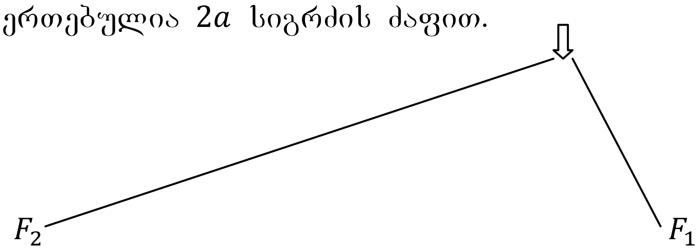
<u>მეორე რიგის წირები</u>

ელიფსი

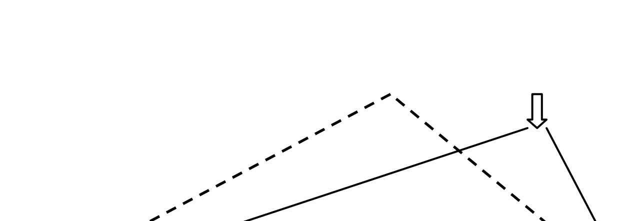
განსაზღვრება. *დავაფიქსიროთ სიბრტყეზე ორი წერტილი F_1 და F_2. ვთქვათ ამ წერტილებს შორის მანძილი არის $2c$. სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლეს რომელთაგან F_1 და F_2 წერტილებამდე მანძილების ჯამი მუდმივი სიდიდეა (ვთქვათ ეს სიდიდეა $2a$) ეწოდება* ***ელიფსი.***

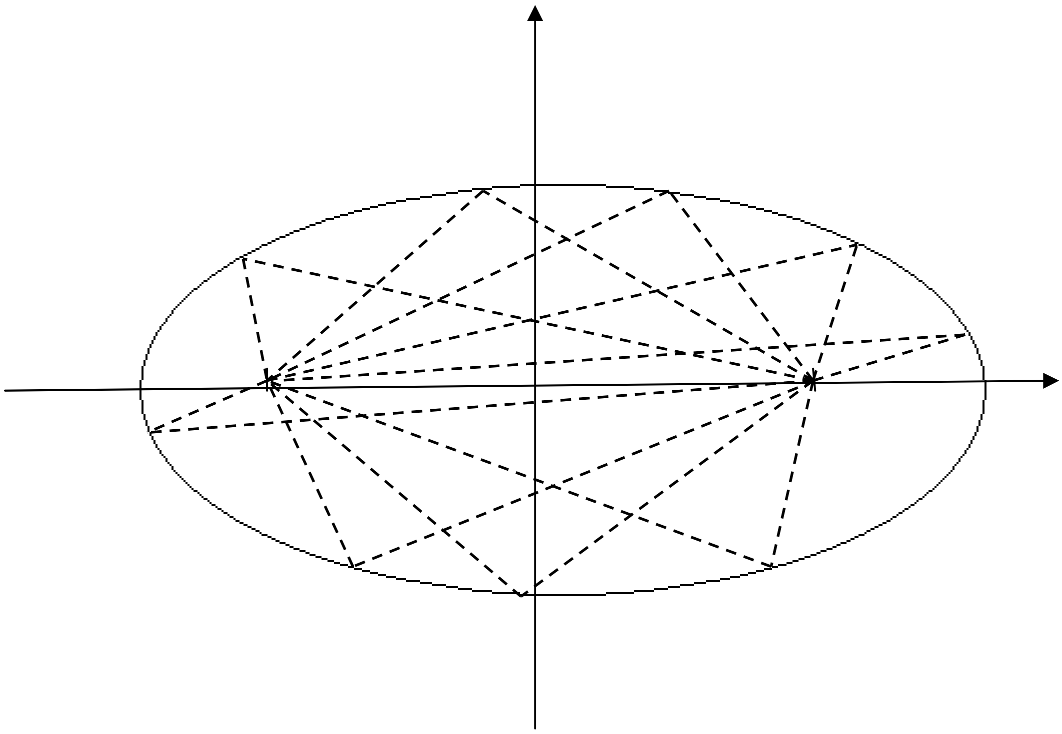
ელიფსის ეს განსაზღვრება საშუალებას იძლევა გეომეტრიულად ავაგოთ ის. წარმოვიდგინოთ რომ F_1 და F_2 ჭიკარტებით დამაგრებულია დაფაზე. F_1 და F_2

შეერთებულია $2a$ სიგრძის ძაფით.



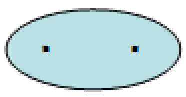
დავჭიმოთ ეს ძაფი ფანქრის წვერით და ფანქარი ვამოძრაოთ ისე რომ ძაფი დაჭიმულ მდგომარეობაში იყოს. მაშინ ფანქრის წვერით ჩვენ დავხატავთ ელიფსს.



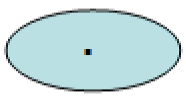


ელიფსის ელემენტებია:

ფოკუსები. ფოკუსებს შორის მანძილია $2c$.

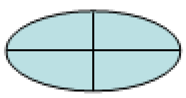


ცენტრი.



ღერძები. ეს ორი ღერძი ელიფსის სიმეტრიის ღერძებიცაა.

დიდი ნახევარღერძია $\boldsymbol{a}$, პატარა კი $\boldsymbol{b}$.



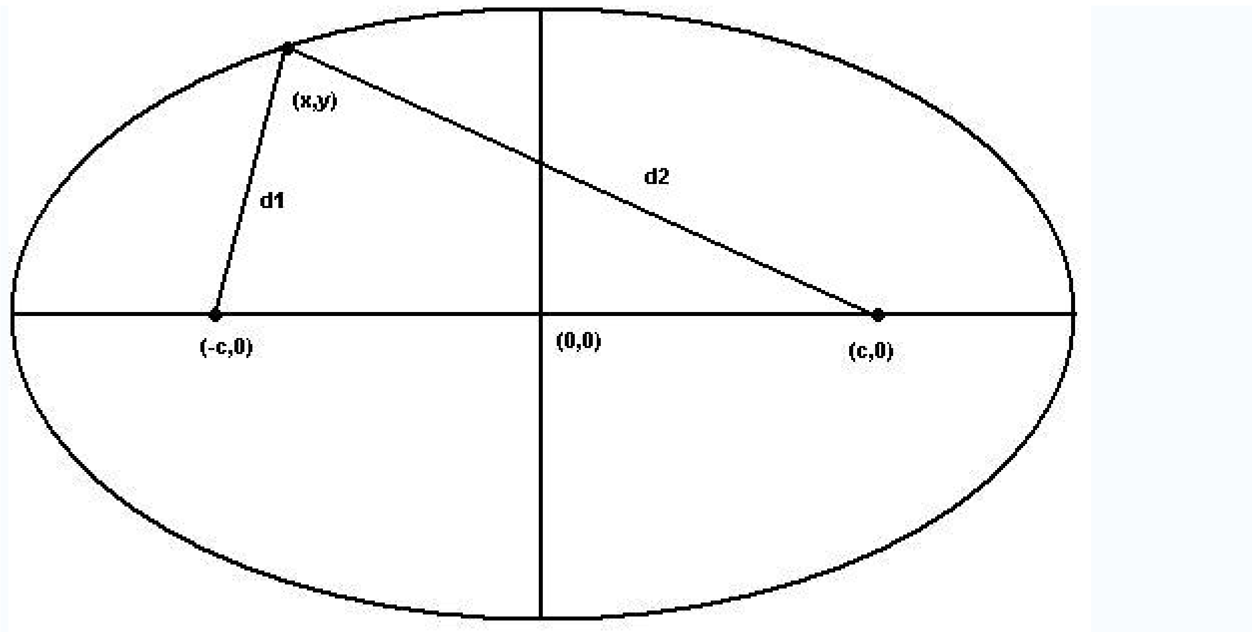
ოთხი წვერო - ელიფსის ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები.

ელიფსის კანონიკური განტოლება

ვისარგებლოთ ელიფსის განსაზღვრებით და გამოვიყვანოთ მისი განტოლება.

კოორდინატთა სისტემა სათავე დავამთხვიოთ ელიფსის ცენტრს, ხოლო კოორდინატთა ღერძები ელიფსის ღერძებს. მაშინ ფოკუსების კოორდინატებიიქნება $F_2(-c, 0)$ და $F_1(c, 0)$.

ავიღოთ ელიფსის ნებისმიერი წერტილი $M(x, y)$.



ელიფსის განსაღვრების თანახმად

$d_1 + d_2 = 2a$ სადაც $d_1 = |MF_1|$=$\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ და $d_2 = |MF_2|$=$\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

ე.ი.

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a. \qquad (1)$$

(1)-ში მარჯვენა ფესვი დაგავიტანოთ ტოლობის მარჯვენა მხარეს და მიღებული გამოსახულება ავიყვანოთ კვადრატში, მივიღებთ

$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2 + y^2$

გავამარტივოთ

$$\sqrt{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})^2+\boldsymbol{y}^2} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\varepsilon x}, \qquad (2)$$

სადაც $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{c}{a}$ და ეწოდება ელიფსის **ექსცენტრისიტეტი**.

შემდეგ, (2) ისევ ავიყვანოთ კვადრატში და გავამარტივოთ.

$(x + c)^2 + y^2 = a^2 + 2a\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2$,

ანუ

$\frac{x^2}{a^2}(a^2 - c^2) + y^2 = a^2 - c^2$.

გავყოთ $a^2 - c^2$ -ზე და შემოვიღოთ აღნიშვნა $a^2 - c^2 = b^2 > 0$.

საბოლოოდ მივიღებთ

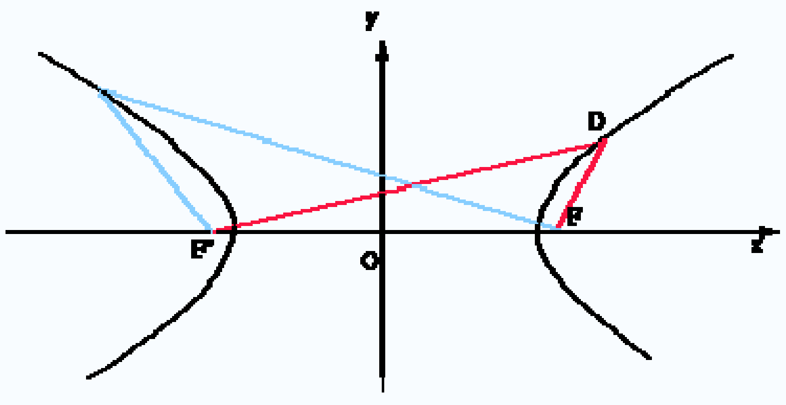
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

(3)-ს ეწოდება **ელიფსის კანონიკური განტოლება**.

ჰიპერბოლა

განსაზღვრება. *დავაფიქსიროთ სიბრტყეზე ორი წერტილი F და F′. ვთქვათ ამ წერტილებს შორის მანძილი არის 2c. სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლესრომელთაგან F და F′ წერტილებამდე მანძილების **სხვაობა** მუდმივი სიდიდეა(ვთქვათ ეს სიდიდეა 2a) ეწოდება **ჰიპერბოლა.** F და F′ წერტილებს ეწოდება ფოკუსები.*

შენიშვნა. *აქ იგულისხმება რომ უდიდეს მანძილს აკლდება უმცირესი.*



ნახ(1)

ჰიპერბოლის ***კანონიკური განტოლება*** *გამოიყვანება ელიფსის ანალოგიურად და აქვს სახე*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \qquad (4)$$

ოღონდ აქ $c^2 - a^2 = b^2 > 0$.

კერძოდ: განსაზღვრებიდან გამოდის რომ ჰიპერბოლას აქვს სიმეტრიის ორი ღერძი: ერთი გადის F, F' ფოკუსებზე(ნამდვილი ღერძი), მეორე კი FF' მონაკვეთის შუაპერპენდიკულარია(წარმოსახვითი ღერძი). ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა ისე რომ X ღერძი დაემთხვეს ნამდვილ ღერზს, კი წარმოსახვითს. ნახ(1).

მაεεშინ ფოკუსების კოორდინატებია F(c,0) და F'(c,0). ავიღოთ ჰიპერბოლის ნებისმიერი წერტილი $D(x, y)$. განსაზღვრებით გვაქვს

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ +$\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ =$\pm 2a$.

გასამარტივებლად გადავიტანოთ მარჯვენა ფესვი განტოლების მარჯვენა მხარეს და კვადრატში ავიყვანოთ.

$(x-c)^2$+y^2=$(x+c)^2$+$y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$+$4a^2$.

გავამარტივებით მივიღებთ

-$\varepsilon x - a = \ \pm\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

ანუ

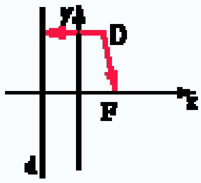
$\sqrt{(x+c)^2+y^2}$= $|\varepsilon x + a\,|$, სადაც $\varepsilon = {}^{c}/_{a}$.

მეორედ ავიყვანოთ კვადრატში და შემოვიღოთ აღვიშვნა $b^2 = c^2 - a^2$, მივიღებთ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \qquad \text{რ.დ.გ.}$$

პარაბოლა

განსაზღვრება. დავაფიქსიროთ სიბრტყეზე წრფე d და მის გარეთ მდებარე წერტილი $\boldsymbol{F}$. **d** წრფიდან და $\boldsymbol{F}$ წერტილიდან თანაბრად დაშორებულ სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეს ეწოდება პარაბოლა.



ნახ. (ა)

F წერტილს ეწოდება პარაბოლის **ფოკუსი,** **d** წრფეს კი პარაბოლის **დირექტრისა.** ვთქვათ მანძილი ფოკუსიდან დირექტრისამდე არის $\boldsymbol{p}$.

მაშინ ფოკუსის კოორდინატებია $F({}^{p}/_{2}, 0)$, ხოლო დირექტრისის განტოლება

იქნება $x = -{}^{p}/_{2}$.

ანუ განსაზღვრებით გვექნება

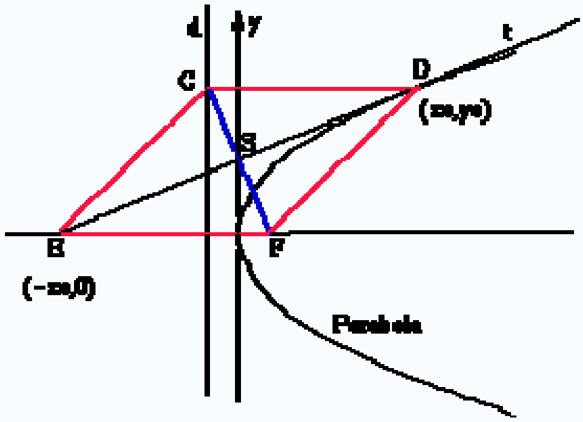
$\sqrt{(x - {}^{p}/_{2})^2 + y^2}$ = | $x + {}^{p}/_{2}$ |.

ავიყვანოთ კვადრატში და შევაერთოთ მსგავსი წევრები, მივიღებთ

პარაბოლის კანონიკურ განტოლებას

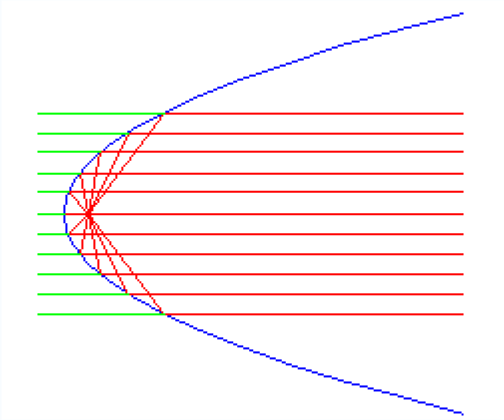
$$\mathbf{y^2 = 2px.}$$

პარაბოლას კარგი გეომეტრიული თვისებები აქვს. (სამწუხაროდ ჩვენ მათზე დეტალურად ვერ ვისაუბრებთ), მაგალითად პარაბოლის $D(x_0, y_0)$ წერტილზე გამავალი მხები X ღერძს -x_0 აბცისის მქონე წეტრილში კვეთს. (ნახ ბ.)



ნახ(ბ)

ან პარაბოლის ოპტიკური თვისებაა (ნახ გ.) ის რომ ფოკუსიდან გამოსული სინათლის სხივი X ღერძის პარალელურად აირეკლება.



ნახ. გ.

აქ მთავრდება ჩვენი ლექციები.

ბოლოს ერთი ნახევრად სახუმარო კითხვა: არის რაიმე კავშირი "პარაბოლას" და "პარლამენტს" შორის?

თურმე არის.

ეს მეორე რიგის წირები ელიფსი, ჰიპერბოლა და პარაბოლა ალექსანდრე მაკედონელის მათემატიკის მასწავლებელმა სახელად Menaechmus (375-325 საუკუნე ქრისტემდე), აღმოაჩინა როგორც კონუსის და სიბრტყის თანაკვეთები. მისი ტერმინია "პარაბოლა" რაც ბერძნულად "პარალელურად დაგდებულს" ნიშნავს. დროთა განმავლობაში ლათინურში შემოვიდა ტერმინები "ჰიპერბოლური ლაპარაკი " , ლაპარაკი რომელიც ფაქტებს შორს გაჰყვება", "ელიფსური ლაპარაკი" ანუ "ელიპსის"- ფაქტებს ცოტა ჩამორჩება, ხოლო "პარაბლი" კი ზუსტად იყენებს ფაქტებს. ისე რომ ძველ რომში "*parabolare" საერთოდ ლაპარაკს ნიშნავდა, ხოლო ფრანგულმა ენამ მოგვცა parley, parlance, parlor, **parliament**, parole…*