И. Т. Кигурадзе, Об ограниченных и периодических решениях линейных дифференциальных уравнений высших порядков, *Матем. заметки*, 1985, том 37, выпуск 1, 48–62

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ**

т. 37, № 1 (1985)

# ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

**И. Т. Кигурадзе**

**1. Формулировка основных результатов.** В настоящей статье установлены признаки существования и единственности ограниченного и периодического решений дифференциального уравнения

$$u^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t)\, u^{(k)} + q(t). \tag{1}$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что $n > 3$, функции $q\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и $p_0\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ интегрируемы по Лебегу на любом конечном отрезке, а каждая функция $p_k\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, абсолютно непрерывна на любом конечном отрезке вместе со своими производными до порядка $k-1$ включительно.

В статье приняты обозначения: $\mathbf{R}$ — множество действительных чисел, $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty[$, $\nu(l_1, \ldots, l_{n_0-1}) = \max\left\{\sum_{k=1}^{n_0-1} l_k x^k - x^{n_0}\colon x \in \mathbf{R}_+\right\}$, а $\mu_i^k$ ($i = 0, 1, \ldots;\ k = 2i, 2i+1, \ldots$) — числа, заданные рекуррентными соотношениями

$$\mu_0^{i+1} = \frac{1}{2}, \quad \mu_i^{2i} = 1, \quad \mu_{i+1}^{k} = \mu_{i+1}^{k-1} + \mu_i^{k-2}$$

$$(i = 0, 1, \ldots;\quad k = 2i+3, \ldots). \tag{2}$$

Рассмотрим задачу об отыскании решения уравнения (1), удовлетворяющего краевому условию

$$u^{(i)}(0) = c_i \quad (i = 0, \ldots, m_0 - 1),$$
$$\sup\{|u(t)|\colon t \in \mathbf{R}_+\} < +\infty \tag{3}$$

или

$$\sup\{|u(t)|:\ t\in\mathbf{R}\}<+\infty, \tag{4}$$

где $m_0\in\{n_0,\ n_0+1\}$ и $c_i\in\mathbf{R}$ $(i=0,\ldots,m_0-1)$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $n=2n_0>2$, $m_0=n_0$,

$$\int_0^{+\infty}|q(t)|^2\,\mathrm{d}t<+\infty, \tag{5}$$

*функции* $p_0$ *и* $p_k^{(i)}$ $(i=0,\ldots,k-1;\ k=1,\ldots,n-1)$ *ограничены на* $\mathbf{R}_+$ *и на этом промежутке выполняются неравенства*

$$\sum\nolimits_{k=2i}^{n-1}(-1)^{n_0+i+k}\mu_i^k p_k^{(k-2i)}(t)\leqslant l_i \qquad (i=1,\ldots,n_0-1) \tag{6}$$

*и*

$$\sum\nolimits_{k=0}^{n-1}(-1)^{n_0+k+1}\mu_0^k p_k^{(k)}(t)\geqslant \nu(l_1,\ldots,l_{n_0-1})+\delta, \tag{7}$$

*где* $l_i$ $(i=1,\ldots,n_0-1)$ *и* $\delta$ — *положительные постоянные. Тогда для любых* $c_i\in\mathbf{R}$ $(i=1,\ldots,n_0-1)$ *задача* (1), (3) *имеет единственное решение* $u$, *причем*

$$\lim_{t\to+\infty}u^{(i)}(t)=0 \quad (i=0,\ldots,n-1). \tag{8}$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $n=2n_0+1>3$, $m_0\in\{n_0,\ n_0+1\}$, *выполняется условие* (5), *функции* $p_0$ *и* $p_k^{(i)}$ $(i=0,\ldots,k-1;\ k=1,\ldots,n-1)$ *ограничены на* $\mathbf{R}_+$ *и на этом промежутке выполняются неравенства*

$$(-1)^{m_0+n_0}p_{n-1}(t)\geqslant\lambda,\quad \sum\nolimits_{k=2i}^{n-1}(-1)^{m_0+i+k}\mu_i^k p_k^{(k-2i)}(t)\geqslant-\lambda l_i \quad (i=1,\ldots,n_0-1) \tag{9}$$

*и*

$$\sum\nolimits_{k=0}^{n-1}(-1)^{m_0+k}\mu_0^k p_k^{(k)}(t)\geqslant\lambda\nu(l_1,\ldots,l_{n_0-1})+\delta, \tag{10}$$

*где* $l_i$ $(i=1,\ldots,n_0-1)$, $\delta$ *и* $l$ — *положительные постоянные. Тогда для любых* $c_i\in\mathbf{R}$ $(i=0,\ldots,m_0-1)$ *задача* (1), (3) *имеет единственное решение и это решение удовлетворяет условиям* (8).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть функции* $p_0$ *и* $p_k^{(i)}$ $(i=0,\ldots,k-1;\ k=1,\ldots,n-1)$ *ограничены на* $\mathbf{R}$ *и*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|q(t)|^2\,\mathrm{d}t<+\infty. \tag{11}$$

*Пусть, далее, либо $n = 2n_0 > 2$ и на $\mathbf{R}$ выполняются неравенства* (6) *и* (7), *либо* $n = 2n_0 + 1 > 3$ *и на* $\mathbf{R}$ *выполняются неравенства* (9) *и* (10), *где* $m_0 \in \{n_0, n_0 + 1\}$, *а* $l_i$ $(i = 1, \ldots, n_0 - 1)$, $\delta$ *и* $\lambda$ — *положительные постоянные. Тогда задача* (1), (4) *имеет единственное решение, причем*

$$\lim_{t\to-\infty} u^{(i)}(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} u^{(i)}(t) = 0 \quad (i = 0, \ldots, n - 1). \tag{12}$$

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $p_k$ $(k = 0, \ldots, n - 1)$ *и* $q$ — *периодические функции с периодом* $\omega > 0$. *Пусть, далее, либо* $n = 2n_0 > 2$ *и на* $[0, \omega]$ *выполняются неравенства* (6) *и* (7), *либо* $n = 2n_0 + 1 > 3$ *и на* $[0, \omega]$ *выполняются неравенства* (9) *и* (10), *где* $m_0 \in \{n_0, n_0 + 1\}$, *а* $l_i$ $(i = 1, \ldots, n_0 - 1)$, $\delta$ *и* $\lambda$ — *положительные постоянные. Тогда задача* (1), (4) *имеет единственное решение и это решение является* $\omega$-*периодическим*.

Замечание 1. Из теорем 1 и 2 следует, что в условиях теорем 3 и 4 решения уравнения (1) являются неустойчивыми в обе стороны в смысле Ляпунова.

Замечание 2. Требование положительности числа $\delta$, фигурирующего в неравенствах (7) и (10), является существенным, и эти неравенства нельзя заменить равенствами

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{m+k+1}\mu_0^k p_k^{(k)}(t) = \nu(l_1, \ldots, l_{n_0-1}) \tag{7'}$$

и

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{m_0+k}\mu_0^k p_k^{(k)}(t) = \lambda\nu(l_1, \ldots, l_{n_0-1}). \tag{10'}$$

В самом деле, пусть $\lambda \in ]0, +\infty[$, $l_i \in ]0, +\infty[$ $(i = 1, \ldots, n_0 - 1)$, $l_0 = \nu(l_1, \ldots, l_{n_0-1})$, а $x_0 \in ]0, +\infty[$ — решение уравнения

$$x_0^{n_0} = \sum_{k=1}^{n_0-1} l_k x_0^k - l_0.$$

Тогда однородные дифференциальные уравнения

$$u^{(2n_0)} = (-1)^{n_0+1} l_0 u + \sum_{k=1}^{n_0-1} (-1)^{n_0+k} l_k u^{(2k)} \tag{13}$$

и

$$u^{(2n_0+1)} = (-1)^{m_0}\lambda l_0 u + (-1)^{n_0} x_0^{n_0} u' + \lambda \sum_{k=1}^{n_0-1} (-1)^{m_0+k-1} l_k u^{(2k)} + (-1)^{m_0+n_0}\lambda u^{(2n_0)} \tag{14}$$

имеют ненулевое периодическое решение $u(t)=\cos\sqrt{x_0}t$, хотя для уравнения (13) (для уравнения (14)) соблюдаются условия (6) и (7′) (условия (9) и (10′)).

Сформулированные выше результаты доложены на совместном заседании семинара имени И. Г. Петровского и Московского математического общества и анонсированы в [1].

**2. Вспомогательные предложения.** Пусть $\mu_{ij}^k$ $(i = 0, 1, \ldots;\ j = i, i+1, \ldots;\ k = i+j+1, \ldots)$ и $w_k$ — числа и оператор, заданные равенствами

$$\mu_{00}^k=\frac{1}{2},\ \mu_{0j}^k=1\quad (k=1, 2, \ldots;\quad j=1, \ldots, k-1),$$

$$\mu_{ii}^{2i+1}=\frac{1}{2},\quad \mu_{ik-i-1}^k=1\quad (i=1, 2, \ldots;\quad k=2i+2, \ldots),$$

$$\mu_{ij}^k=\mu_{ij}^{k-1}+\mu_{i-1j-1}^{k-2}$$

$$(i=1, 2, \ldots;\ j=i, i+1, \ldots;\ k=i+j+2,\ i+j+3, \ldots)$$

и

$$w_k(p, u)=\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\sum_{j=i}^{k-1-i}(-1)^{k-1-j}\mu_{ij}^k p^{(k-1-i-j)}(t)\,u^{(i)}(t)\,u^{(j)}(t), \tag{15}$$

где $[(k-1)/2]$ — целая часть числа $(k-1)/2$.

В [2] доказывается следующая

ЛЕММА 1. *Пусть* $-\infty<a<b<+\infty$, *а функции* $p\colon [a, b]\to \mathbf{R}$ *и* $u\colon [a, b]\to\mathbf{R}$ *абсолютно непрерывны вместе со своими производными до порядка* $k-1$ *включительно. Тогда*

$$\int_a^b p(t)\,u(t)\,u^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t=w_k(p, u)(b)-w_k(p, u)(a)+ \\ +\sum_{i=0}^{[k/2]}(-1)^{k-i}\mu_i^k\int_a^b p^{(k-2i)}(t)\,|u^{(i)}(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

ЛЕММА 2. *Для любого решения* $u$ *уравнения* (1) *в случае* $n=2n_0$ *имеет место тождество*

$$\int_a^t |u^{(n_0)}(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau+ \\ +\sum_{j=0}^{n_0-1}\sum_{k=2j}^{n-1}(-1)^{k+n_0+j+1}\mu_j^k\int_a^t p_k^{(k-2j)}(\tau)\,|u^{(j)}(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau= \\ =(-1)^{n_0}\sum_{k=1}^{n}(w_k(p_k, u)(t)-w_k(p_k, u)(a))+ \\ +(-1)^{n_0}\int_a^t q(\tau)\,u(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

*а в случае* $n = 2n_0 + 1$ — *тождество*

$$\sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k=2j}^{n-1} (-1)^{k-j} \mu_j^k \int_a^t p_k^{(k-2j)}(\tau) \, | u^{(j)}(\tau) |^2 \, d\tau =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (w_k(p_k, u)(a) - w_k(p_k, u)(t)) - \int_a^t q(\tau) u(\tau) \, d\tau,$$

*где* $p_n(t) \equiv -1$.

Чтобы убедиться в справедливости этой леммы, достаточно обе части уравнения (1) умножить на $u$, проинтегрировать от $a$ до $t$, а потом применить лемму 1.

ЛЕММА 3. *Пусть* $t_0 \in \mathbf{R}$, $u$ — *решение уравнения* (1) *и*

$$r_i = \max \{ | u^{(i)}(t) | : t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + 1 \} \quad (i = 0, 1, \ldots, n - 1).$$

*Тогда*

$$r_i \leqslant g_1(t_0) r_0 + g_2(t_0) \quad (i = 1, \ldots, n - 1),$$

*где*

$$g_1(t_0) = 2^{3n^2} \sum_{i=0}^{n-2} \left(1 + \int_{t_0}^{t_0+1} | p_j(\tau) | \, d\tau\right)^{\frac{n-1}{n-1-i}} \exp\left(\frac{n-1}{n-1-i} \int_{t_0}^{t_0+1} | p_{n-1}(\tau) | \, d\tau\right),$$

$$g_2(t_0) = 2 \int_{t_0}^{t_0+1} | q(\tau) | \, d\tau \exp\left(\int_{t_0}^{t_0+1} | p_{n-1}(\tau) | \, d\tau\right).$$

Доказательство. Ввиду неравенств типа Колмогорова — Горни (см., например, [3, с. 167—168]) имеем

$$r_i \leqslant 2^{n^2-1} r_0 + 2^{(n-2+i)(n-1-i)} r_0^{\frac{n-1-i}{n-1}} r_{n-1}^{\frac{i}{n-1}}$$
$$(i = 0, \ldots, n - 1)$$

и

$$\min \{ | u^{(i)}(t) | : t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + 1 \} \leqslant 2^{n^2-1} r_0$$
$$(i = 1, \ldots, n - 1).$$

Учитывая эти оценки и неравенство Юнга, из уравнения (1) найдем

$$r_{n-1} \leqslant \left(2^{n^2-1} r_0 + \sum_{i=0}^{n-2} r_i \int_{t_0}^{t_0+1} | p_i(\tau) | \, d\tau + \int_{t_0}^{t_0+1} | q(\tau) | \, d\tau\right) \exp\left(\int_{t_0}^{t_0+1} | p_{n-1}(\tau) | \, d\tau\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{n^2-1} r_0 \sum_{i=0}^{n-2} h_i +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-2} 2^{(n-2+i)(n-1-i)} h_i r_0^{\frac{n-1-i}{n-1}} r^{\frac{i}{n-1}} + \frac{1}{2} g_2(t_0) \leqslant$$

$$\leqslant \left( 2^{n^2-1} \sum_{i=0}^{n-2} h_i + 2^{3n^2-3} \sum_{i=0}^{n-2} h_i^{\frac{n-1}{n-1-i}} \right) r_0 + \sum_{i=0}^{n-2} 2^{-i-2} r_{n-1} +$$

$$+ \frac{1}{2} g_2(t_0) \leqslant \frac{1}{4} g_1(t_0) r_0 + \frac{1}{2} g_2(t_0) + \frac{1}{2} r_{n-1},$$

где

$$h_i = \left(1 + \int_{t_0}^{t_0+1} | p_i(\tau) | \, d\tau \right) \exp \left( \int_{t_0}^{t_0+1} | p_{n-1}(\tau) | \, d\tau \right)$$

$$(i = 0, \ldots, n-2).$$

Поэтому

$$r_{n-1} \leqslant \frac{1}{2} g_1(t_0) r_0 + g_2(t_0),$$

$$r_i \leqslant (n-1-i) \, 2^{n^2-1} r_0 + r_{n-1} \leqslant g_1(t_0) r_0 + g_2(t_0)$$

$$(i = 1, \ldots, n-2).$$

Лемма доказана.

Пусть $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Тогда

$$| u(t) |^2 \leqslant \int_t^{t+1} | u(\tau) |^2 \, d\tau +$$

$$+ 2 \left( \int_t^{t+1} | u(\tau) |^2 \, d\tau \right)^{1/2} \left( \int_t^{t+1} | u'(\tau) |^2 \, d\tau \right)^{1/2} \quad \text{при } t \in \mathbf{R}.$$

Поэтому если

$$\lim_{t \to +\infty} \int_t^{t+1} | u(\tau) |^2 \, d\tau = 0 \text{ и } \sup \left\{ \int_t^{t+1} | u'(\tau) |^2 \, d\tau : t \in \mathbf{R}_+ \right\} < +\infty, \tag{16}$$

то

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0;$$

если же

$$\lim_{|t| \to +\infty} \int_t^{t+1} | u(\tau) |^2 \, d\tau = 0 \text{ и } \sup \left\{ \int_t^{t+1} | u'(\tau) |^2 \, d\tau : t \in \mathbf{R} \right\} < +\infty, \tag{17}$$

то

$$\lim_{t \to -\infty} u(t) = 0, \quad \lim_{t \to +\infty} u(t) = 0.$$

**Ввиду этого обстоятельства из леммы 3 вытекает**

Следствие. *Пусть функции* $t \to \int_t^{t+1} |p_k(\tau)|\,d\tau$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ *ограничены на* $\mathbf{R}_+$ (*на* $\mathbf{R}$) *и соблюдается условие* (5) (*условие* (11)). *Тогда любое решение* $u$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям* (16) (*условиям* (17)), *удовлетворяет и условиям* (8) (*условиям* (12)).

ЛЕММА 4. *Если функция* $u : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ $m \geqslant 2$ *раз непрерывно дифференцируема и*

$$u^{(i)}(0) = 0 \quad (i = 0, \ldots, m-2),$$

$$\sup \{ |u^{(k)}(t)| : t \in \mathbf{R}_+ \} < +\infty \quad (k = 0, \ldots, m-1), \tag{18}$$

*то для больших* $t > 0$ *соблюдаются неравенства*

$$\int_0^t |u^{(i)}(\tau)|^2\,d\tau \leqslant (1 + \varepsilon(t)) \left( \int_0^t |u(\tau)|^2\,d\tau \right)^{1-\frac{i}{m}} \cdot$$

$$\cdot \left( \int_0^t |u^{(m)}(\tau)|^2\,d\tau \right)^{\frac{i}{m}} \quad (i = 1, \ldots, m-1), \tag{19}$$

*где*

$$\lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = 0. \tag{20}$$

Доказательство. Если $u^{(m)}(t) \equiv 0$, то ввиду (18) $u(t) \equiv \text{const}$ и справедливость оценок (20) очевидна. Предположим, что $u^{(m)}(t_0) \neq 0$ для некоторого $t_0 > 0$. Введем функции $\rho_i : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ —

$$\rho_i(t) = \int_0^t |u^{(i)}(\tau)|^2\,d\tau \quad (i = 0, \ldots, m)$$

и $\delta : [t_0, +\infty[ \to \mathbf{R}_+$ —

$$\delta(t) =$$
$$= \max \{ |u^{(i)}(t)\, u^{(i-1)}(t)| (\rho_{i+1}(t)\, \rho_{i-1}(t))^{-1/2} : \quad i = 1, \ldots, m-1 \}.$$

Согласно (18)

$$\lim_{t \to +\infty} \delta(t) = 0$$

и

$$\rho_i(t) = u^{(i)}(t)\, u^{(i-1)}(t) + \int_0^t u^{(i+1)}(\tau)\, u^{(i-1)}(\tau)\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant (1 + \delta(t)) (\rho_{i+1}(t)\, \rho_{i-1}(t))^{1/2}$$

при $t \geqslant t_0$ $(i = 1, \ldots, m-1)$. Исходя из этих неравенств по индукции докажем, что

$$\rho_i(t) \leqslant (1 + \delta(t))^{2m} \rho_0^{\frac{1}{i+1}}(t)\, \rho_{i+1}^{\frac{i}{i+1}}(t)$$

при $t \geqslant t_0$ $(i = 1, \ldots, m-1)$ и

$$\rho_i(t) \leqslant (1+\delta(t))^{2m^2} \rho_0^{1-\frac{i}{m}}(t)\, \rho_m^{\frac{i}{m}}(t)$$

при $t \geqslant t_0$ $(i = 1, \ldots, m-1)$. Следовательно, при $t \geqslant t_0$ справедливы оценки (19), где $\varepsilon(t) = (1+\delta(t))^{2m^2} - 1$ — функция, удовлетворяющая условию (20). Лемма доказана.

Аналогично доказываются следующие леммы.

ЛЕММА 4′. *Пусть функция* $u\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $m \geqslant 2$ *раз непрерывно дифференцируема и*

$$\sup\{|u^{(k)}(t)|\colon t \in \mathbf{R}\} < +\infty \quad (k = 0, \ldots, m-1).$$

*Тогда для больших* $t > 0$ *соблюдаются неравенства*

$$\int_{-t}^{t} |u^{(i)}(\tau)|^2\, d\tau \leqslant (1+\varepsilon(t)) \left(\int_{-t}^{t} |u(\tau)|^2\, d\tau\right)^{1-\frac{i}{m}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{-t}^{t} |u^{(m)}(\tau)|^2\, d\tau\right)^{\frac{i}{m}} \qquad (i = 1, \ldots, m-1),$$

*где* $\varepsilon(t) \to 0$ *при* $|t| \to +\infty$.

ЛЕММА 5. *Пусть функция* $u\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ $m \geqslant 2$ *раз непрерывно дифференцируема и*

$$u^{(i)}(b)\, u^{(i-1)}(b) - u^{(i)}(a)\, u^{(i-1)}(a) \leqslant 0$$
$$(i = 1, \ldots, m-1).$$

*Тогда*

$$\int_a^b |u^{(i)}(t)|^2\, dt \leqslant \left(\int_a^b |u(t)|^2\, dt\right)^{1-\frac{i}{m}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_a^b |u^{(m)}(t)|^2\, dt\right)^{\frac{i}{m}} \qquad (i = 1, \ldots, m-1).$$

ЛЕММА 6. *Если* $l_k > 0$ $(k = 1, \ldots, m-1)$, *то*

$$\nu(l_1, \ldots, l_{m-1}) =$$

$$= \min\left\{\sum_{k=1}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right)\left(\frac{k}{mx_k}\right)^{\frac{k}{m-k}} l_k\colon x_1 > 0, \ldots, x_{m-1} > \right.$$

$$\left. > 0, \sum_{k=1}^{m-1} l_k x_k = 1\right\}.$$

Доказательство. Подберем положительные числа $y_k$ $(k = 1, \ldots, m-1)$ таким образом, чтобы

$\sum_{k=1}^{m-1} l_k y_k = 1$ и

$$l_0 = \sum_{k=1}^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)\left(\frac{k}{my_k}\right)^{\frac{k}{m-k}} l_k =$$

$$= \min\left\{\sum_{k=1}^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)\left(\frac{k}{mx_k}\right)^{\frac{k}{m-k}} l_k : x_1 > 0, \ldots, x_{m-1} > 0, \sum_{k=1}^{m-1} l_k x_k = 1\right\}. \qquad (21)$$

Согласно определению $\nu(l_1, \ldots, l_{m-1})$ существует положительное число $x_0$, такое, что

$$mx_0^{m-1} = \sum_{k=1}^{m-1} k l_k x_0^{k-1},$$

$$\nu(l_1, \ldots, l_{m-1}) = \sum_{k=1}^{m-1} l_k x_0^k - x_0^m. \qquad (22)$$

Полагая

$$x_k = \frac{k}{m} x_0^{k-m} \qquad (k = 1, \ldots, m-1),$$

ввиду (21) и (22) находим

$$\sum_{k+1}^{m-1} l_k x_k = 1, \quad \nu(l_1, \ldots, l_{m-1}) = \sum_{k=1}^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right) l_k x_0^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)\left(\frac{k}{mx_k}\right)^{\frac{k}{m-k}} l_k \geqslant l_0.$$

Согласно неравенству Юнга

$$x_0^k = \left(\frac{m}{k} y_k\right)^{\frac{k}{m}} x_0^k \left(\frac{k}{my_k}\right)^{\frac{k}{m}} \leqslant$$

$$\leqslant y_k x_0^m + \frac{m-k}{m}\left(\frac{k}{my_k}\right)^{\frac{k}{m-k}} \qquad (k = 1, \ldots, m-1).$$

Учитывая эти оценки, из (21) и (22) получим

$$\nu(l_2, \ldots, l_{m-1}) \leqslant x_0^m \sum_{k=1}^{m-1} l_k y_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)\left(\frac{k}{my_k}\right)^{\frac{k}{m-k}} l_k - x_0^m = l_0.$$

Следовательно, $\nu(l_1, \ldots, l_{m-1}) = l_0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. *Пусть* $n = 2n_0 > 2$, $-\infty < a < b < +\infty$ *и на отрезке* $[a, b]$ *соблюдаются неравенства* (6) *и* (7), *где* $l_i$ $(i = 1, \ldots, n_0 - 1)$ *и* $\delta$ — *положительные постоянные. Пусть, далее,* $u$ — *решение дифференциального уравнения* (1), *такое, что*

$$\int_a^b |u^{(k)}(t)|^2 \, dt \leqslant \eta \left(\int_a^b |u(t)|^2 \, dt\right)^{1-\frac{k}{n_0}} \cdot \left(\int_a^b |u^{(n_0)}(t)|^2 \, dt\right)^{\frac{k}{n_0}} \quad (k = 1, \ldots, n_0 - 1), \tag{23}$$

*где* $\eta = \left(1 + \frac{\delta}{4\nu_0}\right)^{\frac{1}{n_0}}$ $\nu_0 = \nu(l_1, \ldots, l_{n_0-1})$. *Тогда*

$$\int_a^b |u^{(k)}(t)|^2 \, dt \leqslant \frac{(-1)^{n_0}}{\delta_0} \sum_{i=1}^{n} (w_i(p_i, u)(b) - w_i(p_i, u)(a)) + \delta_0^{-2} \int_a^b |q(t)|^2 \, dt \quad (k = 0, \ldots, n_0), \tag{24}$$

*где*

$$\delta_0 = \eta^{-1} \min\left\{\frac{\delta}{4}, 1 - \left(\frac{4\nu_0 + \delta}{4\nu_0 + 2\delta}\right)^{\frac{1}{n_0+1}}\right\}, \quad p_n(t) \equiv -1.$$

Доказательство. Согласно лемме 2 и неравенствам (6) и (7) имеем

$$\rho_{n_0} + (\nu_0 + \delta)\rho_0 \leqslant \sum_{k=1}^{n_0-1} l_k \rho_k + w(u) + \int_a^b |q(t) u(t)| \, dt, \tag{25}$$

где

$$\rho_k = \int_a^b |u^{(k)}(t)|^2 \, dt \quad (k = 0, \ldots, n_0),$$

$$w(u) = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} (w_k(p_k, u)(b) - w_k(p_k, u)(a)).$$

В силу леммы 6 найдутся положительные числа $y_1, \ldots, y_{n_0-1}$, такие, что

$$\sum_{k=1}^{n_0-1} l_k y_k = 1, \quad \sum_{k=1}^{n_0-1} \left(1 - \frac{k}{n_0}\right)\left(\frac{k}{n_0 y_k}\right)^{\frac{k}{n_0-k}} l_k = \nu_0.$$

С другой стороны, ввиду условий (23) и неравенства Юнга

$$\rho_k \leqslant \eta\left(\frac{k}{n_0 y_k}\right)^{\frac{k}{n_0}} (\gamma\rho_0)^{1-\frac{k}{n_0}} \left(\frac{n_0 y_k}{k}\right)^{\frac{k}{n_0}} \gamma^{\frac{k}{n_0}-1} \rho_{n_0}^{\frac{k}{n_0}} \leqslant$$

$$\leqslant \eta^{\frac{n_0}{n_0-k}} \gamma\left(1-\frac{k}{n_0}\right)\left(\frac{k}{n_0 y_k}\right)^{\frac{k}{n_0-k}} \rho_0 + \gamma^{1-\frac{n_0}{k}} y_k \rho_{n_0} \leqslant$$

$$\leqslant \left(1+\frac{\delta}{2\nu_0}\right)\left(1-\frac{k}{n_0}\right)\left(\frac{k}{n y_k}\right)^{\frac{k}{n_0-k}} \rho_0 + \gamma^{-\frac{1}{n_0-1}} y_k \rho_0$$

$$(k = 1, \ldots, n_0),$$

где $\gamma = \dfrac{4\nu_0 + 2\delta}{4\nu_0 + \delta}$, и

$$|q(t)\, u(t)| \leqslant \delta^{-1} |q(t)|^2 + \frac{\delta}{4} |u(t)|^2.$$

Поэтому из (25) находим

$$\eta(\rho_{n_0} + \rho_0) \leqslant \frac{1}{\delta_0} w(u) + \delta_0^{-2} \int_a^b |q(t)|^2\, \mathrm{d}t.$$

Отсюда ввиду (23) вытекают оценки (24). Лемма доказана.

Аналогично доказывается

ЛЕММА 8. *Пусть* $n = 2n_0 + 1 > 3$, $-\infty < a < b < +\infty$ *и на отрезке* $[a, b]$ *соблюдаются неравенства* (9) *и* (10), *где* $l_k$ $(k = 1, \ldots, n_0 - 1)$, $\lambda$ *и* $\delta$ — *положительные постоянные. Пусть, далее,* $u$ — *решение дифференциального уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям* (23), *где*

$$\eta = \left(1 + \frac{\delta}{4\lambda\nu_0}\right)^{\frac{1}{n_0}}, \qquad \nu_0 = \nu(l_1, \ldots, l_{n_0-1}).$$

*Тогда*

$$\int_a^b |u^{(k)}(t)|^2\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{(-1)^{m_0}}{\delta_0} \sum_{i=1}^{n} (w_i(p_i, u)(a) - w_i(p_i, u(b)) + $$

$$+ \delta_0^{-2} \int_a^b |q(t)|^2\, \mathrm{d}t \qquad (k = 0, \ldots, n_0),$$

*где*

$$\delta_0 = \eta^{-1} \min\left\{\frac{\lambda\delta}{4}, \lambda - \lambda\left(\frac{4\lambda\nu_0 + \delta}{4\lambda\nu_0 + 2\delta}\right)^{\frac{1}{n_0-1}}\right\}, \qquad p_n(t) \equiv -1.$$

**3. Доказательство основных результатов.**

Доказательство теоремы 1. Пусть $\sigma\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ — произвольная $n$ раз непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\sigma^{(i)}(0) = c_i \ (i = 0, \ldots, n_0 - 1), \quad \sigma(t) = 0 \ \text{при} \ t \geqslant 1. \qquad (26)$$

После преобразования

$$v(t) = u(t) - \sigma(t)$$

уравнение (1) примет вид

$$v^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t) v^{(k)} + \tilde{q}(t), \qquad (27)$$

где

$$\tilde{q}(t) = q(t) + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t) \sigma^{(k)}(t),$$

причем, как это следует из (5),

$$\int_0^{+\infty} |\tilde{q}(t)|^2 \, dt < +\infty. \qquad (28)$$

Согласно леммам 5 и 7 при любом натуральном $m$ дифференциальное уравнение

$$v^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t) v^{(k)} \qquad (1_0)$$

при краевых условиях

$$v^{(i)}(0) = v^{(i)}(m) = 0 \quad (i = 0, \ldots, n_0 - 1) \qquad (29)$$

имеет только нулевое решение. Поэтому задача (27), (29) имеет единственное решение $v_m$ [1]). В силу лемм 3, 5, 7 и условия (28)

$$\int_0^m |v_m^{(k)}(t)|^2 \, dt \leqslant r \qquad (k = 0, \ldots, n_0; \ m = 1, 2, \ldots)$$

и

$$|v_m^{(i)}(0)| \leqslant r \ (i = 0, \ldots, n - 1; \ m = 1, 2, \ldots),$$

где $r$ — не зависящее от $m$ положительное число.

Выберем последовательность натуральных чисел $(m_j)_{j=1}^{+\infty}$ таким образом, чтобы последовательности $(v_{m_j}^{(i)}(0))_{j=1}^{+\infty}$ ($i = 0, \ldots, n - 1$) сходились. Тогда последовательность функций $(v_{m_j})_{j=1}^{+\infty}$ равномерно сходится на каждом конечном отрезке положительной полуоси вместе с $(v_{m_j}^{(i)})_{j=1}^{+\infty}$ ($i = 1, \ldots, n - 1$) и ее предел

$$v_0(t) = \lim_{j \to +\infty} v_{m_j}(t)$$

---

[1]) См., например, [4, гл. 12, теорема 1.1].

является решением дифференциального уравнения $(1_0)$, причем

$$v_0^{(i)}(0)=0 \qquad (i=0,\ldots,n_0-1),$$
$$\int_0^{+\infty} |v_0^{(k)}(t)|^2\,\mathrm{d}t<+\infty \qquad (k=0,\ldots,n_0).$$

Ввиду следствия леммы 3 и условий (26) функция $u(t) = v_0(t) + \sigma(t)$ является решением задачи (1), (3), удовлетворяющим условиям (8).

Нам остается показать, что задача (1), (3) имеет не более одного решения, т. е. дифференциальное уравнение $(1_0)$ при краевых условиях

$$v^{(i)}(0) = 0 \quad (i = 0, \ldots, n_0 - 1),$$
$$\sup\{|v(t)|:\ t \in \mathbf{R}_+\} < +\infty \tag{$3_0$}$$

имеет только нулевое решение.

Пусть $v$ — произвольное решение задачи $(1_0)$, $(3_0)$. Согласно леммам 3 и 4

$$\sup\{|v^{(i)}(t)|:\ t \in \mathbf{R}_+\} < +\infty \quad (i = 0, \ldots, n-1)$$

и найдется $t_0 > 0$ такое, что

$$\int_0^t |v^{(k)}(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau \leqslant \eta\left(\int_0^t |v(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\right)^{1-\frac{k}{n_0}}\left(\int_0^t |v^{(n_0)}(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{k}{n_0}}$$

при $t \geqslant t_0$ $(k = 1, \ldots, n_0 - 1)$, где $\eta^{n_0} = 1 + \delta/(4\nu(l_1, \ldots, l_{n_0-1}))$. Поэтому в силу леммы 7

$$\int_0^t |v^k(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau \leqslant \frac{(-1)^{n_0}}{\delta_0}\sum_{i=1}^n w_i(p_i, v)(t) \tag{30}$$

при $t \geqslant t_0$ $(k = 0, \ldots, n_0 - 1)$. Отсюда ввиду ограниченности функций $p_0, p_k^{(i)}$ $(k = 1, \ldots, n;\ i = 0, \ldots, k-1)$ и $v^{(i)}$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ вытекает, что

$$\int_0^{+\infty} |v^{(k)}(t)|^2\,\mathrm{d}t<+\infty \qquad (k=0,\ldots,n_0).$$

В силу следствия леммы 3

$$\lim_{t\to+\infty} v^{(k)}(t) = 0 \quad (k = 0, \ldots, n-1).$$

Поэтому переход к пределу в неравенствах (30), когда $t \to +\infty$, дает

$$\int_0^{+\infty} |v^{(k)}(t)|^2\,\mathrm{d}t \leqslant 0 \qquad (k=0,\ldots,n_0).$$

Следовательно, $v(t) \equiv 0$. Теорема доказана.

Теорема 2 доказывается совершенно аналогично. Разница состоит лишь в том, что вместо леммы 7 следует применить лемму 8.

Доказательство теоремы 3. Согласно леммам 2, 7, 8 и условию (11) дифференциальное уравнение (1) при любом натуральном $m$ имеет единственное решение, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_m^{(i)}(-m) = 0 \quad (i = 0, \ldots, m_0 - 1),$$
$$u_m^{(i)}(m) = 0 \ (i = 0, \ldots, n - m_0 - 1),$$

причем

$$\int_{-m}^{m} |u_m^{(i)}(t)|^2 \, dt \leqslant r \qquad (i = 0, \ldots, n_0; \quad m = 1, 2, \ldots), \tag{31}$$

где $r$ — не зависящее от $m$ число. Как это легко следует из леммы 3, $(u_m)_{m=1}^{+\infty}$ содержит подпоследовательность $(u_{m_j})_{j=1}^{+\infty}$, равномерно сходящуюся вместе с $(u_{m_j}^{(i)})_{j=1}^{+\infty}$ ($i = 1, \ldots, n-1$) на каждом конечном отрезке. В силу неравенств (31) и следствия леммы 3 функция

$$u(t) = \lim_{j \to +\infty} u_{m_j}(t)$$

является решением задачи (1), (4), удовлетворяющим условиям (12).

С другой стороны, в силу лемм 3, 4′, 7 и 8 дифференциальное уравнение ($1_0$) не имеет ограниченного на $\mathbf{R}$ ненулевого решения. Следовательно, $u$ является единственным решением задачи (1), (4). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. По леммам 5, 7, 8 дифференциальное уравнение ($1_0$) не имеет ненулевого решения, удовлетворяющего условиям

$$v^{(i)}(\omega) = v^{(i)}(0) \qquad (i = 0, \ldots, n - 1).$$

Поэтому дифференциальное уравнение (1) имеет единственное $\omega$-периодическое решение $u$. Это уравнение не имеет другого ограниченного решения, ибо, как было отмечено выше, в условиях теоремы 4 уравнение ($1_0$) не имеет ограниченного на $\mathbf{R}$ ненулевого решения. Теорема доказана.

Институт прикладной математики
Тбилисского государственного
университета

Поступило
09.01.84

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА


[1] Кигурадзе И. Т. О периодических решениях линейных дифференциальных уравнений высших порядков.— Успехи мат. наук, 1983, т. 38, № 5, с. 129—130.

[2] Kiguradze I. T. On vanishing at infinity solutions of ordinary differential equations.— Czechoslovak Math. J., 1983, v. 33, № 4, p. 613—646.

[3] Кигурадзе И. Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975.

[4] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. —М.: Мир, 1970.