И. Т. Кигурадзе, О монотонных решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений $n$-го порядка, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1969, том 33, выпуск 6, 1373–1398

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
33 (1969), 1373—1398

УДК 517.9

И. Т. КИГУРАДЗЕ

# О МОНОТОННЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ $n$-ГО ПОРЯДКА

В работе устанавливаются критерии существования и единственности и изучается поведение при $t \to +\infty$ решения $u(t)$ дифференциального уравнения $u^{(n)} = f(t, u, u', \ldots, u^{(n-1)})$, определенного в промежутке $(0, +\infty)$ и удовлетворяющего условиям $\lim\limits_{t \to +0} u(t) = u_0$, $(-1)^k u^{(k)}(t) \geqslant 0$ при $t > 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

В предлагаемой статье исследуется задача

$$u^{(n)} = f(t, u, u', \ldots, u^{(n-1)}), \tag{1}$$

$$\lim_{t \to 0} u(t) = u_0, \quad (-1)^k u^{(k)}(t) \geqslant 0 \quad \text{при } t > 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{2}$$

где $n \geqslant 2$.

Под решением задачи (1)—(2) понимается функция $u(t)$, абсолютно непрерывная вместе со своими производными до порядка $n-1$ включительно в каждом сегменте, содержащемся в промежутке $(0, +\infty)$, и удовлетворяющая в этом промежутке уравнению (1) и условиям (2). Раньше задача (1)—(2) была изучена лишь для случая $n = 2$ (см. например, ([1]), ([4]), ([6])).

В § 1 настоящей статьи приводятся нужные для дальнейшего леммы об априорных оценках, а в §§ 2,3 и 4 устанавливаются критерии существования и единственности решений задачи (1) — (2) и изучается поведение решений этой задачи при $t \to +\infty$.

Краткое сообщение о некоторых результатах настоящей статьи содержится в заметке ([9]).

## § 1. Леммы об априорных оценках

Условимся, прежде всего, в принятых во всей статье определениях.

Определение 1.1. $\omega(t, x) \in B_n(r; a)$, если $\omega(t, x)$ определена и неотрицательна в области $t \in (0, a]$, $x \in [0, +\infty)$ и найдется такое число $a_0 \in (0, a]$ и такая непрерывная на полуинтервале $(0, a]$ функция $b(t)$, $t^{n-2} b(t) \in L(0, a)$, что, каково бы ни было $\alpha \in (0, a_0]$, для любой функции $u(t)$, абсолютно непрерывной вместе со своими производными до порядка $n-1$ включительно в промежутке $[\alpha, a]$ и удовлетворяющей в этом промежутке неравенствам

$$(-1)^k u^{(k)}(t) \geqslant 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n), \quad u(t) \leqslant r \tag{1.1}$$

и

$$|u^{(n)}(t)| \leqslant \omega(t, |u^{(n-1)}(t)|), \tag{1.2}$$

имеем:

$$|u^{(n-1)}(t)| \leqslant b(t) \tag{1.3}$$

при $\alpha \leqslant t \leqslant a$.

Определение 1.2. $\psi(t, x_1,\dots, x_m) \in K(\alpha, \beta)$, если $m \geqslant 1$, а функция $\psi(t, x_1,\dots, x_m)$ удовлетворяет условиям Каратеодори в области $t \in (\alpha, \beta)$, $|x_k| \leqslant r$ $(k = 1,2,\dots, m)$ при любом $r \in (0, +\infty)$, т. е. $\psi(t, x_1\dots, x_m)$ измерима по $t$ в промежутке $(\alpha, \beta)$ при любых $x_i \in (-\infty, +\infty)$ $(i = 1,2,\dots, m)$, непрерывна по $x_1,\dots, x_m$ в области $-\infty < x_1,\dots, x_m < +\infty$ при почти всех $t \in (\alpha, \beta)$ и для любого $r \in (0, +\infty)$ найдется такая функция $\psi(t; r) \in L(\alpha, \beta)$, что

$$|\psi(t, x_1,\dots, x_m)| \leqslant \psi(t; r) \text{ при } t \in (\alpha, \beta), \ |x_k| \leqslant r \ (k = 1,2,\dots, m).$$

ЛЕММА 1.1. *Если $n \geqslant 3$, функция $u(t)$ абсолютно непрерывна вместе со своими производными до порядка $n-1$ включительно в промежутке* $[\alpha, \beta]$,

$$u^k(\beta) = 0 \quad (k = 1,\dots, n-2) \tag{1.4}$$

*и при* $t \in [\alpha, \beta]$

$$(-1)^k u^k(t) \geqslant 0 \ (k = 0,1,\dots, n), \tag{1.5}$$

*то в промежутке* $[\alpha, \beta]$ *соблюдаются неравенства*:

$$|u^{(k-1)}(t)| \leqslant \frac{[(n-1)!]^{\frac{n-k}{n-1}}}{(n-k)!} |u(t)|^{\frac{n-k}{n-1}} |u^{(n-1)}(t)|^{\frac{k-1}{n-1}} \ (k = 1, 2, \dots, n). \tag{1.6}$$

Доказательство. Сперва докажем, что при $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и $t \in [\alpha, \beta]$

$$|u^{(n-i)}(t)| \leqslant \frac{(i!)^{\frac{i-1}{i}}}{(i-1)!} |u^{(n-1)}(t)|^{\frac{1}{i}} |u^{(n-i-1)}(t)|^{\frac{i-1}{i}}. \tag{1.7}$$

Для $i = 1$ справедливость неравенства (1.7) очевидна. Допустим, что оно справедливо для некоторого $i \leqslant n-2$ и докажем его справедливость для $i+1$.

Умножая обе части неравенства (1.7) на $|u^{(n-i-1)}(t)|^{\frac{1}{i}}$ и интегрируя от $t$ до $\beta$, согласно (1.4) и (1.5) найдем:

$$|u^{(n-i-1)}(t)|^{\frac{i+1}{i}} \leqslant \frac{i+1}{i} \frac{(i!)^{\frac{i-1}{i}}}{(i-1)!} |u^{(n-1)}(t)|^{\frac{1}{i}} \int_t^\beta |u^{(n-i-1)}(\tau)| d\tau =$$

$$= \frac{(i+1)!}{(i!)^{\frac{i+1}{i}}} |u^{(n-1)}(t)|^{\frac{1}{i}} |u^{(n-i-2)}(t)|.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$|u^{(n-i-1)}(t)| \leqslant \frac{[(i+1)!]^{\frac{i}{i+1}}}{i!} |u^{(n-1)}(t)|^{\frac{1}{i+1}} |u^{(n-i-2)}(t)|^{\frac{i}{i+1}}.$$

Тем самым доказано, что при всех $i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, соблюдается неравенство (1.7).

При $k=1$ справедливость неравенства (1.6) очевидна. Предположим, что оно справедливо для некоторого $k \leqslant n-1$. Тогда из (1.7) следует:

$$|u^{(k)}(t)| \leqslant \frac{[(n-k)!]^{\frac{n-k-1}{n-k}}}{(n-k-1)!} |u^{(n-1)}(t)|^{\frac{1}{n-k}} |u^{(k-1)}(t)|^{\frac{n-k-1}{n-k}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{[(n-k)!]^{\frac{n-k-1}{n-k}}}{(n-k-1)!} |u^{(n-1)}(t)|^{\frac{1}{n-k}} \frac{[(n-1)!]^{\frac{n-k-1}{n-1}}}{[(n-k)!]^{\frac{n-k-1}{n-k}}} |u(t)|^{\frac{n-k-1}{n-1}} \times$$

$$\times |u^{(n-1)}(t)|^{\frac{(k-1)(n-k-1)}{(n-1)(n-k)}} = \frac{[(n-1)!]^{\frac{n-k-1}{n-1}}}{(n-k-1)!} |u(t)|^{\frac{n-k-1}{n-1}} |u^{(n-1)}(t)|^{\frac{?}{n-1}},$$

что и доказывает лемму.

З а м е ч а н и е. Неравенства (1.6) являются точными, поскольку для функции $u(t) = (\beta - t)^{n-1}$ имеем:

$$|u^{(k-1)}(t)| \equiv \frac{[(n-1)!]^{\frac{n-k}{n-1}}}{(n-k)!} |u(t)|^{\frac{n-k}{n-1}} |u^{(n-1)}(t)|^{\frac{k-1}{n-1}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

ЛЕММА 1.2. *Если функция $u(t)$ абсолютно непрерывна вместе со своими производными до порядка $n-1$ включительно в промежутке* $[\alpha, \beta]$ *и удовлетворяет в этом промежутке неравенствам* (1.5), *то*

$$|u^{(k)}(\beta)| \leqslant k!\, (\beta - \alpha)^{-k} u(\alpha) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{1.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, согласно (1.5) имеем:

$$u(\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|u^{(k)}(\beta)|}{k!} (\beta - \alpha)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_\alpha^\beta (\tau - \alpha)^{n-1} |u^{(n)}(\tau)|\, d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|u^{(k)}(\beta)|}{k!} (\beta - \alpha)^k,$$

откуда непосредственно вытекают неравенства (1.8).

ЛЕММА 1.3. *Если $n \geqslant 3$, то для любой функции $u(t)$, абсолютно непрерывной вместе со своими производными до порядка $n-1$ включительно на каждом конечном отрезке промежутка* $[\alpha, +\infty)$ *и удовлетворяющей в этом промежутке неравенствам* (1.5), *при $t \in [\alpha, +\infty)$ соблюдаются неравенства* (1.6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$u_m(t) = u(t) - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{u^{(i)}(\alpha + m)}{i!} (t - \alpha - m)^i. \tag{1.9}$$

Из (1.5) и (1.9) ясно, что $u_m(t)$ удовлетворяет условиям леммы 1.1 в промежутке $[\alpha, \alpha+m]$ и поэтому в этом промежутке имеем:

$$|u_m^{(k-1)}(t)| \leqslant \frac{[(n-1)!]^{\frac{n-k}{n-1}}}{(n-k)!} |u_m(t)|^{\frac{n-k}{n-1}} |u_m^{(n-1)}(t)|^{\frac{k-1}{n-1}} \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{1.10}$$

В силу леммы 1.2 ясно, что

$$|u^{(i)}(\alpha+m)| \leqslant i!\, m^{-i} u(\alpha) \quad (i=0, 1, \ldots, n-1). \tag{1.11}$$

Согласно (1.5), (1.9) и (1.11), из (1.10) следует, что при $t \in [\alpha, \alpha+m]$

$$|u^{(k-1)}(t)| \leqslant \frac{u(\alpha)}{m^{k-1}} \sum_{i=k-1}^{n-2} \frac{i!}{(i-k+1)!} +$$

$$+\frac{[(n-1)!]^{\frac{n-k}{n-1}}}{(n-k)!} |u(t)|^{\frac{n-k}{n-1}} |u^{(n-1)}(t)|^{\frac{k-1}{n-1}} \quad (k=2, \ldots, n-1).$$

Переходя к пределу при $m \to +\infty$, получаем из этих неравенств неравенства (1.6.).

ЛЕММА 1.4. *Если $a>0$, $r>0$, $\omega(t, x)>0$ при $t \in (0, a)$, $x \geqslant 0$, $\omega(t, x) \in K(\alpha, a)$ при любом $\alpha \in (0, a)$ и найдется такое неотрицательное число $\rho_0$, что верхнее решение $\rho(t)$ задачи*

$$\frac{d\rho}{dt} = -\omega(t, \rho), \quad \rho(a) = \rho_0 \tag{1.12}$$

*определено в промежутке $(0, a]$ и*

$$(n-2)!\, r < \int_0^a t^{n-2} \rho(t)\, dt < +\infty, \tag{1.13}$$

*то $\omega(t, x) \in B_n(r; a)$.*

Доказательство. Согласно (1.13) найдется такое число $a_0 \in (0, a)$, что

$$\int_{a_0}^a (t-a_0)^{n-2} \rho(t)\, dt > (n-2)!\, r. \tag{1.14}$$

Пусть $\alpha \in (0, a_0]$, а $u(t)$ — некоторая функция, абсолютно непрерывная вместе со своими производными до порядка $n-1$ включительно в промежутке $[\alpha, a]$ и удовлетворяющая в этом промежутке неравенствам (1.1) и (1.2). Покажем, что для некоторого $t_0 \in [a_0, a]$

$$|u^{(n-1)}(t_0)| \leqslant \rho(t_0). \tag{1.15}$$

В самом деле, если допустим противное, т. е. что

$$|u^{(n-1)}(t)| > \rho(t) \text{ при } t \in [a_0, a],$$

то, согласно (1.1) и (1.14), получим:

$$r \geqslant u(a_0) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|u^{(k)}(a_0)|}{k!}(a-a_0)^k + \frac{1}{(n-2)!}\int_{a_0}^{a}(t-a_0)^{n-2}|u^{(n-1)}(t)|\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{(n-2)!}\int_{a_0}^{a}(t-a_0)^{n-2}\rho(t)\,dt > r.$$

Из (1.1) и (1.2) вытекает, что

$$\frac{d\,|u^{(n-1)}(t)|}{dt} \geqslant -\omega(t, |u^{(n-1)}(t)|) \quad \text{при } t \in (\alpha, t_0]. \tag{1.16}$$

Поскольку $\rho(t)$ является верхним решением задачи (1.12), из (1.15) и (1.16) следует, что

$$|u^{(n-1)}(t)| \leqslant \rho(t) \text{ при } t \in [\alpha, t_0]$$

(см. ([8]), лемма сравнения). Отсюда, ввиду (1.1), вытекает, что при $t \in [\alpha, a]$ соблюдается неравенство (1.3), где $b(t) \equiv \rho(t) + \max\limits_{t\in[a_0, a]} \rho(t)$. С другой стороны, из (1.13) ясно, что $t^{n-2}\,b(t) \in L(0, a)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.5. *Если* $a > 0$, $r > 0$, $\psi(t) > 0$ *при* $t \in (0, a)$, $\psi(t) \in L(0, a)$ *а функция* $\omega(t)$ *положительна и непрерывна в промежутке* $[0, +\infty)$,

$$\int_0^a \psi(t)\,dt < \Omega(0) < +\infty \quad \text{и} \quad \int_0^a t^{n-2}\Omega^{-1}\left[\int_0^t \psi(\tau)\,d\tau\right]dt > (n-2)!\,r, \tag{1.17}$$

*где*

$$\Omega(t) = \int_t^{+\infty} \frac{d\tau}{\omega(\tau)}, \tag{1.18}$$

*а* $\Omega^{-1}(t)$ — *функция, обратная* $\Omega(t)$, *то* $\omega(t, x) = \psi(t)\,\omega(x) \in B_n(r; a)$.

Доказательство. Согласно (1.17) найдется такое положительное число $\varepsilon$, что функция

$$\rho(t) = \Omega^{-1}\left[\varepsilon + \int_0^t \psi(\tau)\,d\tau\right]$$

будет удовлетворять условию (1.13). С другой стороны, ввиду (1.18), легко видеть, что $\rho(t)$ является верхним решением задачи (1.12) при

$$\omega(t, x) = \psi(t)\,\omega(x) \text{ и } \rho_0 = \Omega^{-1}\left[\varepsilon + \int_0^a \psi(\tau)\,d\tau\right].$$

Итак, все условия леммы 1.4 соблюдаются, что и доказывает справедливость леммы 1.5.

При $\omega(t) = (1+t)^{\lambda}$ из доказанной леммы непосредственно получается

ЛЕММА 1.5.' *Если* $a>0$, $r>0$, $\lambda>1$, $\psi(t)>0$ *при* $t\in(0, a)$, $\psi(t)\in L(0, a)$,

$$\int_0^a \psi(\tau)\,d\tau<\frac{1}{\lambda-1} \quad u \quad \int_0^a t^{n-2}\left(\int_0^t \psi(\tau)\,d\tau\right)^{-\frac{1}{\lambda-1}} dt=+\infty,$$

*то* $\omega(t, x)=\psi(t)(1+x)^\lambda\in B_n(r;\ a)$.

ЛЕММА 1.6. *Если* $a>0$, $r>0$, $\psi(t)>0$ *при* $t\in(0, a)$, $\psi(t)\in L(\alpha, a)$ *при любом* $\alpha\in(0, a)$, *функция* $\omega(t)$ *положительна и непрерывна в промежутке* $[0, +\infty)$,

$$\lim_{t\to+\infty}\Omega_\delta(t)=+\infty \quad u \quad t^{n-2}\Omega_\delta^{-1}\left[\int_t^a \psi(\tau)\,d\tau\right]\in L(0, a), \tag{1.19}$$

*где*

$$\delta>(n-1)!\,a^{1-n}r, \quad \Omega_\delta(t)=\int_\delta^t \frac{d\tau}{\omega(\tau)}, \tag{1.20}$$

*а* $\Omega_\delta^{-1}(t)$ — *функция, обратная* $\Omega_\delta(t)$, *то* $\omega(t, x)=\psi(t)\omega(x)\in B_n(r;\ a)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая $\omega(t, x)=\psi(t)\,\omega(x)$ и $\rho_0=\delta$, согласно (1.20) найдем, что

$$\rho(t)=\Omega_\delta^{-1}\left[\int_t^a \psi(\tau)\,d\tau\right] \text{ и } \rho(t)>(n-1)!\,a^{1-n}r \quad \text{при } t\in(0, a],$$

где $\rho(t)$ — верхнее решение задачи (1.12). Отсюда следует, что

$$\int_0^t t^{n-2}\rho(t)\,dt>(n-1)!\,a^{1-n}r\int_0^a t^{n-2}\,dt=(n-2)!\,r.$$

С другой стороны, в силу (1.19), $t^{n-2}\rho(t)\in L(0, a)$. Таким образом, соблюдается условие (1.13), что и доказывает лемму.

При $\omega(t)=(1+t)^\lambda$ доказанная лемма принимает следующий вид.

ЛЕММА 1.6'. *Пусть* $a>0$, $r>0$, $\lambda\leqslant 1$, $\psi(t)>0$ *при* $t\in(0, a)$ *и* $\psi(t)\in L(\alpha, a)$ *при любом* $\alpha\in(0, a)$. *Тогда если*

$$t^{n-2}\exp\left[\int_t^a \psi(\tau)\,d\tau\right]\in L(0, a) \quad \text{при } \lambda=1$$

*и*

$$t^{n-2}\left[\int_t^a \psi(\tau)\,d\tau\right]^{\frac{1}{1-\lambda}}\in L(0, a) \quad \text{при } \lambda<1,$$

*то* $\omega(t, x)=\psi(t)(1+x)^\lambda\in B_n(r;\ a)$.

## § 2. Теоремы существования

В дальнейшем везде предполагается, что $f(t, x_1, \ldots, x_n)\in K(\alpha, \beta)$ при любых $\alpha, \beta\in(0, +\infty)$, причем не исключается случай, когда функция $f(t, x_1, \ldots, x_n)$, имея сингулярность при $t=0$, не принадлежит множеству $K(0, \beta)$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Если*

$$f(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0, \quad (-1)^n f(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0 \text{ при } t > 0, \\ (-1)^{k-1} x_k \geqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.1}$$

$a > 0$, $r > 0$ *и в области*

$$t \in (0, a], \ 0 \leqslant x_1 \leqslant r, \ 0 \leqslant (-1)^{k-1} x_k \leqslant \frac{[(n-1)!\, x_1]^{\frac{n-k}{n-1}}}{(n-k)!} |x_n|^{\frac{n-k}{n-1}} \\ (k = 2, \ldots, n-1), \quad (-1)^{n-1} x_n \geqslant 0 \tag{2.2}$$

*соблюдается неравенство*

$$|f(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \omega(t, |x_n|), \tag{2.3}$$

*где* $\omega(t, x) \in B_n(r; a)$, *то при любом* $u_0 \in [0, r]$ *задача* (1) — (2) *имеет по крайней мере одно решение.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая

ЛЕММА 2.1. *Если* $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, $g(t, x_1, \ldots, x_n) \in K(\alpha, \beta)$,

$$g(t, x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ при } t \in [\alpha, \beta], \quad (-1)^{k-1} x_k \leqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.4}$$

*и*

$$0 \leqslant (-1)^n g(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant g(t) \text{ при } t \in [\alpha, \beta], \\ |x_k| < +\infty \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.5}$$

*где*

$$g(t) \in L(\alpha, \beta), \tag{2.6}$$

*то при любом* $u_0 \in [0, +\infty)$ *дифференциальное уравнение*

$$u^{(n)} = g(t, u, u', \ldots, u^{(n-1)}) \tag{2.7}$$

*имеет по крайней мере одно решение* $u(t)$, *удовлетворяющее при* $t \in [\alpha, \beta]$ *неравенствам* (1.5) *и краевым условиям*

$$u(\alpha) = u_0, \quad u^{(k)}(\beta) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-2). \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть $C^{n-1}_{[\alpha,\beta]}$ — пространство $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируемых в промежутке $[\alpha, \beta]$ функций с нормой

$$\|u(t)\| = \max_{t \in [\alpha, \beta]} \sum_{k=0}^{n-1} |u^{(k)}(t)|, \tag{2.9}$$

а $S$ — множество, определенное следующим образом:

$$u(t) \in S, \quad \text{если } u(t) \in C^{n-1}_{[\alpha,\beta]} \text{ и } \|u(t)\| \leqslant n!\, u_0 + c_0 \int_\alpha^\beta g(t)\, dt, \tag{2.10}$$

где

$$c_0 = \sup_{\alpha \leqslant t, \tau \leqslant \beta} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{\partial^k G(t, \tau)}{\partial t^k} \right| \tag{2.11}$$

и

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \dfrac{(t-\beta)^{n-1}(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!\,(\beta-\alpha)^{n-1}} & \text{при } \alpha \leqslant \tau < t \leqslant \beta, \\ \dfrac{1}{(n-1)!}\left[\dfrac{(t-\beta)^{n-1}(\tau-\alpha)^{n-1}}{(\beta-\alpha)^{n-1}} - (t-\tau)^{n-1}\right] & \text{при } \alpha \leqslant t < \tau \leqslant \beta. \end{cases} \tag{2.12}$$

Рассмотрим оператор

$$Hu(t) = \left(\frac{\beta-t}{\beta-\alpha}\right)^{n-1} u_0 + \int_\alpha^\beta G(t, \tau)\, g(\tau, u(\tau), \ldots, u^{(n-1)}(\tau))\, d\tau. \tag{2.13}$$

В силу (2.5), (2.9), (2.10) и (2.11), из (2.13) вытекает, что если $u(t) \in S$, то

$$v(t) = Hu(t) \in S,$$
$$|v^{(n-1)}(t_2) - v^{(n-1)}(t_1)| \leqslant \left|\int_{t_1}^{t_2} g(\tau)\, d\tau\right| \quad \text{при } t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]. \tag{2.14}$$

Согласно лемме Арцелла — Асколи, из (2.6), (2.10) и (2.14) следует, что $HS$ является компактным множеством пространства $C^{n-1}_{[\alpha,\beta]}$.

Следовательно, оператор $H$ преобразует множество $S$ в свое же компактное подмножество и так как, кроме того, $H$ является непрерывным оператором, то, согласно теореме Шаудера (см. ([2]), стр. 574—578), найдется такая функция $u(t) \in S$, что

$$u(t) = H\,u(t) \text{ при } t \in [\alpha, \beta]. \tag{2.15}$$

В силу (2.12) и (2.13), из (2.15) непосредственно следует, что $u(t)$ является решением задачи (2.7) — (2.8).

Покажем, что

$$(-1)^{n-1} u^{(n-1)}(\beta) \geqslant 0. \tag{2.16}$$

В самом деле, если допустим, что $(-1)^{n-1}u^{(n-1)}(\beta) < 0$, то в силу (2.4) и (2.8) легко покажем, что $u(t) = \dfrac{u^{(n-1)}(\beta)}{(n-1)!}(t-\beta)^{n-1}$, что невозможно, ибо $u(\alpha) = u_0 > 0$.

В силу (2.5) ясно, что $(-1)^n u^{(n)}(t) \geqslant 0$ при $t \in [\alpha, \beta]$, согласно чему из (2.8) и (2.16) следует, что при $t \in [\alpha, \beta]$ соблюдаются неравенства (1.5). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Выберем для функции $\omega(t, x)$ число $a_0$ и функцию $b(t)$ согласно определению 1.1. Введем обозначения:

$$b_k(t) = n!\, r\,(a - a_0)^{-k} + \int_t^a \tau^{n-2-k} b(\tau)\, d\tau \quad (k = 0, \ldots, n-2), \quad b_{n-1}(t) = b(t), \tag{2.17}$$

$$\rho(t) = \max_{\tau \in [t, a]} \sum_{k=0}^{n-1} b_k(\tau), \tag{2.18}$$

$$\chi(t;\tau)=\begin{cases}1 & \text{при } 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ 2-\dfrac{t}{\tau} & \text{при } \tau<t<2\tau,\\ 0 & \text{при } t\geqslant 2\tau\end{cases}\tag{2.19}$$

и

$$\sigma_k(t)=\begin{cases}t & \text{при } (-1)^{k-1}t>0\\ 0 & \text{при } (-1)^{k-1}t\leqslant 0\end{cases}\quad (k=1,2,\ldots,n).\tag{2.20}$$

Поскольку $t^{n-2}\,b(t)\in L(0,\,a)$, из (2.17) следует, что

$$b_1(t)\in L(0,\,a).\tag{2.21}$$

Пусть $m$ — произвольное натуральное число. Полагая $\alpha=\frac{a_0}{m}$, $\beta=a+m$ и

$$g(t,x_1,\ldots,x_n)=\chi\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i|;\,\rho\left(\frac{a_0}{m}\right)\right]f(t,\sigma_1(x_1),\ldots,\sigma_n(x_n)),\tag{2.22}$$

в силу (2.1), (2.19) и (2.20) легко проверим, что соблюдаются условия леммы 2.1. Поэтому дифференциальное уравнение (2.7) имеет решение $u_m(t)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_m\left(\frac{a_0}{m}\right)=u_0,\qquad u_m^{(k)}(a+m)=0\quad (k=0,\ldots,n-2)\tag{2.23}$$

и неравенствам

$$(-1)^k\,u_m^{(k)}(t)\geqslant 0\quad \text{при } t\in\left[\frac{a_0}{m},\,a+m\right]\quad (k=0,1,\ldots,n).\tag{2.24}$$

Поскольку $u_0\in[0,\,r]$, в силу леммы 1.1, из (2.23) и (2.24) заключаем, что при $t\in\left[\frac{a_0}{m},\,a+m\right]$ соблюдаются неравенства

$$0\leqslant u_m(t)\leqslant r,\quad 0\leqslant(-1)^{k-1}u_m^{(k-1)}(t)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{[(n-1)!\,u_m(t)]^{\frac{n-k}{n-1}}}{(n-k)!}\,|u_m^{(n-1)}(t)|^{\frac{k-1}{n-1}}\quad (k=2,\ldots,n).$$

Следовательно, при $t\in\left[\frac{a_0}{m},\,a\right]$ точка $(t,\,u_m(t),\ldots,\,u_m^{(n-1)}(t))$ принадлежит области (2.2). Поэтому из (2.3), (2.7), (2.19), (2.20) и (2.22) находим:

$$|u_m^{(n)}(t)|\leqslant\omega(t,\,|u_m^{(n-1)}(t)|)\quad \text{при } t\in\left[\frac{a_0}{m},\,a\right].$$

Отсюда, в силу определения 1.1, вытекает:

$$|u_m^{(n-1)}(t)|\leqslant b(t)\quad \text{при } t\in\left[\frac{a_0}{m},\,a\right].\tag{2.25}$$

Согласно лемме 1.2 и условиям (2.17), (2.25), из равенств

$$|u_m^{(k)}(t)| = \sum_{i=k}^{n-2} \frac{|u^{(i)}(a)|}{(i-k)!}(a-t)^{i-k} +$$

$$+ \frac{1}{(n-2-k)!}\int_t^a (\tau - t)^{n-2-k} |u_m^{(n-1)}(\tau)| \, d\tau \quad (k = 0, 1, \ldots, n-2)$$

получаем:

$$|u_m^{(k)}(t)| \leqslant b_k(t) \quad \text{при } t \in \left[\frac{a_0}{m}, a\right] \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{2.26}$$

В силу (2.18), (2.24) и (2.26), имеем:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |u_m^{(k)}(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left|u^{(k)}\left(\frac{a_0}{m}\right)\right| \leqslant \rho\left(\frac{a_0}{m}\right) \quad \text{при } t \in \left[\frac{a_0}{m}, a+m\right]. \tag{2.27}$$

На основании (2.19), (2.20), (2.22), (2.24) и (2.27), из (2.7) легко заключить, что $u_m(t)$ является решением уравнения (1).

Итак, мы доказали, что уравнение (1) имеет последовательность решений $\{u_m(t)\}$, определенных, соответственно, в промежутках $\left[\frac{a_0}{m}, a+m\right]$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и удовлетворяющих условиям (2.23), (2.24) и (2.26).

Из (1), (2.18), (2.24) и (2.26) ясно, что для любых $t_* \in (0, a_0)$ и $t^* \in (a, +\infty)$ имеем:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |u_m^{(k)}(t)| \leqslant \rho(t_*) \quad \text{при } t \in \left[\frac{a_0}{m}, a+m\right] \cap [t_*, t^*]$$

и

$$|u^{(n-1)}(t_2) - u^{(n-1)}(t_1)| \leqslant \left|\int_{t_1}^{t_2} f^*(t)\, dt\right| \quad \text{при } t_1, t_2 \in \left[\frac{a_0}{m}, a+m\right] \cap [t_*, t^*],$$

где $f^*(t) = \max\limits_{\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant \rho(t_*)} |f(t, x_1, \ldots, x_n)|$.

Таким образом, последовательности $\{u_m^{(k)}(t)\}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на каждом сегменте, содержащемся в $(0, +\infty)$. Поэтому, согласно лемме Арцелла — Асколи, довольно легко можно показать, что $\{u_m(t)\}$ содержит такую подпоследовательность $\{u_{m_i}(t)\}$, что $\{u_{m_i}^{(k)}(t)\}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ равномерно сходятся на каждом сегменте, содержащемся в $(0, +\infty)$. Полагая

$$\lim_{i \to \infty} u_{m_i}(t) = u(t) \tag{2.28}$$

и перейдя к пределу в равенстве

$$u_{m_i}^{(n-1)}(t) = u_{m_i}^{(n-1)}(a) +$$

$$+ \int_a^t f(\tau, u_{m_i}(\tau), \ldots, u_{m_i}^{(n-1)}(\tau))\, d\tau \quad \text{при } t \in \left[\frac{a_0}{m_i}, a+m_i\right],$$

когда $i \to \infty$, найдем:

$$u^{(n-1)}(t) = u^{(n-1)}(a) + \int_a^t f(\tau, u(\tau), \ldots, u^{(n-1)}(\tau))\, d\tau \quad \text{при } t \in (0, +\infty).$$

Следовательно, $u(t)$ является решением уравнения (1), определенным в промежутке $(0, +\infty)$.

В силу (2.21), (2.23) и (2.26),

$$|u_{m_i}(t) - u_0| \leqslant \int_0^t b_1(\tau)\, d\tau \quad \text{при } t \in \left[\frac{a_0}{m_i}, a\right],$$

откуда, на основании (2.28), получаем:

$$|u(t) - u_0| \leqslant \int_0^t b_1(\tau)\, d\tau \quad \text{при } t \in (0, a].$$

Значит, $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = u_0$, а с другой стороны, в силу (2.28), из (2.24) следует, что при $t \in (0, +\infty)$ соблюдаются неравенства (1.5). Тем самым доказано, что $u(t)$ является решением задачи (1) — (2).

Согласно леммам 1.4, 1.5, 1.5′, 1.6 и 1.6′, из доказанной теоремы вытекает такое

Следствие 1. *Пусть соблюдаются условия* (2.1), $a, r \in (0, +\infty)$ *и в области* (2.2) *имеет место неравенство* (2.3). *Тогда задача* (1) — (2) *разрешима при любом* $u_0 \in [0, r]$, *если выполняется одно из следующих трех условий*:

1) $\omega(t, x)$ *удовлетворяет условиям леммы* 1.4;

2) $\omega(t, x) = \psi(t)\,\omega(x)$, *где* $\psi(t)$ *и* $\omega(x)$ *удовлетворяют либо условиям леммы* 1.5, *либо условиям леммы* 1.6;

3) $\omega(t, x) = \psi(t)(1 + x)^{\lambda}$, *где* $\psi(t)$ *и* $\lambda$ *удовлетворяют либо условиям леммы* 1.5′, *либо условиям леммы* 1.6′.

Опираясь на следствие 1, непосредственной проверкой убедимся, что имеет место следующее простое

Следствие 2. *Пусть соблюдаются условия* (2.1), $a, r \in (0, +\infty)$ *и в области* $t \in (0, a)$, $0 \leqslant x_1 \leqslant r$, $(-1)^{k-1} x_k \geqslant 0$ $(k = 2, \ldots, n)$ *имеем*:

$$|f(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant A t^{(n-1)\lambda - n} |\ln t|^{\lambda - 1 - \varepsilon} \sum_{k=2}^{n} (1 + |x_n|)^{\mu_k} (1 + |x_k|)^{\frac{n-1}{k-1}\nu_k},$$

*где* $A \geqslant 0$, $\nu_k \geqslant 0$, $\mu_k + \nu_k \leqslant \lambda$ $(k = 2, \ldots, n)$, $\varepsilon > 0$ *при* $\lambda \leqslant 1$ *и* $\varepsilon = 0$ *при* $\lambda > 1$. *Тогда для любого* $u_0 \in [0, r]$ *задача* (1) — (2) *имеет по крайней мере одно решение*.

Приведенные выше условия вида (2.3) в определенном смысле близки к необходимым условиям. На это указывают следующие следствия теоремы 2.1.

С л е д с т в и е 3. *Пусть соблюдаются условия* (2.1), *и пусть в области*

$$t>0,\quad x_1\geqslant 0,\quad 0\leqslant(-1)^{k-1}x_k\leqslant\frac{[(n-1)!\,x_1]^{\frac{n-k}{n-1}}}{(n-k)!}|x_n|^{\frac{k-1}{n-1}}$$
$$(k=2,\ldots,n-1),\quad (-1)^{n-1}x_n\geqslant 0 \tag{2.29}$$

*имеем*:

$$\psi(t)\,[c_1(x_1)+|x_n|^{\lambda}]\leqslant|f(t,x_1,\ldots,x_n)|\leqslant c_2(x_1)\psi(t)\,(1+|x_n|^{\lambda}), \tag{2.30}$$

*где* $\lambda>1$, $c_1(t)$ *и* $c_2(t)$ *непрерывны и положительны в промежутке* $(0,+\infty)$, $\psi(t)>0$ *при* $t\in(0,+\infty)$, $\psi(t)\in L(0,\alpha)$ *и*

$$t^{n-2}\left[\int_0^t\psi(\tau)\,d\tau\right]^{\frac{1}{1-\lambda}}\in L(\alpha,+\infty) \tag{2.31}$$

*при любом* $\alpha\in(0,+\infty)$. *Тогда для того чтобы задача* (1) — (2) *была разрешимой при любом* $u_0\in[0,+\infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы при* $\alpha>0$

$$\int_0^{\alpha}t^{n-2}\left[\int_0^t\psi(\tau)\,d\tau\right]^{\frac{1}{1-\lambda}}dt=+\infty. \tag{2.32}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность непосредственно вытекает из следствия 1. Докажем необходимость. Допустим противное: пусть нарушается условие (2.32) и задача (1) — (2) разрешима при любом $u_0\in[0,+\infty)$. Тогда, согласно (2.31), будем иметь:

$$M=\int_0^{+\infty}t^{n-2}\left[\int_0^t\psi(\tau)\,d\tau\right]^{\frac{1}{1-\lambda}}dt<+\infty. \tag{2.33}$$

Отсюда ясно, что

$$\int_0^{+\infty}\psi(t)\,dt=+\infty. \tag{2.34}$$

Предположим теперь, что $u_0$ — произвольное положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$u_0>[(n-2)!\,(\lambda-1)^{\frac{1}{\lambda-1}}]^{-1}M. \tag{2.35}$$

Согласно лемме 1.3, при любом $t>0$ точка $(t,u(t),\ldots,u^{(n-1)}(t))$ принадлежит области (2.29), поэтому из (2.30) имеем:

$$|u^{(n)}(t)|\geqslant\psi(t)\,[c_1u(t)+|u^{(n-1)}(t)|^{\lambda}]\ \text{при}\ t>0. \tag{2.36}$$

Из (2) ясно, что

$$\lim_{t\to+\infty}u^{(k)}(t)=0\quad(k=1,2,\ldots,n-1). \tag{2.37}$$

Покажем, что

$$\lim_{t\to 0}u(t)=0. \tag{2.38}$$

Действительно, если допустим, что $u(t) \geqslant u_1 > 0$ при $t > 0$, то, согласно (2), (2.36) и (2.37), найдем:

$$|u^{(n-1)}(1)| = \int_1^{+\infty} |u^{(n)}(\tau)|\,d\tau \geqslant c_0 \int_1^{+\infty} \psi(\tau)\,d\tau, \quad c_0 = \min_{u_1 \leqslant t \leqslant u_0} c_1(t),$$

что противоречит условию (2.34).

Ввиду (2) и (2.36), имеем:

$$\frac{d\,|u^{(n-1)}(t)|}{dt} \leqslant -\psi(t)\,|u^{(n-1)}(t)|^{\lambda} \quad \text{при } t \in (0, +\infty),$$

откуда непосредственно следует, что

$$|u^{(n-1)}(t)| \leqslant \left[(\lambda - 1)\int_0^t \psi(\tau)\,d\tau\right]^{\frac{1}{1-\lambda}} \text{ при } t \in (0, +\infty). \tag{2.39}$$

Согласно (2), (2.37) и (2.38) находим:

$$u_0 = \frac{1}{(n-2)!}\int_0^{+\infty} t^{n-2}\,|u^{(n-1)}(t)|\,dt,$$

откуда в силу (2.33) и (2.39) вытекает:

$$u_0 \leqslant [(n-2)!\,(\lambda - 1)^{\frac{1}{\lambda-1}}]^{-1} M,$$

что противоречит неравенству (2.35). Полученное противоречие доказывает, что если $u_0$ удовлетворяет неравенству (2.35), то задача (1) — (2) не имеет решения.

Следствие 4. *Пусть соблюдаются условия* (2.1), $a > 0$, $r > 0$ *и в области* (2.2) *имеем:*

$$\psi(t, x_1)(1 + |x_n|)^{\lambda} \leqslant |f(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant c\psi(t, x_1)(1 + |x_n|)^{\lambda}, \tag{2.40}$$

*где* $\lambda < 1$, $c \geqslant 1$, *а функция* $\psi(t, x_1)$ *неотрицательна, не убывает по* $x_1$ *и* $\psi(t, x_1) \in L(\alpha, a)$ *при любых* $\alpha \in (0, a]$ *и* $x_1 \in [0, r)$. *Тогда для того чтобы задача* (1) — (2) *была разрешимой для любого* $u_0 \in [0, r)$, *необхомо и достаточно, чтобы при любом* $x_1 \in [0, r)$ *соблюдалось условие*

$$t^{n-2}\left[\int_t^a \psi(\tau, x_1)\,d\tau\right]^{\frac{1}{1-\lambda}} \in L(0, a).$$

Доказательство. Достаточность непосредственно вытекает из следствия 1. Докажем необходимость. Для этого достаточно показать, что если для некоторого $x_1 \in (0, r)$

$$\int_0^a t^{n-2}\left[\int_t^a \psi(\tau, x_1)\,d\tau\right]^{\frac{1}{1-\lambda}} dt = +\infty, \tag{2.41}$$

то при

$$x_1 < u_0 > r \tag{2.42}$$

задача (1)— (2) не имеет решения.

Допустим противное: пусть задача (1) — (2) имеет решение $u(t)$. В силу леммы 1.3, точка $(t, u(t), \ldots, u^{(n-1)}(t))$ при $t \in (0, a)$ принадлежит области (2.2), поэтому, согласно (2.40) и (2.42), найдется такое число $\alpha \in (0, a)$, что

$$\frac{d\,|u^{(n-1)}(t)|}{dt} \leqslant -\psi(t, x_1)(1 + |u^{(n-1)}(t)|)^{\lambda} \quad \text{при } t \in (0, \alpha].$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$|u^{(n-1)}(t)| \geqslant \left[(1-\lambda)\int_t^{\alpha}\psi(\tau, x_1)\,d\tau\right]^{\frac{1}{1-\lambda}} \quad \text{при } t \in (0, \alpha]. \tag{2.43}$$

В силу (2), (2.41) и (2.43),

$$u_0 = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{|u^{(k)}(\alpha)|}{k!}\alpha^k + \frac{1}{(n-2)!}\int_0^{\alpha} t^{n-2}\,|u^{(n-1)}(t)|\,dt >$$

$$> [(n-2)!\,(1-\lambda)^{\frac{1}{\lambda-1}}]^{-1}\int_0^{\alpha} t^{n-2}\left[\int_t^{\alpha}\psi(\tau, x_1)\,d\tau\right]^{\frac{1}{1-\lambda}} dt = +\infty.$$

Полученное противоречие доказывает справедливость следствия.

З а м е ч а н и е. Совершенно аналогично теореме 2.1 можно доказать, что если соблюдаются условия теоремы 2.1, то при любых $u_0 \in [0, r]$ и $\alpha \in (0, +\infty)$ уравнение (1) имеет решение $u(t)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{t\to 0} u(t) = u_0, \quad u^{(k)}(\alpha) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-2). \tag{2.44}$$

Аналогичные (1) — (2.44) задачи исследуются в работах ([3]) и ([5]) в предположении, что

$$f(t, x_1, \ldots, x_n) = o\Big(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^{\frac{n}{k-1}}\Big) \quad \text{при } \sum_{k=1}^{n}|x_k| \to +\infty. \tag{2.45}$$

Как видно из следствий 1 и 2 теоремы 2.1, ограничение (2.45) в некоторых случаях можно существенно ослабить (в нашем случае это достигается за счет условий 2.1).

ТЕОРЕМА 2.2. *Если*

$$f(t, x_1, \ldots, x_n) \in K(0, \alpha) \text{ при любом } \alpha \in (0, +\infty) \tag{2.46}$$

*и соблюдаются условия* (2.1), *то найдется такое положительное число* $r$, *что при любом* $u_0 \in [0, r]$ *задача* (1) — (2) *имеет по крайней мере одно решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$f^*(t) = \max_{\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k| \leqslant 2} |f(t, x_1, \ldots, x_n)|. \tag{2.47}$$

В силу (2.46),

$$f^*(t) \in L(0, \alpha) \text{ при любом } \alpha \in (0, +\infty). \tag{2.48}$$

Поэтому найдутся такие положительные числа $a$ и $r$, что

$$a<1, \quad (n+1)!\, a^{1-n} r + n \int_0^a f^*(t)\, dt < 1. \tag{2.49}$$

Рассмотрим уравнение (2.7), где

$$g(t, x_1, \ldots, x_n) = \chi\left[\sum_{k=1}^{n} |x_k|;\ 1\right] f(t_1, x_1, \ldots, x_n), \tag{2.50}$$

а $\chi(t;\ \tau)$ — функция, определенная равенством (2.19). Согласно (2.19), (2.47) и (2.50), ясно, что

$$|g(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant f^*(t) \text{ при } t>0,\ |x_k| < +\infty \quad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{2.51}$$

и так как, кроме того, соблюдается условие (2.48), то из следствия 1 теоремы 2.1 вытекает, что при любом $u_0 \in (0, +\infty)$ задача (2.7) — (2) имеет по крайней мере одно решение.

Предположим теперь, что $u_0 \in [0, r]$, а $u(t)$ — некоторое решение задачи (2.7) — (2). Из леммы 1.2 следует, что

$$|u^{(k)}(a)| \leqslant k!\, a^{-k} r \quad (k=0, 1, \ldots, n-1). \tag{2.52}$$

Согласно (2), (2.51) и (2.52), из равенств

$$|u^{(k)}(t)| = \sum_{i=k}^{n-1} \frac{|u^{(i)}(a)|}{(i-k)!}(a-t)^{i-k} +$$

$$+ \frac{1}{(n-k-1)!}\int_t^a (\tau - t)^{n-k-1} |g(\tau, u(\tau), \ldots, u^{(n-1)}(\tau))|\, d\tau \quad (k=0, 1, \ldots, n-1)$$

найдем:

$$|u^{(k)}(t)| \leqslant n!\, a^{1-n} r + \int_0^a f^*(\tau)\, d\tau \quad \text{при } t \in (0, +\infty) \quad (k=0, 1, \ldots, n-1),$$

откуда, ввиду (2.49), получаем:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |u^{(k)}(t)| < 1 \quad \text{при } t \in (0, +\infty),$$

согласно чему из (2.19) и (2.50) следует, что $u(t)$ является решением уравнения (1). Теорема доказана.

## § 3. Поведение решений задачи (1) — (2) при $t \to +\infty$

Всюду в этом параграфе предполагается, что $u_0$—фиксированное положительное число и задача (1) — (2) имеет по крайней мере одно решение.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть соблюдаются условия* (2.1) *и для любого* $\varepsilon \in (0, u_0]$ *найдется такое положительное число* $a$ *и такие суммируемые на* *каждом конечном отрезке промежутка* $[a, +\infty)$ *функции* $\sigma_1(t)$ *и* $\sigma_2(t)$, *что*

$$\lim_{s\to+\infty}\int_a^s t^{n-2}dt\int_t^s \sigma_1(\tau)\exp\left[\int_t^\tau \sigma_2(\xi)\,d\xi\right]d\tau = +\infty, \tag{3.1}$$

*и в области* $a \leqslant t < +\infty$, $\varepsilon \leqslant x_1 \leqslant u_0$, $0 \leqslant (-t)^{i-1} x_i \leqslant \varepsilon$ $(i = 2, \ldots, n)$ *имеем:*

$$|f(t, x_1, \ldots, x_n)| \geqslant \sigma_1(t) + \sigma_2(t)\,|x_n|. \tag{3.2}$$

*Тогда любое решение* $u(t)$ *задачи* (1) — (2) *удовлетворяет условиям*

$$\lim_{t\to+\infty} t^i u^{(i)}(t) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{3.3}$$

Доказательство. Согласно (2) и (2.1), ясно, что для любого $t_0 \in (0 + \infty)$

$$u(t_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|u^{(i)}(t)|}{i!}(t-t_0)^i + \frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^t |u^{(n)}(\tau)|\,d\tau \geqslant$$

$$\geqslant u(t) + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{|u^{(i)}(t)|}{i!}(t-t_0)^i \quad \text{при } t \geqslant t_0.$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу сперва при $t \to +\infty$, а потом при $t_0 \to +\infty$, найдем:

$$\lim_{t\to+\infty} t^i u^{(i)}(t) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{3.4}$$

Следовательно, остается доказать, что $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0$. Допустим противное, что $u(t) \geqslant \varepsilon$ при $t \geqslant 0$, где $\varepsilon$ — некоторая положительная постоянная. Тогда, ввиду (2) и (3.4), найдется такое положительное число $a$, что

$$0 \leqslant (-t)^i u^{(i)}(t) \leqslant \varepsilon \text{ при } t \geqslant a \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{3.5}$$

Поэтому, согласно (3.2), будем иметь:

$$\frac{d}{dt}|u^{(n-1)}(t)| \leqslant -\sigma_1(t) - \sigma_2(t)\,|u^{(n-1)}(t)| \quad \text{при } t \geqslant a.$$

Отсюда ясно, что для любого $s \in (a, +\infty)$

$$|u^{(n-1)}(t)| \geqslant \int_t^s \sigma_1(\tau)\exp\left[\int_t^\tau \sigma_2(\xi)\,d\xi\right]d\tau \quad \text{при } a \leqslant t \leqslant s. \tag{3.6}$$

Согласно (2) и (3.6) находим:

$$u_0 = \sum_{i=0}^{n-2}\frac{|u^{(i)}(s)|}{i!}s^i + \frac{1}{(n-2)!}\int_0^s t^{n-2}|u^{(n-1)}(t)|\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{(n-2)!}\int_a^s t^{n-2}dt\int_t^s \sigma_1(\tau)\exp\left[\int_t^\tau \sigma_2(\xi)\,d\xi\right]d\tau \quad \text{при } s \geqslant a,$$

что противоречит условию (3.1). Полученное противоречие доказывает теорему.

Введем теперь следующее

Определение 3.1. Нетривиальное решение $u(t)$ уравнения (1) назовем особым, если найдется такое положительное число $t_0$, что $u(t) \equiv \equiv 0$ при $t \in [t_0, +\infty)$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть соблюдаются условия* (2.1), *функция* $f(t, x, 0, \ldots, 0)$ *отлична от нуля на множестве положительный меры промежутка* $t_0 \leqslant t < +\infty$ *при любых* $x \in (0, u_0]$ *и* $t_0 \in (0, +\infty)$ *и найдутся такие положительные числа* $a$ *и* $\varepsilon$, *что в области* $a \leqslant t < +\infty$, $0 \leqslant x_1 \leqslant u_0$, $0 \leqslant (-t)^{i-1} x_i \leqslant \varepsilon$ $(i = 2, \ldots, n)$ *имеем*:

$$|f(t, x_1, \ldots, x_n)| \geqslant \delta (1 + t)^{k-1-n} |x_k|^\lambda, \tag{3.7}$$

*где* $1 \leqslant k \leqslant n$, $\delta > 0$, $0 < \lambda < 1$. *Тогда любое решение задачи* (1) — (2) *является особым.*

Доказательство. Допустим противное, что задача (1) — (2) имеет решение $u(t)$, удовлетворяющее неравенству

$$u(t) > 0 \text{ при } t \in [0, +\infty). \tag{3.8}$$

Покажем, что тогда

$$(-1)^j u^{(j)}(t) > 0 \text{ при } t \in [0, +\infty) \quad (j = 1, \ldots, n-1). \tag{3.9}$$

В самом деле, если предположить, что для некоторых $j$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, и $t_0 \in [0, +\infty)$ имеем $u^{(j)}(t_0) = 0$, то, согласно (2), (2.1) и (3.8), можно заключить, что $u(t) \equiv u(t_0) > 0$ при $t \geqslant t_0$. С другой стороны, поскольку $f(t, u(t_0), 0, \ldots, 0)$ отлична от нуля на множестве положительной меры, для $t$ достаточно больших будем иметь:

$$|u^{(n-1)}(t)| = \int_0^t |f(\tau, u(t_0), 0, \ldots, 0)| d\tau > 0,$$

что невозможно.

Ввиду (2) и (3.4), ясно, что для некоторого достаточно большого положительного числа $a$ соблюдаются условия (3.5). Поэтому, согласно (3.7), имеем:

$$|u^{(n)}(t)| \geqslant \delta (1 + t)^{k-1-n} |u^{(k-1)}(t)|^\lambda \text{ при } t \in [a, +\infty).$$

Пусть $s \in [a, +\infty)$. Умножая обе части последнего неравенства на $|u^{(k)}(t)|$ и интегрируя от $t$ до $2s$, согласно (3.9) найдем:

$$|u^{(n-1)}(t)| |u^{(k)}(t)| > \frac{\delta}{\lambda + 1} (1 + 2s)^{k-1-n} (|u^{(k-1)}(t)|^{\lambda+1} - |u^{(k-1)}(2s)|^{\lambda+1}) >$$

$$> \frac{\delta}{2} (1 + 2s)^{k-1-n} (|u^{(k-1)}(t)| - |u^{(k-1)}(2s)|)^{\lambda+1} \quad \text{при } t \in [a, 2s].$$

Повторяя этот процесс $n - k - 2$ раза, получим:

$$|u^{(k+1)}(t)| |u^{(k)}(t)|^{n-k-1} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\delta}{(n-k)!} (1 + 2s)^{k-1-n} (|u^{(k-1)}(t)| - |u^{(k-1)}(2s)|)^{\lambda+n-k-1} \quad \text{при } t \in [a, 2s].$$

Умножая теперь обе части этого неравенства на $|u^{(k)}(t)|$ и интегрируя от $t$ до $2s$, найдем:

$$|u^{(k)}(t)|^{n+1-k} \geqslant \frac{\delta}{n!}(1+2s)^{k-1-n}(|u^{(k-1)}(t)| - |u^{(k-1)}(2s)|)^{\lambda+n-k}$$

$$\text{при } t \in [a, 2s].$$

Считая $\delta < n!$, согласно (3.9) выводим отсюда:

$$|u^{(k)}(t)|(|u^{(k-1)}(t)| - |u^{(k-1)}(2s)|)^{-\frac{n+\lambda-k}{n+1-k}} \geqslant \frac{\delta}{n!}(1+2s)^{-1} \quad \text{при} \quad t \in [a, 2s).$$

Интегрирование этого неравенства от $s$ до $2s$ дает:

$$(|u^{(k-1)}(s)| - |u^{(k-1)}(2s)|)^{\frac{1-\lambda}{n+1-k}} \geqslant \frac{(1-\lambda)\delta}{(n+1)!}\frac{s}{1+2s}. \tag{3.10}$$

Если $k > 1$, то, ввиду (3.4), имеем:

$$\lim_{t\to+\infty} u^{(k-1)}(t) = 0, \tag{3.11}$$

а если $k = 1$, то справедливость условия (3.11) следует из теоремы 3.1 согласно условию (3.7).

Перейдя в неравенстве (3.10) к пределу при $s \to +\infty$, в силу (3.11) получим:

$$0 \geqslant \frac{(1-\lambda)\delta}{(n+1)!\,2} > 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть выполнены условия* (2.1), *уравнение* (1) *не имеет особых решений и найдутся такие положительные числа* $a$ *и* $\varepsilon$, *что в области* $a \leqslant t < +\infty$, $0 \leqslant (-t)^{k-1}x_k \leqslant \varepsilon$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *соблюдается неравенство*

$$|f(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k(t)|x_k|, \tag{3.12}$$

*где*

$$t^{n-k}p_k(t) \in L(a, +\infty) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.13}$$

*Тогда любое решение* $u(t)$ *задачи* (1) — (2) *стремится к отличному от нуля пределу, когда* $t \to +\infty$.

Доказательство. Допустим противное: пусть некоторое решение $u(t)$ задачи (1) — (2) удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0. \tag{3.14}$$

Поскольку уравнение (1) не имеет особых решений, очевидно, что соблюдается неравенство (3.8).

В силу леммы 1.2 имеем:

$$0 \leqslant (t-\tau)^{k-1}u^{(k-1)}(\tau) \leqslant (k-1)!\,u(t) \text{ при } \tau \geqslant t \geqslant 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.15}$$

Согласно (3.13), (3.14) и (3.15), без ограничения общности можем считать, что $0 \leqslant (-t)^{k-1} u^{(k-1)}(t) \leqslant \varepsilon$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ при $t \geqslant a$ и

$$\frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n} k! \int_{a}^{+\infty} t^{n-k} p_k(t)\, dt < 1. \tag{3.16}$$

В силу (3.8), (3.12), (3.14), (3.15) и (3.16) найдем:

$$u(a) = -\frac{1}{(n-1)!} \int_{a}^{+\infty} (a-t)^{n-1} f(t, u'(t), \ldots, u^{(n-1)}(t))\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n} \int_{a}^{+\infty} (t-a)^{n-1} p_k(t)\, |u^{(k-1)}(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{u(a)}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n} k! \int_{a}^{+\infty} (t-a)^{n-k}\, p_k(t)\, dt < u(a).$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

ТЕОРЕМА 3.4. *Пусть выполнены условия* (2.1), *уравнение* (1) *не имеет особых решений и найдутся такие положительные числа* $a$ *и* $\varepsilon$, *что в области* $a \leqslant t < +\infty$, $0 \leqslant x_1 \leqslant u_0$, $0 \leqslant (-t)^{k-1} x_k \leqslant \varepsilon$ $(k = 2, \ldots, n)$ *соблюдается неравенство*

$$|f(t, x_1, \ldots, x_n) - p(t)\, x_1| \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k(t)\, |x_k|, \tag{3.17}$$

*где* $p(t)$ *— непрерывно дифференцируемая в промежутке* $[a, +\infty)$ *функция,*

$$(-1)^n p(t) > 0 \quad \text{при } t \geqslant a, \quad \bigvee_{a}^{+\infty} \frac{p'(t)}{|p(t)|^{\frac{n+1}{n}}} < +\infty, \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{p'(t)}{|p(t)|^{\frac{n+1}{n}}} = 0 \tag{3.18}$$

*и*

$$p_k(t)\, |p(t)|^{\frac{k-n}{n}} \in L(a, +\infty) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.19}$$

*Тогда для любого решения* $u(t)$ *задачи* (1) — (2) *имеем:*

$$u^{(j-1)}(t) = (-1)^{j-1} |p(t)|^{\frac{2j-1-n}{2n}} \exp\left[-(1+\delta(t)) \int_{a}^{t} |p(\tau)|^{\frac{1}{n}}\, d\tau\right]$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.20}$$

*где* $\delta(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся некоторые вспомогательные предложения.

ЛЕММА 3.1. *Если функция* $p(t)$ *непрерывно дифференцируема в промежутке* $[a, +\infty)$, *соблюдаются условия* (3.18) *и*

$$q_k(t)\, |p(t)|^{\frac{k-n}{n}} \in L(a, +\infty) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.21}$$

*то дифференциальное уравнение*

$$u^{(n)} = p(t)\,u + \sum_{k=1}^{n} q_k(t)\,u^{(k-1)} \tag{3.22}$$

*имеет фундаментальную систему решений* $v_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *такую, что*

$$v_k^{(j-1)}(t) \sim e_{kj}(t) \quad (k, j = 1, 2, \ldots, n)\,^*, \tag{3.23}$$

*где*

$$e_{kj}(t) = \lambda_k^{j-1} |p(t)|^{\frac{2j-n-1}{2n}} \exp\left(\int_a^t \lambda_k(\tau)\,|p(\tau)|^{\frac{1}{n}}\,d\tau\right) \quad (k, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.24}$$

$\lambda_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — *корни уравнения*

$$\prod_{k=1}^{n} \left[\lambda - (-1)^n \frac{2k-n-1}{2n}\, p'(t)\,|p(t)|^{-\frac{n+1}{n}}\right] = (-1)^n, \tag{3.25}$$

*а*

$$\lambda_k = \lim_{t \to +\infty} \lambda_k(t) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.26}$$

(см. ([7]), теорема 3).

Из (3.18), (3.25) и (3.26) ясно, что $\lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ являются корнями уравнения $\lambda^n = (-1)^n$. Для определенности в дальнейшем будем считать, что

$$\begin{gathered} \lambda_1 = -1, \quad \operatorname{Re}\lambda_{2k-1} < \operatorname{Re}\lambda_{2k} \quad \left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right), \\ \lambda_{2k}(t) \equiv \bar{\lambda}_{2k+1}(t) \quad \left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]\right). \end{gathered} \tag{3.27}$$

ЛЕММА 3.2. *Пусть соблюдаются условия леммы* 3.1. *Тогда, какое бы ни было решение* ** $u(t)$ *уравнения* (3.22), *если*

$$u(t) > 0 \quad \text{при } t \geqslant a \text{ и } \sup_{t \geqslant a} u(t) < +\infty, \tag{3.28}$$

*то найдется такая положительная постоянная* $c$, *что*

$$u^{(j-1)}(t) \sim c e_{1j}(t) \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.29}$$

*а если*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{e_{11}(t)} = 0, \tag{3.30}$$

*то* $u(t) \equiv 0$ *при* $t \geqslant a$.

Доказательство. Из (3.18) легко следует, что

$$\int_a^{+\infty} |p(t)|^{\frac{1}{n}}\,dt = +\infty. \tag{3.31}$$

---

* Здесь и в дальнейшем запись $g(t) \sim h(t)$ означает, что $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{g(t)}{h(t)} = 1$.

** В дальнейшем везде рассматриваются только действительные решения уравнения (3.22).

Поэтому, ввиду (3.24), (3.26) и (3.27), будем иметь:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{|e_{j1}(t)|}{|e_{k1}(t)|}=0\quad\left(j=1,2,\ldots,k-\frac{3-(-1)^k}{2}\right). \tag{3.32}$$

Пусть $u(t)$ — некоторое нетривиальное решение уравнения (3.22). Тогда очевидно, что

$$u(t)=\sum_{j=1}^{k}c_jv_j(t),\quad 1\leqslant k\leqslant n,\quad c_k\neq 0. \tag{3.33}$$

Предположим сперва, что $n$ четно и $k=n$. Тогда $\lambda_n=1$. Поэтому, в силу (3.23), (3.24) и (3.31), из (3.33) вытекает, что

$$\lim_{t\to+\infty}|u(t)|=+\infty. \tag{3.34}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $1<k\leqslant n-(-1)^n$. Тогда

$$\lim_{t\to+\infty}\operatorname{Im}\lambda_k(t)=\operatorname{Im}\lambda_k\neq 0. \tag{3.35}$$

С другой стороны, согласно (3,23), (3.24), (3.27) и (3.32), из (3.33) легко заключить, что

$$u(t)=c_0|e_{k1}(t)|\left[\sin\left(\int_a^t|p(\tau)|^{\frac{1}{n}}\operatorname{Im}\lambda_k(\tau)\,d\tau+\alpha\right)+\eta(t)\right], \tag{3.36}$$

где $\eta(t)\to 0$ при $t\to+\infty$, а $c_0\neq 0$ и $\alpha$—некоторые постоянные. В силу (3.31), (3.32) и (3.35), из (3.36) следует, что

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{u(t)}{e_{11}(t)}=+\infty,\quad \underline{\lim_{t\to-\infty}}\frac{u(t)}{e_{11}(t)}=-\infty. \tag{3.37}$$

Следовательно, любое нетривиальное решение $u(t)$ уравнения (3.22) удовлетворяет либо условию (3.34), либо условию (3.37), либо условию

$$u(t)=cv_1(t),\ \text{где}\ c\neq 0. \tag{3.38}$$

Поэтому ясно, что если соблюдается условие (3.30), то $u(t)\equiv 0$, а если соблюдаются условия (3.28), то $u(t)$ имеет вид (3.38) и, следовательно, удовлетворяет условиям (3.29). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.4. Пусть $u(t)$ — некоторое решение задачи (1) — (2). Поскольку уравнение (1) не имеет особых решений, то очевидно, что соблюдается неравенство (3.8). Не ограничивая общности, в дальнейшем будем считать, что $0\leqslant(-t)^{k-1}u^{(k-1)}(t)\leqslant\varepsilon$ $(k=2,\ldots$ $\ldots,n)$ при $t\geqslant a$ и $p_1(t)>0$ при $t\geqslant a$.

Легко видеть, что $u(t)$ является решением уравнения (3.22), где

$$q_k(t)=\frac{f(t,u(t),\ldots,u^{(n-1)}(t))-p(t)u(t)}{\sum_{k=1}^{n}p_k(t)|u^{(k-1)}(t)|}p_k(t)\operatorname{sign}u^{(k-1)}(t)$$

$$(k=1,2,\ldots,n). \tag{3.39}$$

В силу (3.17), (3.19) и (3.39) ясно, что соблюдаются условия (3.21). Поэтому, согласно лемме 3.2, имеют место формулы (3.29), где $c$ — некоторая положительная постоянная. Полагая

$$\delta(t) = -\left(\ln c + \int_a^t |p(\tau)|^{\frac{1}{n}} [1+\lambda_1(\tau)]\, d\tau\right) \Big/ \int_a^t |p(\tau)|^{\frac{1}{n}} d\tau, \tag{3.40}$$

приведем формулы (3.29) к виду (3.20). С другой стороны, в силу (3.26), (3.27) и (3.31), ясно, что $\delta(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Теорема доказана.

Замечание. По сути дела мы доказали, что для любого решения $u(t)$ задачи (1) — (2) справедливы асимптотические формулы (3.29). Если предположить, что, кроме условий (3.18), соблюдается и условие

$$p'(t)\,|p(t)|^{-\frac{2n+1}{2n}} \in L^2(a, +\infty),$$

то можно показать, что

$$e_{1j}(t) \sim (-1)^{j-1} c_1 |p(t)|^{\frac{2j-1-n}{2n}} \exp\left[-\int_a^t |p(\tau)|^{\frac{1}{n}} d\tau\right] \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

где $c_1 > 0$ (см. (7), следствие 3 теоремы 3). Следовательно, в этом случае для любого решения $u(t)$ задачи (1) — (2) найдется такая положительная постоянная $c_0$, что

$$u^{(j-1)}(t) \sim (-1)^{j-1} c_0 |p(t)|^{\frac{2j-1-n}{2n}} \exp\left[-\int_a^t |p(\tau)|^{\frac{1}{n}} d\tau\right] \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

## § 4. Теоремы единственности

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть функция $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ непрерывно дифференцируема по $x_1, \ldots, x_n$ при почти всех $t \in (0, +\infty)$,*

$$\frac{\partial f(t, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k} \in K(\alpha, \beta) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{при любых } \alpha, \beta \in (0, +\infty), \tag{4.1}$$

$$f(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0, \qquad (-1)^{n+k-1} \frac{\partial f(t, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k} \geqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.2}$$

*при $t > 0$, $(-1)^{i-1} x_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и найдутся такие положительные числа $r$, $\varepsilon$ и $a$, что в области $t \geqslant a$, $0 \leqslant x_1 \leqslant r$, $0 \leqslant (-t)^{i-1} x_i \leqslant \varepsilon$ $(i = 2, \ldots, n)$ соблюдаются неравенства*

$$\left|\frac{\partial f(t, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k}\right| \leqslant p_k(t) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.3}$$

*где функции $p_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют условиям* (3.13). *Тогда при любом $u_0 \in [0, r]$ задача* (1) — (2) *имеет не более одного решения.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 4.1. *Пусть*

$$r_k(t) \in L(\alpha, \beta) \text{ при любых } \alpha, \beta \in (0, +\infty) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.4}$$

*и*

$$(-1)^{n+k-1} r_k(t) \geqslant 0 \text{ при } t > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.5}$$

*Тогда, какое бы ни было решение* $u(t)$ *уравнения*

$$u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, u^{(k-1)}, \tag{4.6}$$

*если для некоторого* $t_0 \in (0, +\infty)$ *имеем*

$$u(t_0) > 0 \text{ и } (-1)^{k-1} u^{(k-1)}(t_0) \geqslant 0 \quad (k = 2, \ldots, n), \tag{4.7}$$

*то*

$$\lim_{t\to 0} u(t) > 0. \tag{4.8}$$

Доказательство. Пусть $m$ — произвольное натуральное число. Обозначим через $u_m(t)$ решение уравнения (4.6), удовлетворяющее начальным условиям

$$u_m^{(k-1)}(t_0) = u^{(k-1)}(t_0) + \frac{(-1)^{k-1}}{m} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.9}$$

Из (4.7) и (4.9) ясно, что в некоторой окрестности точки $t_0$ соблюдаются неравенства

$$(-1)^{k-1} u_m^{(k-1)}(t) > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.10}$$

Покажем, это эти неравенства соблюдаются на всем промежутке $(0, t_0]$. В самом деле, в противном случае найдется такое число $t_1 \in (0, t_0)$, что $u^{(n-1)}(t_1) = 0$, а в промежутке $(t_1, t_0]$ соблюдаются неравенства (4.10). Но это невозможно, ибо в силу (4.5) и (4.9)

$$(-1)^{n-1} u_m^{(n-1)}(t_1) = (-1)^{n-1} u_m^{(n-1)}(t_0) + \sum_{k=1}^{n} \int_{t_1}^{t_0} (-1)^{n+k-1} r_k(t)\, |u_m^{(k-1)}(t)|\, dt > 0.$$

Перейдя в неравенствах (4.10) к пределу при $t \to +\infty$, получим:

$$(-1)^{k-1} u^{(k-1)}(t) \geqslant 0 \text{ при } 0 < t \leqslant t_0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда, в силу (4.7), следует условие (4.8). Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. *Если*

$$t^{n-k} r_k(t) \in L(\alpha, +\infty) \text{ при любом } \alpha \in (0, +\infty), \tag{4.11}$$

*то уравнение* (4.6) *не имеет нетривиального решения* $u(t)$, *удовлетворяющего условиям*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{k-1} u^{(k-1)}(t) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.12}$$

Доказательство. Допустим противное, что уравнение (4.6) имеет нетривиальное решение $u(t)$, удовлетворяющее условиям (4.12). Тогда, согласно (4.11) и (4.12), найдется такое положительное число $t_0$, что

$$2\sum_{k=1}^{n}\int_{t_0}^{+\infty} t^{n-k}\,|r_k(t)|\,dt<1 \tag{4.13}$$

и

$$\rho(t_0)=\sup_{t\geqslant t_0}\rho(t)>0, \tag{4.14}$$

где

$$\rho(t)=\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}|u^{(k-1)}(t)|. \tag{4.15}$$

С другой стороны, согласно (4.12), из (4.6) имеем:

$$|t_0^{k-1}u^{(k-1)}(t_0)|=\frac{1}{(n-k)!}\left|\int_{t_0}^{+\infty} t_0^{k-1}(t-t_0)^{n-k}\left[\sum_{i=1}^{n} r_i(t)\,u^{(i-1)}(t)\right]dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(n-k)!}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{+\infty} t^{n-i}|r_i(t)|\,|t^{i-1}u^{(i-1)}(t)|\,dt \quad (k=1,2,\ldots,n).$$

Отсюда, в силу (4.13), (4.14) и (4.15), следует:

$$\rho(t_0)\leqslant 2\rho(t_0)\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{+\infty} t^{n-i}|r_i(t)|\,dt<\rho(t_0).$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Доказательство теоремы 4.1. Ясно, что при $u_0=0$ задача (1) — (2) имеет лишь тривиальное решение. Предположим, что для некоторого $u_0\in(0,r]$ задача (1) — (2) имеет два решения $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Очевидно, что функция

$$u(t)=u_2(t)-u_1(t)$$

является решением уравнения (4.6), где

$$r_k(t)=\int_0^1\frac{\partial f\,[t,(1-\tau)u_1(t)+\tau u_2(t),\ldots,(1-\tau)u_1^{(n-1)}(t)+\tau u_2^{(n-1)}(t)]}{\partial x_k}\,d\tau$$

$$(k=1,2,\ldots,n). \tag{4.16}$$

В силу (4.1) и (4.2), из (4.16) ясно, что соблюдаются условия (4.4) и (4.5).

Не ограничивая общности, можно считать, что при $t\geqslant a$

$$0\leqslant u_i(t)\leqslant r,\quad 0\leqslant(-t)^{i-1}u^{(i-1)}(t)\leqslant\varepsilon\quad (i=2,\ldots,n). \tag{4.17}$$

Поэтому, ввиду (4.3) и (3.13), из (4.16) ясно, что соблюдаются условия (4.11).

Поскольку $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{k-1}u^{(k-1)}(t)=0$ $(k=2,\ldots,n)$, согласно лемме 4.2, без ограничения общности можем считать, что

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = c > 0.$$

В силу (4.4), (4.5) и (4.11), из теоремы 2.1 и леммы 4.2 вытекает, что уравнение (4.6) имеет решение $u_0(t)$, удовлетворяющее условиям

$$u_0(1) = 1, \quad (-1)^{k-1} u_0^{(k-1)}(t) \geqslant 0 \quad \text{при } t \geqslant 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.18}$$

и

$$\lim_{t\to+\infty} u_0(t) = c_0 > 0.$$

Поскольку

$$\lim_{t\to+\infty} t^{k-1}\left[u^{(k-1)}(t) - \frac{c}{c_0} u_0^{(k-1)}(t)\right] = 0 \quad (k = 1, 2. \ldots, n),$$

согласно лемме 4.2 имеем:

$$u(t) \equiv \frac{c}{c_0} u_0(t). \tag{4.19}$$

Ввиду (4.18) и (4.19), из леммы 4.1 следует:

$$\lim_{t\to 0} u(t) = \frac{c}{c_0} \lim_{t\to 0} u_0(t) > 0,$$

что невозможно, ибо $u(0) = u_2(0) - u_1(0) = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть функция* $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ *непрерывно дифференцируема по* $x_1, \ldots, x_n$ *при почти всех* $t \in (0, +\infty)$, *соблюдаются условия* (4.1) *и* (4.2) *и найдутся такие положительные числа* $r$, $\varepsilon$ *и* $a$, *что в области* $t \geqslant a$, $0 \leqslant x_1 \leqslant r$, $0 \leqslant (-t)^{i-1} x_i \leqslant \varepsilon$ $(i = 2, \ldots, n)$ *имеем:*

$$\left|\frac{\partial f(t, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} - p(t)\right| \leqslant p_1(t),$$
$$\left|\frac{\partial f(t, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k}\right| \leqslant p_k(t) \quad (k = 2, \ldots, n), \tag{4.20}$$

*где функция* $p(t)$ *непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условиям* (3.18), *а функции* $p_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *удовлетворяют условиям* (3.19). *Тогда при любом* $u_0 \in [0, r]$ *задача* (1) — (2) *имеет не более одного решения.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого $u_0 \in (0, r]$ задача (1) — (2) имеет два решения $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Согласно замечанию к теореме 3.4, найдутся такие положительные постоянные $c_1$ и $c_2$, что

$$u_1^{(j-1)}(t) \sim c_1 e_{1j}(t), \quad u_2^{(j-1)}(t) \sim c_2 e_{1j}(t) \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.21}$$

Не ограничивая общности, ниже будем считать, что $c_2 \geqslant c_1$ и соблюдаются условия (4.17).

Как было отмечено при доказательстве теоремы 4.1, функция

$$u(t) = u_2(t) - u_1(t) \tag{4.22}$$

является решением уравнения (4.6), где функции $r_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ определены равенствами (4.16) и удовлетворяют условиям (4.4) и (4.5).

Полагая

$$r_1(t) = p_1(t) + q_1(t), \quad r_k(t) = q_k(t) \quad (k = 2, \ldots, n),$$

ввиду (3.19), (4.17) и (4.20), из (4.16) легко заключаем, что соблюдаются условия (3.21). Поэтому, согласно лемме 3.2, уравнение (4.6) не имеет нетривиального решения, удовлетворяющего условию (3.30). Из сказанного, ввиду (4.21) и (4.22), ясно, что

$$u^{(j-1)}(t) \sim ce_{1j}(t) \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \text{ где } c = c_2 - c_1 > 0.$$

Отсюда, согласно (3.24) и (3.27), следует, что для достаточно большого $t_0$ соблюдаются неравенства (4.7). Поэтому, в силу леммы 4.1, $\lim\limits_{t \to 0} u(t) > 0$, что невозможно, ибо $u(0) = 0$.

Тбилисский государственный университет

Поступило 26.XI.1968

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hartman P., Wintner A., On the non-increasing solutions of $y'' = f(x, y, y')$, Amer. J. Math., 73, № 2 (1951), 390—404.

[2] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., Физматгиз, 1959.

[3] Клоков Ю. А., Краевые задачи с условием на бесконечности для уравнений математической физики, Рига, Издательство Института гражданской авиации, 1963.

[4] Kneser A., Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen bei grossen reelen Werten des Arguments, J. reine und angew. Math., 116 (1896), 178—212.

[5] Лепин А. Я., Мышкис А. Д., Существование решения одной краевой задачи для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения $n$-го порядка, Докл. АН СССР, 169, № 1 (1966), 16—19.

[6] Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 2, М., ИЛ, 1954.

[7] Кигурадзе И. Т., Об асимптотическом представлении решений линейных дифференциальных уравнений, Тр. Тбилисск. гос. ун-та, 102 (1964), 149—167.

[8] Кигурадзе И. Т., Лемма сравнения и вопрос единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, Сообщ. АН Груз. ССР, 39, № 3 (1965), 513—518.

[9] Кигурадзе И. Т., О монотонных решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений $n$-го порядка, Докл. АН СССР, 181, № 5 (1968), 1054—1057.