის შემოქმედებასაც გარკვეული კვალი დააჩნია. თავის კოლეგებთან, მათ შორის საკუთარ

მასწავლებლებლებთან და მოსწავლეებთან თანაავტორობით გამოქვეყნებული ნაშრომების გარკვეული ნაწილი მეცნიერული თანამშრომლობის საუკეთესო მაგალითია. როგორც თანამოაზრეებთან ხორცშესხმული, ასევე დამოუკიდებლად მიღებული შედეგები მათემატიკის ერთმანეთთან მჭიდროდ დაკავშირებულ რამდენიმე მიმართულებას განეკუთვნება. ზემოთ უკვე ითქვა, რომ ეს არის კონფორმულ ასახვათა და კომპლექსური ცვლადის ანალიზურ ფუნქციათა თეორიები, და ასევე, ეგრეთწოდებულ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა და სისტემათა თეორია. ამ მიმართულებებში წამოჭრილი ამოცანები პრაქტიკული აუცილებლობითაა ნაკარნახევი და ბევრს მათ შორის, იმავდროულად, არსებითი თეორიული მნიშვნელობაც გააჩნია. ამჟამად ამ დარგებს კლასიკის სფეროს მიაკუთვნებენ და მასში ბატონ დავითსაც უდევს გარკვეული წილი. ყველა ეს მიმართულება იმდენად მჭიდროდაა ერთმანეთში გადახლართული, რომ ძნელია მათი განცალკევება.

იმისათვის, რომ პროფესორ დავით კვესელავას მეცნიერული მემკვიდრეობის მოკლე მიმოხილვა გამჭვირვალედ იქნეს წარმოდგენილი, მათზე საუბარი დანაწევრებით აჯობებს. და ბატონი დავითის პირველი შედეგებით საუბრის დაწყება სავსებით ბუნებრივი იქნება.

1. **კონფორმული ასახვების მიახლოებითი მეთოდები.** აქ საუბარია კომპლექსურ $z = x + iy$ სიბრტყეზე მდებარე ურთიერთმახლობელ $D$ და $D_1$ ცალადბმულ არეთა $|w| < 1$ წრეზე კონფორმულად ასახვასა და შესაბამის ამსახავ $f(z)$ და $f_1(z)$ ანალიზურ ფუნქციათა სხვაობის $|f(z) - f_1(z)|$ მოდულის შეფასებაზე. აკადემიკოს ლავრენტიევთან ერთობლივ ნაშრომში კომპლექსურ სიბრტყეზე მდებარე $D$ არე მოიცავს კოორდინატთა სათავეს, მისი საზღვარი კი მთლიანად $\vartheta < |z| < 1$ რგოლში დევს, $\vartheta \geq 1/2$ თუმცა ამგვარი პირობების მოთხოვნით $D$ არის ზოგადობა სინამდვილეში დიდად არ იზღუდება. $\vartheta$ პარამეტრი კონკრეტულად არ არის დასახელებული და რაც უფრო ნაკლებია $1 - \vartheta$ სხვაობა, მით უფრო მახლობელია $D$ არე $z$ ცვლადის სიბრტყის ერთეულოვან $D_1$ წრესთან. იგივური ფუნქცია $w = f_1(z) \equiv z$ ამ ერთეულოვან $D_1$ წრეს $z$ ცვლადის სიბრტყიდან $w$ ცვლადის სიბრტყეზე ისევ ერთეულოვან $|w| < 1$ წრეზე ასახავს. და თუ $w = f(z)$ ფუნქცია მასზევე ასახავს $D$ არეს, მაშინ $z$ ($|z| \leq \vartheta$) ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის შეფასება

$$|f(z) - f_1(z)| = |f(z) - z| \leq k(1 - \vartheta)\log\frac{1}{1 - \vartheta}$$

ყოველთვის შესრულდება. ამით ავტორებმა ანალიზურადაც დაადასტურეს, რომ რამდენადაც მახლობელია არეები, მით უფრო ნაკლებია განსხვავება მათ ამსახავ ფუნქციებს შორის. ამასთანავე აღმოჩნდა, რომ ფუნქციათა შორის ეს განსხვავება კოორდინატთა სისტემის სათავის მახლობლად უფრო ნაკლებია, ვიდრე მისგან დაშორებით. უტოლობის მარჯვნივ მდგომი გამოსახულების კოეფიციენტი აბსოლუტური მუდმივია. ასეთივე აბსოლუტურია კოეფიციენტი, როცა არგუმენტი ზემოთ აღნიშნული წრის შიგნითაა, ანუ

$$|z| \leq \vartheta_1\vartheta, \text{ სადაც } 0 < \vartheta_1 < 1.$$

ასეთ შემთხვევაში შეფასება უფრო დახვეწილია და

$$\left|f(z)-z\right| \le k_1(1-\vartheta)\log\frac{1}{1-\vartheta_1}$$

სახე აქვს. აქ მხოლოდ ამსახავი ფუნქციაა შეფასებული. ყურადღების ღირსია შექცეულ ასახვებთან დაკავშირებული შედეგებიც, როცა ერთეულოვანი წრე ორ მახლობელ ცალადბმულ არეში კონფორმულად არის გადასახული. ამ მიმართულებით პროფესორ კვესელავას ერთ-ერთი შედეგი ასე გამოიყურება: ვთქვათ, $D$ და $D_1$ რადიალურად $\varepsilon > 0$ მახლობლობაში მდებარე არეებია და ფუნქციები $w = f(z),\ f(0) = 0$ და $w = f_1(z),\ f_1(0) = 0$, კონფორმულად ასახავენ წრეს $|z| < 1$, შესაბამისად, არეებზე $D$ და $D_1$. მაშინ, თუ $D_1$ შედის $D$-ში, ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left|f'(0)\right| \le \left|f_1'(0)\right| + 4\varepsilon .$$

თვით ლინდელოფის პრინციპის თანახმად, საუბარია ამ ვარიაციის მხოლოდ ნიშანზე და, ამრიგად, დ. კვესელავას შედეგი წარმოადგენს მის მნიშვნელოვან რაოდენობრივ დაზუსტებას.

ამ შედეგს მნიშვნელოვანი გამოყენება აქვს მიახლოებითი კონფორმული გადასახვისას წარმოებულის მოდულის შეფასებებში. აღვნიშნოთ ერთ-ერთი მათგანი: თუ $D$ არის საზღვარი შედის რგოლში $1 < |w| < 1 + \varepsilon$ და ფუნქცია $w = f(z),\ f(0) = 0$, კონფორმულად ასახავს $|z| < 1$ წრეს $D$ არეზე, მაშინ წრეში $|z| < r_0,\ r_0 \ge 0.1$, გვაქვს

$$1 \le \left|f'(z)\right| \le 1 + \varepsilon .$$

კონფორმული გადასახვების მიმართულებით აგრეთვე აღსანიშნავია შემდეგი თეორემა: ვთქვათ, $D$ და $D_1$, $w = 0$ წერტილის მიმართ ვარსკლავური რადიალურად მახლობელი არეებია. თუ ფუნქციები $w = f(z),\ f(0) = 0,\ f'(0) > 0$, და $w = f_1(z),\ f_1(0) = 0,\ f_1'(0) > 0$, კონფორმულად ასახავენ წრეს $|z| < 1$, შესაბამისად, არეებზე $D$ და $D_1$, მაშინ, თუ $|z| \le r < 1$, ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left|f(z) - f_1(z)\right| < M(r)\,\varepsilon ,$$

სადაც $M(r)$ დამოკიდებულია მხოლოდ $r$-ზე. მანვე აჩვენა, რომ ეს შედეგი არ ვრცელდება ნებისმიერ ჟორდანის არეებზე.

ორიგინალური და საინტერესო შედეგები აქვს მიღებული დ. კვესელავას ორი მეზობელი არის საზღვრის საერთო ნაწილზე კონფორმულად გადამსახავი ფუნქციების წარმოებულის ყოფაქცევის შესახებ. ერთ-ერთ მათგანს ასეთი სახე აქვს: ვთქვათ, მეზობელი $D$ და $D_1$ არეები საზღვრის საერთო წესიერი ნაწილით $\gamma$, შესაბამისად, შეიცავენ წერტილებს $z^0$ და $z_1^0$. გარდა ამისა, ვთქვათ, ფუნქციები $w = f(z),\ f(z^0) = 0$, და $w = f_1(z),\ f_1(z_1^0) = 0$, კონფორმულად ასახავენ, შესაბამისად, არეებს $D$ და $D_1$-ს წრეზე $|w| < 1$. მაშინ, $\gamma$ რკალის ნებისმიერი $t$ წერტილისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left|f'(t)\right|\left|f_1'(t)\right| \le \frac{4}{\rho^2(t; z^0, z_1^0)},$$

სადაც $\rho(t; z^0, z_1^0)$ არის უმცირესი $\rho(t; z^0)$ და $\rho(t; z_1^0)$ მანძილებს შორის, რომლებიც განიხილება, შესაბამისად, $D$ და $D_1$ არეებში.

დ. კვესელავამ მნიშვნელოვანი შედეგები მიიღო კონფორმულ გადასახვებზე ინტეგრალური განტოლებების გამოყენების მიმართულებით. როგორც ცალადბმულ,

ასევე მრავლადბმულ კანონიკურ არეებზე კონფორმულად გადამსახველი ფუნქციებ-ის საპოვნელად მან შემოიტანა ახალი ინტეგრალური განტოლებები. ამ განტოლებებს არსებითი უპირატესობა გააჩნდათ იმ დროისთვის არსებულ ანალოგიური ტიპის განტოლებებთან შედარებით მიახლოებით გამოთვლებში მათი გამოყენებების თვალ-საზრისით. დ. კვესელავას მოწაფეების მიერ მოცემული და შესწავლილია ამ განტო-ლებების მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდები და შეფასებულია შესაბამისი ცდომილე-ბები. ხაზგასმით უნდა აღინიშნოს, რომ დ. კვესელავამ მიიღო ორადბმული არის კონ-ფორმული მოდულის გამოსახულების ცხადი სახე, რომლის გამოყენებით ზ. სამსო-ნიასთან თანაავტორობით, დაამტკიცა, რომ საკმაოდ ფართო კლასის საზღვრების მქონე $\varepsilon$-მახლობელ ორადბმული არეთა კონფორმული მოდულების სხვაობის რიგი $\varepsilon$-ის ტოლია.

**2. ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის სასაზღვრო ამოცანები.** ანალიზურ ფუნ-ქციათა თეორიის წრფივი სასაზღვრო ამოცანები საფუძვლიანად იქნა შესწავლილი საბჭოთა მათემატიკოსების მიერ, რაშიც დ. კვესელავამ საკმაოდ აქტიური მონაწილე-ობა მიიღო.

დ. კვესელავას და ნ. ვეკუას ერთობლივ ნაშრომებში ნაპოვნია რამდენიმე უც-ნობი ფუნქციისათვის ჰილბერტის სასაზღვრო ამოცანის კვადრატურებში ამოხსნის საკმარისი პირობები.

ერთი უცნობი ფუნქციის შემთხვევაში ჰილბერტის სასაზღვრო ამოცანის მი-მართულებით მნიშვნელოვანი შედეგები იქნა მიღებული დ. კვესელავას მიერ გახსნი-ლი კონტურისა და წყვეტილი კოეფიციენტებისათვის. ეს სამუშაოები შესრულდა აკა-დემიკოს ნიკო მუსხელიშვილთან თანაავტორობით და თითქმის მთლიანად შევიდა ამ უკანასკნელის ცნობილ მონოგრაფიაში "სინგულარული ინტეგრალური განტოლე-ბები". შრომათა ამ ციკლის ძირითად შედეგად შეიძლება ჩაითვალოს ამონახსნების სიმრავლის კლასებად დაყოფა და შესაბამისი ფუნდამენტური ცნების – სასაზღვრო ამოცანის ინდექსის შემოღება გახსნილი კონტურის შემთხვევაში. აქ ისეთივე დასრუ-ლებული შედეგების მიღება მოხერხდა, როგორც ჩაკეტილ კონტურიანი და უწყვეტ კოეფიციენტებიანი ამოცანის შემთხვევაში. უნდა აღინიშნოს, რომ დ. კვესელავამ ჰილბერტის სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა მიიღო ასევე უბან-უბან მერომორფული ფუნქციებისა და ურთიერთგადამკვეთი კონტურებისათვის. ამ შედეგს მნიშვნელოვა-ნი თეორიული და გამოყენებითი მნიშვნელობა აქვს.

დ. კვესელავამ განსაკუთრებულ წარმატებებს მიაღწია ანალიზური ფუნქცი-ებისათვის გადაადგილების შემცველი სასაზღვრო ამოცანების შესწავლაში. აქ სა-საზღვრო პირობებს წარმოადგენენ საზღვრის სხვადასხვა წერტილში გამოთვლილ ზღვარით მნიშვნელობებს შორის წრფივი თანაფარდობები. პირველად ასეთი ტიპის ამოცანა ჯერ კიდევ ბ. რიმანს ჰქონდა განხილული. სახელდობრ, მან დასვა ერთი კომ-პლექსური ცვლადის ანალიზური ფუნქციის მოძებნის ამოცანა, თუ არის საზღვარზე მოცემულია ერთი განტოლება, რომელიც შეიცავს ამ ფუნქციის ნამდვილ და წარმო-სახვით ნაწილებს. რიმანმა გამოთქვა მთელი რიგი მნიშვნელოვანი მოსაზრებები ამ ამოცანის ამოხსნადობის შესახებ, მაგრამ თავისი წინადადებების მკაცრი დამტკიცება არ მოუცია. პირველად დ. ჰილბერტმა მე-20 საუკუნის დასაწყისში ზოგიერთ კერძო

შემთხვევაში დაამტკიცა რიმანის მოსაზრება. მან განიხილა ჰოლომორფული ფუნქცია $\Phi(z)=u+iv$ შემდეგი წრფივი სასაზღვრო პირობით

$$\alpha u+\beta v=\gamma \tag{1}$$

ამ ამოცანას ჰილბერტმა რამდენიმე ნაშრომი მიუძღვნა. ერთ-ერთ მათგანში აჩვენა, რომ ეს ამოცანა შეიძლება ამოიხსნას ლაპლასის განტოლებისათვის დირიხლეს ორ ამოცანამდე დაყვანის გზით. ეს მეთოდი ძალიან მოხდენილია, მაგრამ მისი გამოყენების სფერო შეზღუდულია – დასმული ამოცანა ბოლომდე იხსნება მხოლოდ ცალადბმული არეებისათვის. მრავლადბმული არეების შემთხვევაში კი საჭიროა განსხვავებული მეთოდების გამოყენება. სწორედ ერთ-ერთი ასეთი ტიპის ამოცანა აქვს შესწავლილი დ. კვესელავას მრავლადბმული არეებისათვის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების თეორიის გამოყენებით. (1) ამოცანის მიმართ ჰილბერტს გამოყენებული აქვს ინტეგრალური განტოლებების მეთოდი, რომლის საშუალებითაც ეს ამოცანა დაჰყავს სინგულარულ განტოლებაზე, რომელიც შეიცავს ინტეგრალს კოშის მთავარი მნიშვნელობის აზრით. მაგრამ, იმ დროისათვის ასეთი განტოლებები არ იყო შესწავლილი. ამიტომ (1) ამოცანის მიმართ ჰილბერტი მცდარ შედეგებამდე მივიდა, გაავრცელა რა ფრედჰოლმის თეორემები სინგულარულ განტოლებებზე. მიუხედავად ამ წარუმატებლობისა, ჰილბერტის შრომებს დიდი მნიშვნელობა ჰქონდა. პირველად სწორედ ამ შრომებში იქნა აღნიშნული ის მჭიდრო კავშირი, რომელიც არსებობს ანალიზური ფუნქციების სასაზღვრო ამოცანებსა და კოშის გულიან სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებს შორის.

(1) ამოცანასთან ერთად ჰილბერტმა აგრეთვე განიხილა შემდეგი ამოცანა: ვიპოვოთ ორი ფუნქცია $\Phi^{+}(z)$ და $\Phi^{-}(z)$, რომლებიც $L$ ჩაკეტილ წირზე აკმაყოფილებენ პირობას

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t)+g(t), \qquad t\in L, \tag{2}$$

სადაც $\Phi^{+}(z)$ ჰოლომორფულია $L$-ის შიგნით, ხოლო $\Phi^{-}(z)$ კი – $L$-ის გარეთ. ჰილბერტმა ეს ამოცანაც ინტეგრალური განტოლებების დახმარებით ამოხსნა, მაგრამ რაიმე მნიშვნელოვანი შედეგისთვის არ მიუღწევია.

ჰილბერტის შრომების შემდეგ რიმანის პრობლემა ვითარდებოდა ორი მიმართულებით. ერთი მხრივ იკვლევდნენ იმავე ამოცანებს, რასაც ჰილბერტი იხილავდა, მაგრამ უფრო ზოგადი არისა და კოეფიციენტების პირობებში. მეორე მხრივ, იყო უფრო ზოგადი ამოცანების შესწავლის მცდელობები, რომლებიც არ იყო განხილული ჰილბერტის მიერ.

1907 წელს ჰილბერტის მოწაფე კ. გაზემანმა დასვა შემდეგი ამოცანა: ვიპოვოთ ორი ფუნქცია $\Phi^{+}(z)$ და $\Phi^{-}(z)$, რომლებიც მარტივი ჩაკეტილი $L$ წირის გასწვრივ აკმაყოფილებენ პირობას

$$\Phi^{+}[\alpha(t)]=G(t)\Phi^{-}(t)+g(t), \qquad t\in L, \tag{3}$$

სადაც $\Phi^{+}(z)$ ჰოლომორფულია $L$-ის შიგნით, ხოლო $\Phi^{-}(z)$ კი – $L$-ის გარეთ, $\alpha(t)$ – $t\in L$ ცვლადის კომპლექსური ფუნქციაა და ურთიერთცალსახად ასახავს კონტურს თავის თავში. თუ $\alpha(t)=t$, ცხადია, ვღებულობთ ამოცანა (2)-ს.

(1) ამოცანა განაზოგადა ტ. კარლემანმა, რომელმაც 1932 წელს განიხილა შემდეგი სახის ამოცანა

$$\Phi^{+}[\alpha(t)] = G(t)\Phi^{+}(t) + g(t), \qquad t \in L, \tag{4}$$

სადაც $\Phi^{+}(z)$ – საძიებელი ფუნქციაა, რომელიც ჰოლომორფულია $L$-ის შიგნით, ხოლო $\alpha$, $G$ და $g$ – იგივეა, რაც წინა ამოცანაში.

ზემოთ განხილულ ამოცანებთან ერთად დ. კვესელავამ განიხილა შემდეგი ამოცანები:

$$\Phi^{+}[\alpha(t)] = G(t)\overline{\Phi^{-}(t)} + g(t), \qquad t \in L, \tag{5}$$

$$\Phi^{+}[\alpha(t)] = G(t)\overline{\Phi^{+}(t)} + g(t), \qquad t \in L. \tag{6}$$

უნდა აღინიშნოს, რომ დ. კვესელავას შრომებამდე ყველაზე სრულად და უკეთ შესწავლილი იყო ჰილბერტის (2) ამოცანა, ხოლო (3)-(6) ამოცანები კი საკმაოდ ზედაპირულად იყო გამოკვლეული. როგორც აკადემიკოსი ი. ვეკუა აღნიშნავდა, დ. კვესელავამ "...შეძლო არსებითი ნაბიჯი გადაედგა წინ მათი შესწავლის საქმეში. პრინციპული თვალსაზრისით მან ამ ამოცანების მიმართ შეძლო ისეთივე დასრულებული სახის შედეგების მიღება, როგორიც არსებობდა ჰილბერტის (2) ამოცანის შემთხვევაში... აუცილებლად მიმაჩნია კიდევ ერთხელ გავუსვა ხაზი იმ გარემოებას, რომ ზემოთ ჩამოთვლილი ამოცანების ამოხსნით დ. კვესელავამ თვალსაჩინო სამეცნიერო შედეგებს მიაღწია. მანამდე ამ მიმართულებით მხოლოდ კარლემანს ეკუთვნოდა მნიშვნელოვანი წინ გადადგმული ნაბიჯი, ააგო რა თავისი ამოცანისთვის მარტივი ინტეგრალური განტოლებები. ხოლო დ. კვესელავამ გადაჭრა ყველაზე რთული საკითხი – მან დაამტკიცა, რომ როგორც კარლემანის განტოლება, ასევე, სხვა ამოცანებისათვის მიღებული ინტეგრალური განტოლებებიც, ამოხსნადია, რის საფუძველზეც შემდგომში მან შეძლო მთელი რიგი მნიშვნელოვანი თეორემების დამტკიცება (3)-(6) ამოცანების მიმართ."

ამ შედეგებმა მნიშვნელოვანი როლი ითამაშა სასაზღვრო ამოცანების და გადაადგილების შემცველი სინგულარული ინტეგრალური თეორიის შემდგომ განვითარებაში და მრავალი ავტორის სამეცნიერო სტატიების მასტიმულირებელ ფაქტორად იქცა. გამოქვეყნდა მრავალი ნაშრომი, რომლებშიც მოცემული იყო დ. კვესელავას შედეგების უფრო ზოგად შემთხვევებისათვის გადატანის მეთოდები. განსაკუთრებული ყურადღება მიექცა ასეთი ამოცანების განხილვას უცნობი ფუნქციების სისტემის შემთხვევაში.

ამ თემატიკასთან დაკავშირებით მოვიყვანოთ დ. კვესელავას ერთი შედეგი, რომელიც მთელი ამ პრობლემატიკის გადაწყვეტის გასაღებს წარმოადგენს.

ვთქვათ $\alpha_{+}(t)$ $(\alpha_{-}(t))$ – ლიაპუნოვის მარტივი ჩაკეტილი $L$ კონტურის დიფერენცირებადი ჰომეომორფიზმია თავის თავში, რომელიც ინახავს (ცვლის) ორიენტაციას $L$-ზე. ამასთან $L$-ზე $\alpha_{\pm}(t) \neq 0$ და $\alpha_{\pm}(t)$ იმავე $L$-ზე აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას. მაშინ $L$-ზე ელემენტარულ სასაზღვრო ამოცანებს

$$\Phi^{+}[\alpha_{+}(t)] = \Phi^{-}(t),$$

$$\Phi^{+}[\alpha_{-}(t)] = \Phi^{+}(t),$$

არ გააჩნიათ მუდმივის გარდა სხვა ანალიზური ამოხსნები.

**3. სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების თეორია.** გახსნილი კონტურებისთვის ან წყვეტილი კოეფიციენტებისათვის ჰილბერტის სასაზღვრო ამოცანის

ამოხსნამ სათანადო შემთხვევებში კოშის ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობის შემცველი შემდეგი სახის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების თეორიის საკმაოდ ეფექტურად აგების შესაძლებლობა გააჩინა

$$\alpha(t)\varphi(t)+\frac{\beta(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t}+\frac{1}{\pi i}\int_L K(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = f(t),$$

და, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ამ თეორიას ისეთივე დასრულებული სახე მიეცა, როგორც ეს ადრე იყო გაკეთებული ჩაკეტილი კონტურების და უწყვეტი კოეფიციენტების შემთხვევაში.

დ. კვესელავას შრომები ეხება ასეთი განტოლებების თეორიის აგებას შემდეგ შემთხვევებში:

($i$) წირი $L$ შედგება ცალ-ცალკე მდებარე სასრული რაოდენობის გახსნილი გლუვი რკალებისაგან, ხოლო $\alpha(t),\beta(t),K(t,\tau)$ ფუნქციები ეკუთვნიან ჰელდერის კლასს;

($ii$) წირი $L$ შედგება ცალ-ცალკე მდებარე სასრული რაოდენობის ჩაკეტილი გლუვი კონტურებისაგან, ხოლო $\alpha(t),\beta(t),K(t,\tau)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ჰელდერის პირობას ყველგან $L$-ზე, გარდა სასრული რაოდენობის პირველი გვარის წყვეტის წერტილებისა;

($iii$) წირი $L$ შედგება სასრული რაოდენობის ჩაკეტილი და გახსნილი უბან-უბან გლუვი კონტურებისაგან, რომლებსაც გააჩნიათ სასრული რაოდენობის თანაკვეთა, ხოლო $\alpha(t),\beta(t),K(t,\tau)$ ფუნქციები ეკუთვნიან ჰელდერის კლასს.

ამოხსნათა მიკავშირებული კლასების და ინტეგრალური განტოლებებისათვის ამ კლასების შესაბამისი ინდექსების ცნებების შემოტანამ ზემოთ ჩამოთვლილ შემთხვევებში გააჩინა ასეთი ინტეგრალური განტოლებების დასრულებული თეორიის აგების შესაძლებლობა. დღეს უკვე ეს შედეგები სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების თეორიის კლასიკას განეკუთვნება.

## დ. კვესელავას ძირითადი ნაშრომები

### სამეცნიერო სტატიები:


1. Об одной теореме Островского. Сообщения Грузинского филиала АН СССР, 1, 3, 1940, 171-174, (соавтор М.А. Лаврентьев).
2. К принципу Lindelofa. Сообщения Грузинского филиала АН СССР, 1, 10, 1940, 713-715.
3. Об одной краевой задаче теории функций комплесного переменного. Сообщения АН Грузинской ССР, 2, 3, 1941, 233-240, (соавтор Н.П. Векуа).
4. Об одной краевой задаче теории функций комплесного переменного и ее применение к решению систем сингулярных интегральных уравнений. Труды Тбилисского Математического Института АН Грузинской ССР, 9, 1941, 38-48, (соавтор Н.П. Векуа).

5. К теории конформных отображений. Труды Тбилисского Математического Института АН Грузинской ССР, 9, 1941, 19-32.
6. Сингулярные интегральные уравнения с ядрами типа Коши на разомкнутых контурах. Труды Тбилисского Математического Института АН Грузинской ССР, 11, 1942, 141-172, (соавтор Н.И. Мусхелишвили).
7. Сингулярные интегральные уравнения с разрывными коеффициентами. Труды Тбилисского Математического Института АН Грузинской ССР, 13, 1944, 1-27.
8. О конформном отображений смежных обласгей. Сообщения АН Грузинской ССР, 5, 1945, 463-472.
9. Задача Римана-Гильберта для многосвязной области. Сообщения АН Грузинской ССР, 6, 8, 1945, 581-590.
10. Об одной граничной задаче теории функций. Сообщения АН Грузинской ССР, 7, 9-10, 1946, 609-614.
11. Решение одной граничной задачи теории функций. Доклады АН СССР, 53, 8, 1946, 683-686.
12. Решение одной граничной задачи Т. Карлемана. Доклады АН СССР, 55, 8, 1947, 683.
13. Некоторые граничные задачи теории функций. Труды Тбилисского Математического Института им. А.М. Размадзе АН Грузинской ССР, 16, 1948, 39-90.
14. Граничная задача Гильберта и сингуларные интегральные уравнения в случае пересекающихся контуров. Труды Тбилисского Математического Института им. А.М. Размадзе АН Грузинской ССР, 17, 1949, 1-27.
15. О применении интегральных уравнений в теории конформных отображений. Труды Вычислительного Центра АН Грузинской ССР, 2, 1962, 3-15.
16. О конформных модулях близких двусвязных областей. Вопросы Прикладной Математики. Труды Вычислительного Центра АН Грузинской ССР, 9, 1, 1969, 5-12, (соавтор З.В. Самсония).
17. Формула Дини-Шварца для крутового кольца. Вопросы Вычислительной Математики. Труды Вычислительного Центра АН Грузинской ССР, 12, 1, 1973, 214-217, (соавтор Х.Т. Тлехугов).
18. Формула Чизотти для многосвязанных круговых областей. Вычислительная Математика и Программирование. Труды Вычислительного Центра АН Грузинской ССР, 17, 1, 1977, 256-260, (соавтор Х.Т. Тлехугов).
19. Квазиконформные отображения областей. Метрические Проблемы Теории Функций, Науково Думка, Киев, 1980, 53-65.

## სახელმძღვანელო

1. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციები. თბილისი, თსუ, 1966.