И. Т. Кигурадзе, О периодических решениях систем неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений, *Матем. заметки*, 1986, том 39, выпуск 4, 562–575

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 39, № 4 (1986)

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ НЕАВТОНОМНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. Т. Кигурадзе

1. Формулировка основных результатов. Установлены признаки существования и единственности периодического решения системы неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

и указан способ его построения. Из работ, выполненных раньше в этом направлении, отметим [1—3].

Ниже приняты следующие обозначения. $\mathbf{R}$ — множество действительных чисел; $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty[$, $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^n_+$ — n-кратные декартовы произведения $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_+$ на себя; $(x_i)_{i=1}^n$ и $(p_{ik})_{i,k=1}^n$ — n-мерный вектор-столбец и $n \times n$ — матрица с элементами x_i и p_{ik} $(i, k = 1, \ldots, n)$; L_ω — множество действительных ω-периодических функций, интегрируемых по Лебегу на $[0, \omega]$, а $L_\omega^{n\times n}$ — множество матричных функций с элементами $p_{ik} \in L_\omega$ $(i, k = 1, \ldots, n)$; K_ω^n — множество вектор-функций $(f_i)_{i=1}^n : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, каждая компонента которых удовлетворяет условиям Каратеодори на любом компакте, содержащемся в $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, и периодична по первому аргументу с периодом ω, т. е.

$$f_i(t + \omega, x_1, \ldots, x_n) \equiv f_i(t, x_1, \ldots, x_n).$$

Если $p \in L_\omega$ и $\int_0^\omega p(s)\, ds \neq 0$, то

$$g(p)(t,\tau)=$$
$$=\begin{cases}\left|1-\exp\left(\int_0^\omega p(s)\,ds\right)\right|^{-1}\exp\left(\int_\tau^t p(s)\,ds\right) & \text{при } 0\leqslant\tau\leqslant t,\\ \left|1-\exp\left(\int_0^\omega p(s)\,ds\right)\right|^{-1}\exp\left(\int_\tau^t p(s)\,ds+\int_0^\omega p(s)\,ds\right) & \\ & \text{при } t<\tau\leqslant\omega.\end{cases}$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что

$$(f_i)_{i=1}^n\in K_\omega^n, \tag{2}$$

где $\omega>0$.

Наряду с системой дифференциальных уравнений (1) рассмотрим и систему дифференциальных неравенств

$$\sigma_i y_i'(t)\leqslant\sum\nolimits_{k=1}^n p_{ik}(t)\,y_k(t)\qquad(i=1,\ldots,n), \tag{3}$$

где $\sigma_i\in\{-1,1\}$ и $p_{ik}\in L_\omega$. Под решением этой системы будем понимать абсолютно непрерывную вектор-функцию $(y_i)_{i=1}^n\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$, которая почти всюду на $\mathbf{R}$ удовлетворяет (3). Решение будем называть неотрицательным, если его компоненты являются неотрицательными функциями.

Определение. Скажем, что матричная функция $(p_{ik})_{i,k=1}^n\in L_\omega^{n\times n}$ принадлежит классу $U_\omega^{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}$, если $p_{ik}(t)\geqslant 0$ при $t\in\mathbf{R}$, $i\neq k$, и система дифференциальных неравенств (3) не имеет ненулевого неотрицательного ω-периодического решения.

Предложение 1. *Пусть* $(p_{ik})_{i,k=1}^n\in L_\omega^{n\times n}$, $p_{ik}(t)\geqslant 0$ *при* $t\in\mathbf{R}$, $i\neq k$,

$$\int_0^\omega p_{ii}(t)\,dt<0\qquad(i=1,\ldots,n) \tag{4}$$

и спектральный радиус матрицы $(s_{ik})_{i,k=1}^n$, *где*

$$s_{ii}=0,$$
$$s_{ik}=\max_{0\leqslant t\leqslant\omega}\int_0^\omega g(\sigma_i p_{ii})(t,\tau)\,p_{ik}(\tau)\,d\tau\ \text{ при } i\neq k,$$

меньше единицы. Тогда

$$(p_{ik})_{i,k=1}^n\in U_\omega^{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}. \tag{5}$$

Предложение 2. *Пусть* $(p_{ik})_{i,k=1}^n$ — *постоянная матрица и* $p_{ik}\geqslant 0$ *при* $i\neq k$. *Тогда для выполнения* (5) *необходимо и достаточно, чтобы действительная часть каждого собственного значения* $(p_{ik})_{i,k=1}^n$ *была отрицательна.*

ТЕОРЕМА 1. *Пусть на* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *соблюдаются неравенства*

$$\sigma_i f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} x_i \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^n p_{ik}(t)|x_k| + q(t) \qquad (i = 1, \ldots, n), \qquad (6)$$

где $\sigma_i \in \{-1, 1\}$, $q \in L_\omega$, *а матрица* $(p_{ik})_{i,k=1}^n$ *удовлетворяет условию* (5). *Тогда система* (1) *имеет хотя бы одно* ω-*периодическое решение.*

Следствие 1. *Пусть на* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^n$ *соблюдаются неравенства*

$$\sigma_i f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^n p_{ik}(t) x_k + q(t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (7)$$

и

$$\sigma_i f_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \geqslant 0$$
$$(i = 1, \ldots, n), \qquad (8)$$

где $\sigma_i \in \{-1, 1\}$, $q \in L_\omega$, *а матрица* $(p_{ik})_{i,k=1}^n$ *удовлетворяет условию* (5). *Тогда система* (1) *имеет хотя бы одно неотрицательное* ω-*периодическое решение.*

При $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_n$ из этого следствия вытекает теорема 4.8 [1].

ТЕОРЕМА 2. *Пусть на* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *соблюдаются неравенства*

$$\sigma_i [f_i(t, x_1, \ldots, x_n) - f_i(t, y_1, \ldots, y_n)] \operatorname{sign}(x_i - y_i) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^n p_{ik}(t)|x_k - y_k| \qquad (i = 1, \ldots, n), \qquad (9)$$

где $\sigma_i \in \{-1, 1\}$, *а* $(p_{ik})_{i,k=1}^n$ *удовлетворяет условию* (5). *Тогда система* (1) *имеет одно и только одно* ω-*периодическое решение.*

Следствие 2. *Пусть на* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^n$ *соблюдаются неравенства* (8) *и* (9), *где* $\sigma_i \in \{-1, 1\}$, *а* $(p_{ik})_{i,k=1}^n$ *удовлетворяет условию* (5). *Тогда система* (1) *имеет одно и только одно неотрицательное* ω-*периодическое решение.*

ТЕОРЕМА 3. *Пусть соблюдаются условия* (5) *и* (9). *Тогда для любой непрерывной вектор-функции* $(x_{i0})_{i=1}^n$: $[0, \omega] \to \mathbf{R}^n$ *существует единственная последователь-*

ность абсолютно непрерывных вектор-функций $(x_{im})_{i=1}^n$: $: [0, \omega] \to \mathbf{R}^n$ $(m = 1, 2, \ldots)$ *таких, что при любых натуральном* m *и* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *функция* x_{im} *является решением задачи Коши*

$$\frac{dx_{im}(t)}{dt} = f_i(t, x_{1m-1}(t), \ldots, x_{i-1m-1}(t), x_{im}(t), x_{i+1m-1}(t), \ldots, x_{nm-1}(t)), \tag{10}$$

$$x_{im}\left(\frac{1-\sigma_i}{2}\omega\right) = x_{im-1}\left(\frac{1+\sigma_i}{2}\omega\right) \tag{11}$$

и равномерно на $[0, \omega]$

$$\lim_{m\to+\infty} x_{im}(t) = x_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{12}$$

где $(x_i)_{i=1}^m$ — ω*-периодическое решение системы* (1).

Замечание 1. Ни в одной из теорем 1—3 нельзя отказаться от условия (5), ибо если $(p_{ik})_{i,k=1}^n \in L_\omega$ и $p_{ik} \geqslant 0$ при $i \neq k$, но нарушается (5), то существует удовлетворяющая условиям (2) и (9) вектор-функция $(f_i)_{i=1}^n$, для которой система (1) не имеет ω-периодического решения.

Замечание 2. В условиях теоремы 3 имеют место оценки

$$| x_{im}(t) - x_i(t) | \leqslant r_0\gamma^m \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \omega \ (i = 1, \ldots, n; \ m = 1, 2, \ldots), \tag{13}$$

где $r_0 > 0$ и $\gamma \in]0,1[$ — не зависящие от m числа.

Сформулированные выше результаты доложены на совместном заседании семинара имени И. Г. Петровского и Московского математического общества и анонсированы [4].

2. О знаке компонент матрицы Грина линейной периодической краевой задачи. Рассмотрим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_i}{dt} = \sigma_i \sum_{k=1}^n p_{ik}(t) z_k + \sigma_i q_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{14}$$

с периодическими краевыми условиями

$$z_i(0) = z_i(\omega) + \sigma_i\alpha_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{15}$$

где $\sigma_i \in \{-1, 1\}$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $p_{ik} \in L_\omega$ и $q_i \in L_\omega$. Хорошо известно (см., например, [5]), что если однородная задача

$$\frac{dz_i}{dt} = \sigma_i \sum_{k=1}^n p_{ik}(t) z_k \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{14_0}$$

$$z_i(0) = z_i(\omega) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{15_0}$$

имеет только нулевое решение, то задача (14), (15) имеет единственное решение $(z_i)_{i=1}^n$, и оно дается формулой Грина

$$z_i(t) = z_{0i}(t) + \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \int_0^\omega g_{ik}(t, \tau)\, q_k(\tau)\, d\tau \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{16}$$

где $(z_{0i})_{i=1}^n$ — решение задачи (14_0), (15), а $(g_{ik})_{i,k=1}^n$ — матрица Грина задачи (14_0), (15_0).

Пусть $p_{ik}(t) \geqslant 0$ при $i \neq k$, а $(z_i)_{i=1}^n$ — решение задачи (14_0), (15). Тогда вектор-функция $(y_i)_{i=1}^n$, где $y_i(t) = |z_i(t)|$, является ω-периодическим решением системы дифференциальных неравенств (3). Поэтому ясно, что если соблюдается условие (5), то задача (16_0), (17_0) имеет только нулевое решение и, следовательно, существует матрица Грина этой задачи.

ЛЕММА 1. *Если соблюдается условие* (5), *то имеют место неравенства* (4), *а компоненты матрицы Грина задачи* (14_0), (15_0) *допускают оценки*

$$\sigma_i g_{ii}(t, \tau) \geqslant g(\sigma_i p_{ii})(t, \tau) > 0, \quad \sigma_k g_{ik}(t, \tau) \geqslant 0 \ \textit{при} \ i \neq k. \tag{17}$$

Для доказательства этой леммы нам понадобится

ЛЕММА 2. *Пусть соблюдается условие* (5). *Тогда для любой неотрицательной функции* $q \in L_\omega$ *найдется положительное число* r *такое, что каждое* ω*-периодическое решение системы дифференциальных неравенств*

$$|\sigma_i z_i'(t) - p_{ii}(t)\, z_i(t)| \leqslant \sum_{k=1,\, k\neq i}^{n} p_{ik}(t)\, |z_k(t)| + q(t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{18}$$

допускает оценку

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i(t)| \leqslant r. \tag{19}$$

Доказательство. Допустим противное, что лемма неверна. Тогда найдутся неотрицательная функция $q \in L_\omega$ и последовательность $(z_{im})_{i=1}^n$ $(m = 1, 2, \ldots)$ ω-периодических решений системы дифференциальных неравенств (18) таких, что при любом натуральном m

$$\rho_m = \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \sum_{i=1}^{m} |z_{im}(t)| > m.$$

Положим

$$y_{im}(t) = \rho_m^{-1} \, |z_{im}(t)| \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Тогда

$$\max_{0\leqslant t\leqslant\omega}\sum_{k=1}^{m} y_{im}(t)=1,$$

$$|y'_{im}(t)|\leqslant\bar{q}(t)\quad(i=1,\ldots,n;\ m=1,2,\ldots),$$

где $\bar{q}(t)=q(t)+\sum_{i,\,k=1}^{n}|p_{ik}(t)|$ и

$$\sigma_i y'_{im}(t)\leqslant\sum_{k=1}^{n}p_{ik}(t)\,y_{km}(t)+q(t)/m\qquad(i=1,\ldots,n).\qquad(20)$$

Ввиду равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности последовательности ω-периодических вектор-функций $(y_{im})_{i=1}^{n}$ $(m=1,2,\ldots)$ без ограничения общности можем считать, что она равномерно сходится. Из (20) легко следует, что вектор-функция $(y_i)_{i=1}^{n}$, где

$$y_i(t)=\lim_{m\to\infty}y_{im}(t),$$

является неотрицательным ω-периодическим решением системы (3). С другой стороны,

$$\max_{0\leqslant t\leqslant\omega}\sum_{i=1}^{n}y_i(t)=1.$$

Но это противоречит условию (5). Полученное противоречие доказывает лемму.

Доказательство леммы 1. Покажем прежде всего, что соблюдены неравенства (4). Допустим противное, что для некоторого $j\in\{1,\ldots,n\}$

$$\int_0^{\omega}p_{jj}(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0.$$

Подберем функцию $p\in L_\omega$ таким образом, чтобы

$$p(t)\leqslant p_{jj}(t)\ \text{при}\ t\in\mathbf{R}\ \text{и}\ \int_0^{\omega}p(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

Тогда вектор-функция $(y_i)_{i=1}^{n}$, где

$$y_i(t)\equiv 0\ \text{при}\ i\neq j\ \text{и}\ y_j(t)=\exp\left(\int_0^t p(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right),$$

будет ненулевым неотрицательным ω-периодическим решением системы (3). Но это противоречит условию (5). Тем самым справедливость неравенств (4) доказана. Из этих неравенств следует, что

$$g_i(t,\tau)=\sigma_i g(\sigma_i p_{ii})(t,\tau)\quad(i=1,\ldots,n),\qquad(21)$$

где g_i — функция Грина периодической краевой задачи

$$\frac{dz}{dt} = \sigma_i p_{ii}(t) z; \quad z(0) = z(\omega) = 0.$$

Пусть $q_i \in L_\omega$ $(i = 1, \ldots, n)$ — произвольные неотрицательные функции и $q(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t)$. Согласно лемме 1, найдется положительное число r такое, что любое ω-периодическое решение системы дифференциальных неравенств (18) допускает оценку (19). Положим

$$\chi_0(s) = \begin{cases} 0 \text{ при } s < 0, \\ s \text{ при } 0 \leqslant s \leqslant r, \\ r \text{ при } s > r \end{cases} \tag{22}$$

и рассмотрим задачу о существовании ω-периодического решения дифференциальной системы

$$\frac{dz_i}{dt} = \sigma_i p_{ii}(t) z_i + \sigma_i \left[\sum_{k=1,\ k\neq i}^n p_{ik}(t) \chi_0(z_k) + q_i(t) \right] \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{23}$$

Ввиду (21) эта задача сводится к системе интегральных уравнений

$$z_i(t) = \int_0^\omega g(\sigma_i p_{ii})(t, \tau) \left[\sum_{k=1,\ k\neq i}^n p_{ik}(\tau) \chi_0(z_k(\tau)) + q_i(\tau) \right] d\tau \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{24}$$

разрешимость которой непосредственно вытекает из принципа Шаудера.

Пусть $(z_i)_{i=1}^n$ — произвольное ω-периодическое решение дифференциальной системы (23). Ясно, что оно будет и решением системы дифференциальных неравенств (18). Поэтому справедлива оценка (19). С другой стороны, ввиду (24)

$$z_i(t) \geqslant 0 \ (i = 1, \ldots, n). \tag{25}$$

С учетом (19) и (25) из (22) и (23) следует, что $(z_i)_{i=1}^n$ является решением системы (14).

Как уже было сказано выше, система (14) имеет единственное ω-периодическое решение, и оно допускает представление (16), где $z_{0i}(t) \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Из (16) и (24) имеем

$$\int_0^\omega \left[\sum_{k=1}^n \sigma_k g_{ik}(t, \tau) q_k(\tau) - g(\sigma_i p_{ii})(t, \tau) q_i(\tau) \right] d\tau \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Отсюда ввиду произвольности неотрицательных функций $q_i \in L_\omega$ $(i = 1, \ldots, n)$ вытекают оценки (17). Лемма доказана.

3. Об оценке решений систем дифференциальных неравенств с краевыми условиями периодического типа. Рассмотрим систему дифференциальных неравенств

$$\sigma_i y_i'(t) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)\, y_k(t) + q_i(t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \omega \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{26}$$

с краевыми условиями

$$\sigma_i\,(y_i(0) - y_i(\omega)) \leqslant \alpha_i \; (i = 1, \ldots, n), \tag{27}$$

где $\sigma_i \in \{-1, 1\}$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $p_{ik} \in L_\omega$ и $q_i \in L_\omega$.

ЛЕММА 3. *Если соблюдается условие* (5), *то любое решение задачи* (26), (27) *допускает оценку*

$$y_i(t) \leqslant z_i(t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \omega \; (i = 1, \ldots, n), \tag{28}$$

где $(z_i)_{i=1}^{m}$ — *решение задачи* (14), (15).

Доказательство. Положим

$$\beta_i = \alpha_i - \sigma_i\,(y_i(0) - y_i(\omega)) \; (i = 1, \ldots, n)$$

и

$$x_i(t) = z_i(t) - y_i(t) - \beta_i g(\sigma_i p_{ii})(t, 0) \; (i = 1, \ldots, n).$$

Ясно, что $(x_i)_{i=1}^{n}$ является решением краевой задачи

$$\frac{dx_i}{dt} = \sigma_i \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)\, x_k + \sigma_i \delta_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$x_i(0) = x_i(\omega), \; (i = 1, \ldots, n),$$

где

$$\delta_i(t) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)\, y_k(t) + q_i(t) - \sigma_i y_i'(t) + {} + \sum_{k=1,\, k \neq i}^{n} \beta_k p_{ik}(t)\, g(\sigma_k p_{kk})(t, 0) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Из неравенств (26) и (27) следует, что

$$\beta_i \geqslant 0 \text{ и } \delta_i(t) \geqslant 0 \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \omega \; (i = 1, \ldots, n).$$

С другой стороны, согласно лемме 1, выполнены неравенства (17). Поэтому

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \int_0^{\omega} g_{ik}(t, \tau)\, \delta_k(\tau)\, d\tau \geqslant 0 \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \omega \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Следовательно, справедливы оценки (28). Лемма доказана.

Замечание 3. Поскольку решение $(z_{0i})_{i=1}^{n}$ задачи (14_0), (15) допускает представление

$$z_{0i}(t)=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\int_0^{\omega}g_{ik}(t,\tau)\times$$
$$\times\left(\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}p_{kj}(\tau)\,g(\sigma_j p_{jj})(\tau,0)\,\alpha_j\right)d\tau,$$

из (16) и (28) вытекают оценки

$$\max_{0\leqslant t\leqslant\omega}y_i(t)\leqslant r_1\alpha+r_2\int_0^{\omega}q(\tau)\,d\tau\qquad(i=1,\ldots,n),$$

где $\alpha=\max\{|\alpha_1|,\ldots,|\alpha_n|\}$, $q(t)=\max\{|q_1(t)|,\ldots$ $\ldots,|q_n(t)|\}$,

$$r_2=\sup_{0\leqslant t,\ \tau\leqslant\omega}\sum_{i,\ k=1}^{n}|g_{ik}(t,\tau)|,\tag{29}$$

$$r_1=r_2\sum_{k,\ j=1,\ k\neq j}^{n}\int_0^{\omega}p_{kj}(\tau)\,g(\sigma_j p_{jj})(\tau,0)\,d\tau.\tag{30}$$

ЛЕММА 4. *Пусть соблюдается условие* (5). *Тогда найдется число* $\gamma\in\,]0,1[$ *такое, что система дифференциальных неравенств*

$$\sigma_i y_i'(t)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\bar p_{ik}(t)\,y_k(t)\ \text{при}\ 0\leqslant t\leqslant\omega\quad(i=1,\ldots,n)\tag{31}$$

с краевыми условиями

$$y_i\left(\frac{1-\sigma_i}{2}\,\omega\right)\leqslant\gamma^{-1}y_i\left(\frac{1+\sigma_i}{2}\,\omega\right)\qquad(i=1,\ldots,n),\tag{32}$$

где

$$\bar p_{ik}(t)=\begin{cases}\gamma^{-1}p_{ik}(t)\ \text{при}\ i\neq k,\\ \quad p_{kk}(t)\ \text{при}\ i=k,\end{cases}\tag{33}$$

не имеет ненулевого неотрицательного решения.

Доказательство. Для чисел r_1 и r_2, заданных равенствами (29) и (30), подберем $\gamma\in\,]0,1[$ таким образом, чтобы

$$\left(r_1+r_2\int_0^{\omega}p(t)\,dt\right)(\gamma^{-1}-1)<1/2,\tag{34}$$

где

$$p(t)=\sum_{i,k=1,\ i\neq k}^{n}p_{ik}(t).$$

Пусть $(y_i)_{i=1}^n$ — произвольное неотрицательное решение задачи (31), (32). Полагая

$$\rho_k = \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} y_k(t), \quad \rho = \max\{\rho_1, \ldots, \rho_n\},$$

находим

$$\sigma_i y_i'(t) \leqslant \sum\nolimits_{k=1}^n p_{ik}(t) y_k(t) + (\gamma^{-1} - 1) p(t) \rho \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \omega \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и

$$\sigma_i (y_i(0) - y_i(\omega)) \leqslant (\gamma^{-1} - 1) \rho \ (i = 1, \ldots, n).$$

Из этих неравенств, согласно замечанию 3 и условию (34), вытекает, что $\rho \leqslant 1/2\rho$ и, следовательно, $\rho = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. *Пусть соблюдается условие* (5). *Тогда существует число* $\gamma \in]\,0, 1\,[$ *такое, что для любых непрерывной вектор-функции* $(y_{i0})_{i=1}^n$: $[0, \omega] \to \mathbf{R}_+^n$ *и последовательности абсолютно непрерывных вектор-функций* $(y_{im})_{i=1}^n$: $[0, \omega] \to \mathbf{R}_+^n$ $(m = 1, 2, \ldots)$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$\sigma_i y_{im}'(t) \leqslant p_{ii}(t) y_{im}(t) + \sum\nolimits_{k=1, k \neq i}^n p_{ik}(t) y_{km-1}(t) \ \text{при} \ 0 \leqslant t \leqslant \omega \quad (i = 1, \ldots, n; \ m = 1, 2, \ldots) \tag{35}$$

и

$$y_{im}\left(\frac{1 - \sigma_i}{2} \omega\right) \leqslant y_{im-1}\left(\frac{1 + \sigma_i}{2} \omega\right) \quad (i = 1, \ldots, n; \ m = 1, 2, \ldots), \tag{36}$$

справедливы оценки

$$| y_{im}(t) | \leqslant r_0 \gamma^m \ \text{при} \ 0 \leqslant t \leqslant \omega \quad (i = 1, \ldots, n; \ m = 1, 2, \ldots), \tag{37}$$

где r_0 *— не зависящее от* m *положительное число.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть γ — число, фигурирующее в лемме 4, а $\bar{p}_{ik}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ — функции, заданные равенствами (33). Введем операторы

$$h_i(x_1, \ldots, x_m)(t) = \gamma^{-1} \exp\left(\sigma_i \int_{a_i}^t \bar{p}_{ii}(s)\, ds\right) x_i(b_i) + \sigma_i \int_{a_i}^t \exp\left(\sigma_i \int_\tau^t \bar{p}_{ii}(s)\, ds\right)\left(\sum\nolimits_{k=1, k \neq i}^n \bar{p}_{ik}(\tau) y_k(\tau)\right) d\tau \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где $a_i = \dfrac{1 - \sigma_i}{2} \omega, \quad b_i = \dfrac{1 + \sigma_i}{2} \omega.$

Положим

$$\bar{y}_{im}(t) = \gamma^{-m} y_{im}(t), \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\rho_{0m} = \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_{im}(t), \quad \rho_m = \max\{\rho_{00}, \rho_{01}, \ldots, \rho_{0m}\}.$$

Наша задача — доказать, что

$$r_0 = \lim_{m \to \infty} \rho_m < +\infty. \tag{38}$$

Из (35) и (36) следует, что

$$\bar{y}_{im}(t) \leqslant h_i(\bar{y}_{1m-1}, \ldots, \bar{y}_{nm-1})(t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \omega$$
$$(i = 1, \ldots, n;\ m = 1, 2, \ldots). \tag{39}$$

Если $\rho_{00} = 0$, то $\rho_m = 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Следовательно, интерес представляет случай, когда $\rho_{00} > 0$. В этом случае для доказательства (38) достаточно показать, что равномерно на $[0, \omega]$

$$\lim_{m \to \infty} z_{0m}(t) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{38_1}$$

где

$$z_{im}(t) = \bar{y}_{im}(t)/\rho_m \ (i = 1, \ldots, n).$$

Из (39) имеем

$$z_{im}(t) \leqslant \bar{z}_{im}(t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \omega$$
$$(i = 1, \ldots, n; m = 1, 2, \ldots), \tag{40}$$

где

$$\bar{z}_{im}(t) = h_i(z_{1m-1}, \ldots, z_{nm-1})(t). \tag{41}$$

Ясно, что последовательность вектор-функций $(\bar{z}_{im})_{m=1}^{+\infty}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ является равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной. Поэтому равномерно на $[0, \omega]$ имеем

$$\lim_{m \to \infty} \sup \bar{z}_{im}(t) = z_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где $(z_i)_{i=1}^{m}$ — непрерывная вектор-функция.

Из (40) и (41) следуют неравенства

$$z_i(t) \leqslant y_i(t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \omega \ (i = 1, \ldots, n),$$

где

$$y_i(t) = h_i(z_1, \ldots, z_n)(t) \ (i = 1, \ldots, m).$$

Отсюда ясно, что $(y_i)_{i=1}^n$ удовлетворяет краевым условиям (32) и

$$\sigma_i y_i'(t) = \bar{p}_{ii}(t)\, y_i(t) + \sum_{k=1,\, k\neq i}^n \bar{p}_{ik}(t)\, z_k(t) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^n \bar{p}_{ik}(t)\, y_k(t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \omega \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Поэтому в силу леммы 4

$$y_i(t) \equiv 0 \ (i = 1, \ldots, n).$$

Следовательно, соблюдается условие $(38_1')$. Лемма доказана.

4. Доказательство основных результатов.

Доказательство предложения 1. Пусть $(y_i)_{i=1}^n$ — произвольное неотрицательное ω-периодическое решение системы (3). Ввиду (4)

$$y_i(t) \leqslant \sum_{k=1,\, k\neq i}^n \int_0^\omega g(\sigma_i p_{ii})(t, \tau)\, p_{ik}(\tau)\, y_k(\tau)\, d\tau$$
$$\text{при } 0 \leqslant t \leqslant \omega \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Полагая

$$\rho_i = \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} y_i(t), \quad \rho = (\rho_i)_{i=1}^n, \quad S = (s_{ik})_{i,\, k=1}^n,$$

из этих неравенств получим

$$\rho \leqslant S\rho\ ^{1)}.$$

Отсюда следует, что $\rho = 0$, так как спектральный радиус матрицы S меньше единицы. Следовательно, соблюдается условие (5). Предложение доказано.

Предложение 2 легко следует из предложения 1, и поэтому его доказательство мы опускаем.

Доказательство теоремы 1. Пусть $q_i(t) = q(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $(z_i)_{i=1}^n$ — решение задачи (14), (15_0), а r — положительное число, удовлетворяющее условию (19). Положим

$$\chi(s) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant r, \\ 2 - s/r & \text{при } r < s < 2r, \\ 0 & \text{при } s > 2r \end{cases}$$

$$\tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) = \chi\left(\sum_{k=1}^n |x_k|\right)[f_i(t, x_1, \ldots, x_n) -$$
$$- \sigma_i p_{ii}(t)\, x_i] \quad (i = 1, \ldots, n). \quad (42)$$

---

[1]) Неравенства между векторами понимаются покомпонентно.

Ввиду (4) из принципа Шаудера легко следует существование ω-периодического решения $(x_i)_{i=1}^n$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{ii}(t)\, x_i + \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Согласно (6) и (42), вектор-функция $(y_i)_{i=1}^n$, где $y_i(t) \equiv \equiv |x_i(t)|$, является ω-периодическим решением системы (26). В силу леммы 3 имеют место оценки (28). Если наряду с (19) и (28) учтем и равенства (42), станет ясным, что $(x_i)_{i=1}^n$ является решением системы (1). Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Пусть

$$\chi_0(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } s < 0 \\ s & \text{при } s \geqslant 0. \end{cases}$$

Согласно теореме 1 и условиям (5), (7) и (8), система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = -\sigma_i(1 + |p_{ii}(t)|)[x_i - \chi_0(x_i)] + \\ + f_i(t, \chi_0(x_1), \ldots, \chi_0(x_n)) \qquad (i = 1, \ldots, n) \quad (43)$$

имеет ω-периодическое решение $(x_i)_{i=1}^n$. Нам остается доказать, что $(x_i)_{i=1}^n$ неотрицательно, ибо каждое неотрицательное решение системы (43) является и решением системы (1). Допустим противное. Тогда найдутся числа $i \in \{1, \ldots \ldots, n\}$, $t_1 \in [0, \omega[$ и $t_2 \in]\, t_1, \omega]$ такие, что

$$x_i(t_1) = x_i(t_2) \text{ и } x_i(t) < 0 \text{ при } t_1 < t < t_2.$$

Но это невозможно, так как ввиду (8) и (43)

$$\sigma_i x_i'(t) > 0 \text{ при } t_1 < t < t_2.$$

Полученное противоречие доказывает следствие.

Доказательство теоремы 2. Из (9) вытекают неравенства (6), где $q(t) = \sum_{i=1}^n |f_i(t, 0, \ldots, 0)|$. Поэтому, согласно теореме 1, система (1) имеет хотя бы одно ω-периодическое решение. Пусть $(x_i)_{i=1}^n$ и $(z_i)_{i=1}^n$ — произвольные ω-периодические решения системы (1). Ввиду (9) вектор-функция $(y_i)_{i=1}^n$, где $y_i(t) = |x_i(t) - z_i(t)|$, является неотрицательным ω-периодическим решением системы (3). Согласно условию (5), $y_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, \ldots \ldots, n)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Согласно теореме 2, система (1) имеет единственное решение $(x_i)_{i=1}^n$. С другой стороны, из условия (9) следует, что, каковы бы ни были $i \in \{1, \ldots, n\}$, $c \in \mathbf{R}$ и непрерывные функции z_k: $[0, \omega] \to \mathbf{R}$ $(k \neq i,\ k = 1, \ldots, n)$, задача Коши

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f_i(t, z_1(t), \ldots, z_{i-1}(t), x, z_{i+1}(t), \ldots, z_n(t));$$

$$x\left(\frac{1-\sigma_i}{2}\,\omega\right) = c_i$$

имеет единственное решение, заданное на всем $[0, \omega]$. Поэтому для любой непрерывной вектор-функции $(x_{i0})_{i=1}^n$: $[0, \omega] \to \mathbf{R}$ найдется единственная последовательность вектор-функций $(x_{im})_{i=1}^n$: $[0, \omega] \to \mathbf{R}^n$ $(m = 1, 2, \ldots)$ таких, что при любых натуральном m и $i \in \{1, \ldots, n\}$ функция x_{im} является решением задачи (10), (11). Ясно, что

$$y_{im}(t) = |x_{im}(t) - x_i(t)|\ (i = 1, \ldots, n;\ m = 1, 2, \ldots)$$

удовлетворяют неравенствам (35) и (36). Согласно лемме 5 имеет место оценка (37). Следовательно, справедлива оценка (13), где r_0 и $\gamma \in\,]0, 1[$ — не зависящие от m числа. Теорема доказана.

Институт прикладной математики
им. И. Н. Векуа Тбилисского
государственного университета

Поступило
07.08.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1966.

[2] Кигурадзе И. Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Тбилиси: Изд-во Тбил. гос. ун-та, 1975.

[3] Кигурадзе И. Т., Пужа Б. О некоторых краевых задачах для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1976, т. 12, № 12, с. 2139—2148.

[4] Кигурадзе И. Т. О периодических решениях систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.— Успехи мат. наук, 1985, т. 39, вып. 4, с. 137—138.

[5] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970.