ვექტორების ნამრავლები

ჩვენ გვქონდა წრფივი ოპერაციები ვექტორებზე, ანუ ვიცით ვექტორების შეკრება და რიცხვის გამრავლება ვექტორზე.

არსებობს კიდევ შემდეგი ოპერაციები ვექტორებზე (ვექტორთა ნამრავლები):

* ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი;

** ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი;

*** სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი.

განსაზღვრება. ***a და b ვექტორების სკალარული ნამრავლი ეწოდება რიცხვს***

$|a|\,|b|\cos\varphi$, ამ ვექტორების სიგრძეების ნამრავლი მათ შორის კუთხის კოსინუსზე.

ჩვენ სკალარულ ნამრავს ავღნიშნავთ უბრალოდ ab სიმბოლოთი:

ანუ $ab=|a|\,|b|\cos\varphi$.

ზოგ წიგნებში სკალარული ნამრავლი ასე აღინიშნება (a,b) .

ცხადია თუ ერთ-ერთი ვექტორი ნულოვანია, მაშინ სკალარული ნამრავლი უდრის 0-ს. ხოლო არანულოვანი ვექტორების სკალარული ნამრავლის ნიშანი განისაზღვრება მათ შორის კუთხით:

- ***კუთხე მახვილია, მაშინ $ab>0$;***
- ***კუთხე ბლაგვია, მაშინ $ab>0$;***
- ***კუთხე მართია, მაშინ $ab=0$.***

სკალარულ ნამრავლს აქვს შემდეგი თვისებები:

1. ***სკალარული ნამრავლი კომუტაციურია: $ab=ba$;***
   ცხადია განსაზღვრებით.
2. ***სკალარული ნამრავლი ასოციატურია $(\lambda a)b=\lambda(ab)$.***
   დამტკიცება: როცა a ან $b=0$ ცხადია. ვთქვათ $a,b\neq 0$.
   გავიხსენოთ მესამე ლექციიდან ვექტორის პროექცია ღერძზე და შევნიშნოთ რომ a, b ვექტორების სკალარული ნამრავლი იგივეა რაც a ვექტორის პროექცია b ვექტორზე: $ab=pr_b(a)==|a|\,|b|\cos\varphi$.

ამიტომ $(\lambda a)b = b(\lambda a) = |b|\, pr_b\,(\lambda a) = \lambda) = |b|\, pr_b\,(a) = \lambda(ab)$.

3. *სკალარული ნამრავლი დისტრიბუტიულია(განრიგებადია):*
   $(a+b)\ c = ac+bc$.

   ისევ ვექტორის პროექცია გავიხსენოთ. გვაქვს

   $(a+b)c = |c|\, pr_c(a+b) = |c|(\, pr_c a + pr_c b) = |c|\, pr_c a + |c| pr_c b = ac+bc$.

4. სკალარული კვადრატი $a^2 = a\, a = |a||a| cos\ 0 = |a|^2$.

სკალარული ნამრავლის კოორდინატები.

განვიხილოთ სივრცეში i,j,k საკოორდინატო მგეზავები. როგორც ვიცით ეს ვექტორები ქმნიან ორთოგონულ ბაზისს. რადგან ამ ვექტორების სიგრძეები ერთეულოვანია ამბობენ რომ გვაქვს **ორთონორმირებული ბაზისი**.

თეორემა. სკალარული ნამრავლის კოორდინატები ორთონორმირებულ ბაზისში ტოლია ამ ვექტორების შესაბამისი კოორდინტების ნმრავლთა ჯამის. ე.ი.

თუ $a = (x_a\,, y_a\,, z_a)$ ***და*** $b = (x_b\,, y_b\,, z_b)$ ***მაშინ*** $ab = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$.

დამტკიცება. გვაქვს

$a = x_a i + y_a j + z_a k$ *და* $b = x_b i + y_b\, j + z_b\, k$.

სკალარული ნამრავლის განსაზღვრებით გვაქვს

$ij = jk = ki = 0$ და $i^2 = j^2 = k^2 = 1$.

თეორემის დასამტკიცებლად გავითვალისწინოთ ეს ტოლობები და გადავამრავლოთ a და b ვექტორები როგორც მრავალწევრები ■

მაგალითი. *ვთქვათ მოცემულია შემდეგი ვექტორები ორთონორმირებულ ბაზისში* $a=(2,3,4)$; $b=(5,6,7)$. *მაშინ* $ab = 2\cdot5+3\cdot6+4\cdot7 = 56$.

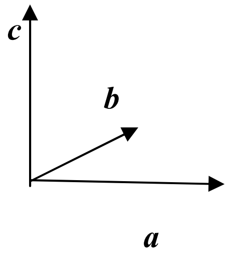
ვექტორული ნამრავლი.

შივრცის ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი არის ისევ ვექტორი. მისი განსაზღვრება ეყრდნობა შემდეგ ცნებას.

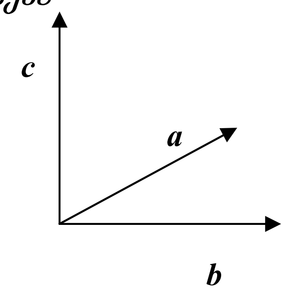
განსაზღვრება. a,b,c არაკომპლანარულ ვექტორთა დალაგებულ სამეულს ეწოდება მარჯვენა, თუ a ვექტორის მიმათულების დამთხვევა b ვექტორის

*მიმართულებასთან ხდება **a** ვექტორის უმოკლესი მობრუნებით **b** ვექტორისკენ ამ ვექტორებზე გამავალ სიბრტყეში, რაც c ვექტორიდან მიჩანს როგორც ბრუნვა საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით. სხვა შემთხვევაში,(მობრუნება საათის ისრის მიმართულებით) სამეულს ეწოდება მარცხენა.*

მარჯვენა



მარცხენა



ამრიგად შეიძლება ვილაპარაკოთ მარჯვენა ან მარცხენა ბაზისზე.

*განსაზღვრება. **a** და **b** ვექტორების ვექტორული ნამრავლი ეწოდება ისეთ c ვექტორს , რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სამ პირობას:*

1. *c ვექტორი ორთოგონულია **a** და **b** ვექტორების ;*
2. *c ვექტორის სიგრძე ტოლია $|c|=|a|\,|b|\sin\varphi$,*
   *სადაც φ კუთხეა a და **b** ვექტორებს შორის.*
3. *სამეული **a,b,c** არის მარჯვენა.*

ვექტორული ნამრავლი აღინიშნება ასე **a x b** (ზოგჯერ წიგნებში ასე **[a,b]**).

თუ **a, b** ვექტორებიდან ერთი მაინც ნულოვანია, ან **a, b** ვექტორები კოლინეარულია, მაშინ 2 პირობის თანახმად ვექტორული ნამრავლი ნულ ვექტორი იქნება.

ამრიგად 2 პირობიდან ადვილად გამომდინარეობს ვექტორული ნამრავლის გეომეტრიული თვისებები:

1. იმისათვის რომ ორი ვექტორი კოლინეარული იყოს აუცილებელია და საკმარისი მათი ვექტორული ნამრავლი ნულ ვექტორი იყოს.
2. თუ **a** და **b** ვექტორები არაკოლინარულია, მაშინ ვექტორული ნამრავლის სიგრძე **|a x b|** ტოლია **a** და **b** ვექტორებზე აგებულ პარალელოგრამის ფართობის.

ვექტორული ნამრავლის ალგებრული თვისებები:

1. **a x b = - b x a** (ანტიკომუტაციურობა);

2. **(λa) x b=λ(a x b) (ასოციატურობა);**
3. **(a+b) x c = a x c + b x c (დისტრიბუციულობა).**

(დამკტიცება შეიძლება გეომეტრიული გზით. თუ გაინტერესებთ იხ. მაგ. Ильин“ Позняк- Аналитичесая Геометрия გვ. 71).

ვექტორული ნამრავლის კოორდინატები.

კვლავ განვიხილოთ განვიხილოთ სივრცეში ორთონორმირებული ბაზისი **i, j, k**

ანუ მგეზავებისგან შედგენილი ბაზისი და ვთქვათ დამატებით ეს ბაზისი მარჯვენაა.

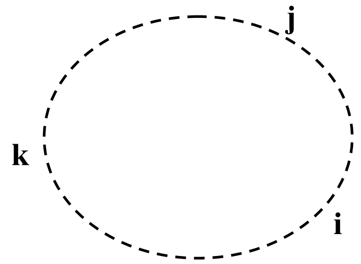
მაშინ განსაზღვრებით გვაქვს:

i x j =k; j x i = - k;

j x k =i; k x j=- i;

k x i =j; i x k= - j.

i x i=j x j=k x k=0.



(ამ ფორმულების დამახსოვრება ხდება ასე: ორი განსხვავებული სიმბოლოს ნამრავლი არის მესამე სიმბოლო + ნიშნით თუ მიმართულება “პირველი სიმბოლო, მეორე სიმბოლო” საათის ისრის მიმართულების საწინააღმდეგოა. შესაბამისად – მინუს ნიშანია როცა საათის ისრის მიმართულებით ვამრავლებთ.)

თეორემა. a=(x_a , y_a , z_a) და b=(x_b , y_b , z_b) მაშინ

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} k$$

დამტკიცება. გვაქვს

***a*= $x_a i + y_a j + z_a k$ და *b*= $x_b i + y_b j + z_b k$.**

თეორემის დასამტკიცებლად გავითვალისწინოთ ვექტოული გამრავლების ტოლობები ბაზისისთვის (როგორც ზემოთაა) და გადავამრავლოთ a და b ვექტორები როგორც მრავალწევრები. თუ მოცემულ მესამე რიგის დეტერმინანტს გავშლით მივიღებთ ტოლობას. ■

მაგალითი. a=(1,2,2); b=(2,-1,-1);

$$a \times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} k = 5j-5k$$

ანუ

a x b=(0,5,-5).

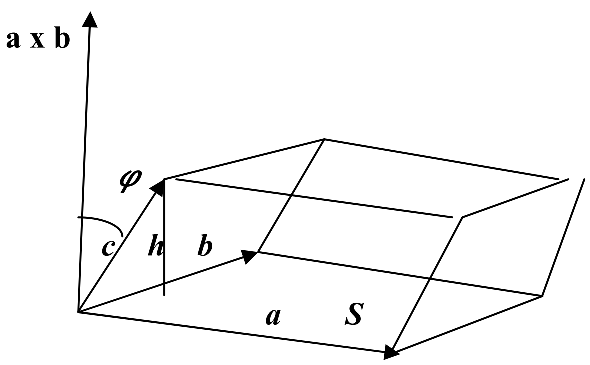
ვექტორთა შერეული ნამრავლი.

განსაზღ. **a,b,c** სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი ეწოდება რიცხვს **(a x b)c,** ანუ ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლის და მესამე ვექტორის სკალარულ ნამრავს.

შერეული ნამრავლი აღინიშნება ასე ***abc*** *. ამ ნამრავლს აქვს მარტივი გეომეტრიული შინაარსი:*

თეორემა. სამი არაკომპლანარული ვექტორის შერეული ნამრავლი **abc** ტოლიაამ ვექტორებზე აგებულ პარალელოპიპედის მოცულობის, აღებულს + ნიშნით თუ **a,b,c** სამეული მარჯვენაა და – ნიშნით თუ ეს სამეული მარცხენაა.

დამტკიცება.



მართლაც **|a x b|** ტოლია **S** ფუძის ფართობის. **|c| cos** ***φ*****= h** პარალელოპიპედის სიმაღლის.■

შერეული ნამრავლის სხვა თვისებებია:

1. ციკლური გადასმები
   (a x b)c=(b x c)a=(c x a)b.
   სწორედ ამ თვისების გამო შერეული ნამრავლის აღნიშვნაში **abc** ფრჩხილები არ მონაწილეობს .

2. **a,b,c** ვექტორები კომპლანარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ **abc**=0.
3. ***(λa)bc= λ(abc)* ასოციურობა.**
4. $(\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2})\boldsymbol{bc} = \boldsymbol{a_1}\,\boldsymbol{bc} + \boldsymbol{a_2}\,\boldsymbol{bc}$;

შერეული ნამრავლის კოორდინატები.

Isევე როგორც ვექტორული ნამრავლის შემთხვევაში ვთქვათ ვექტორები მოცემულია კოორდინატებით ორთონორმირებულ ბაზისში ***i,j,k*** *:*

***a**=(x_a , y_a , z_a), **b**=(x_b , y_b , z_b) და **c**=(x_c , y_c , z_c) მაშინ*

abc=(a x b)c=

$$= a\left(\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} k\right) =$$

$$= x_a \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} + y_a \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} + z_a \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} \quad \blacksquare$$