



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Т. Кигурадзе, Об условиях неосцилляционности сингулярных линейных дифференциальных уравнений второго порядка, *Матем. заметки*, 1969, том 6, выпуск 5, 633–639

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 212.72.153.178

9 марта 2016 г., 16:22:56



## ОБ УСЛОВИЯХ НЕОСЦИЛЛЯЦИОННОСТИ СИНГУЛЯРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

И. Т. Кигурадзе

Найдены условия, при выполнении которых каждое нетривиальное решение уравнения  $u'' + \beta(t)u' + \alpha(t)u = 0$ , где  $\beta(t) \in L(a, b)$  и  $(t-a)(t-b)\alpha(t) \in L(a, b)$ , имеет не более одного нуля в промежутке  $a \leq t \leq b$ . Библи. 8 назв.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u'' + \beta(t)u' + \alpha(t)u = 0, \quad (1)$$

где  $-\infty < a < b < +\infty$ ,

$$\beta(t) \in L(a, b), \quad (t-a)(t-b)\alpha(t) \in L(a, b). \quad (2)$$

Введем следующее

**О п р е д е л е н и е.** Уравнение (1) называется *неосцилляционным* в промежутке  $a \leq t \leq b$ , если каждое нетривиальное решение \*) этого уравнения имеет не более одного нуля в промежутке  $a \leq t \leq b$ . В противном случае уравнение (1) называется *осцилляционным* в промежутке  $a \leq t \leq b$ .

Для случая, когда  $\alpha(t) \in L(a, b)$ , разные достаточные условия неосцилляционности уравнения (1) содержатся в

---

\*) Под значениями решения  $u(t)$  уравнения (1) в точках  $t=a$  и  $t=b$  понимаются, соответственно,  $u(a) = \lim_{t \rightarrow a+0} u(t)$  и  $u(b) = \lim_{t \rightarrow b-0} u(t)$ , которые существуют согласно доказанной ниже лемме 1.

работах [1—4] (см. также [5], стр. 125, примечание переводчика).

В настоящей заметке доказываются следующие предложения:

**ТЕОРЕМА.** Пусть

$$\alpha_0(t) \geq 0, \beta_0(t) \geq 0 \quad \text{при} \quad a < t < b, \\ (t-a)(t-b)\alpha_0(t) \in L(a, b), \beta_0(t) \in L(a, b). \quad (3)$$

Тогда для того, чтобы уравнение (1) было неосцилляционным в промежутке  $a \leq t \leq b$  при любых  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ , удовлетворяющих условиям (2) и неравенствам

$$\alpha(t) \leq \alpha_0(t), |\beta(t)| \leq \beta_0(t) \quad \text{при} \quad a < t < b, \quad (4)$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого  $t_0 \in [a, b]$  уравнение

$$u'' + \beta_0(t) \operatorname{sign}(t_0 - t) u' + \alpha_0(t) u = 0 \quad (5)$$

было неосцилляционным в промежутке  $a \leq t \leq b$ .

**С л е д с т в и е 1.** Если соблюдаются условия (2) и

$$\alpha(t) \leq \alpha(t-a)^{-2\sigma_1}(b-t)^{-2\sigma_2}, |\beta(t)| \leq \beta(t-a)^{-\sigma_1}(b-t)^{-\sigma_2}$$

при  $a < t < b$ , где  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \sigma_k < 1$  ( $k = 1, 2$ ) и

$$\frac{\alpha}{\pi^2} \left\{ \int_a^b (t-a)^{-\sigma_1}(b-t)^{-\sigma_2} dt \right\}^2 + \frac{\beta}{\pi} \int_a^b (t-a)^{-\sigma_1}(b-t)^{-\sigma_2} dt < 1, \quad (6)$$

то уравнение (1) является неосцилляционным в промежутке  $a \leq t \leq b$ .

**С л е д с т в и е 2.** Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — неотрицательные постоянные. Тогда для того, чтобы уравнение (1) было неосцилляционным в промежутке  $a \leq t \leq b$  для любых  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ , удовлетворяющих условиям (2) и неравенствам

$$\alpha(t) \leq \alpha, \quad |\beta(t)| \leq \beta \quad \text{при} \quad a < t < b,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$b-a < \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\beta^2-4\alpha}} \ln \frac{\beta + \sqrt{\beta^2-4\alpha}}{\beta - \sqrt{\beta^2-4\alpha}} & \text{при } 4\alpha < \beta^2, \\ 4/\beta & \text{при } 4\alpha = \beta^2, \\ \frac{4}{\sqrt{4\alpha-\beta^2}} \operatorname{arccctg} \frac{\beta}{\sqrt{4\alpha-\beta^2}} & \text{при } 4\alpha > \beta^2. \end{cases} \quad (7)$$

Прежде всего докажем следующую лемму:

**ЛЕММА 1.** Если соблюдаются условия (2), то каждое решение уравнения (1) имеет конечные пределы

$$u(a) = \lim_{t \rightarrow a+0} u(t) \quad \text{и} \quad u(b) = \lim_{t \rightarrow b-0} u(t),$$

при этом, если  $u(a) = 0$  ( $u(b) = 0$ ), то существует конечный предел

$$u'(a) = \lim_{t \rightarrow a+0} u'(t) \quad (u'(b) = \lim_{t \rightarrow b-0} u'(t)).$$

**Доказательство.** Из теоремы 3, доказанной в заметке [8], следует, что при условиях (2) уравнение (1) имеет решения  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a+0} u_1(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow a+0} u_1'(t) = 1; \\ \lim_{t \rightarrow b-0} u_2(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow b-0} u_2'(t) = -1. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть

$$u_1(t) > 0 \quad \text{при} \quad a < t \leq t_1 \quad \text{и} \quad u_2(t) > 0 \quad \text{при} \quad t_2 \leq t < b.$$

Полагая

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(t) &= u_1(t) \int_t^{t_1} u_1^{-2}(\tau) \exp \left[ -\int_a^\tau \beta(s) ds \right] d\tau, \\ \tilde{u}_2(t) &= u_2(t) \int_{t_2}^t u_2^{-2}(\tau) \exp \left[ \int_\tau^b \beta(s) ds \right] d\tau, \end{aligned}$$

согласно (8) легко заключим, что

$$\lim_{t \rightarrow a+0} \tilde{u}_1(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow b-0} \tilde{u}_2(t) = 1. \quad (9)$$

Очевидно, что для любого решения  $u(t)$  уравнения (1) будем иметь

$$\begin{aligned} u(t) &= c_1 u_1(t) + \tilde{c}_1 \tilde{u}_1(t) \quad \text{при} \quad a \leq t \leq t_1, \\ u(t) &= c_2 u_2(t) + \tilde{c}_2 \tilde{u}_2(t) \quad \text{при} \quad t_2 \leq t \leq b, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $c_1$ ,  $\tilde{c}_1$ ,  $c_2$  и  $\tilde{c}_2$  — постоянные. Отсюда в силу (8) и (9) непосредственно следует, что

$$u(a) = \lim_{t \rightarrow a+0} u(t) = \tilde{c}_1, \quad u(b) = \lim_{t \rightarrow b-0} u(t) = \tilde{c}_2. \quad (11)$$

Если теперь предположить, что  $u(a) = 0$  ( $u(b) = 0$ ), то согласно (10) и (11) будем иметь

$$u(t) = c_1 u_1(t) \quad (u(t) = c_2 u_2(t)).$$

Отсюда в силу (8) получаем.

$$\lim_{t \rightarrow a+0} u'(t) = c_1 \quad (\lim_{t \rightarrow b-0} u'(t) = -c_2).$$

Лемма доказана.

С учетом леммы 1 легко можно проверить, что при условиях (2) сохраняют справедливость хорошо известные для уравнений с суммируемыми коэффициентами следующие предложения:

ЛЕММА 2. Если соблюдаются условия (2) и уравнение (1) является неосцилляционным в промежутке  $a \leq t \leq b$ , то существует функция Грина краевой задачи

$$u'' + \beta(t)u' + \alpha(t)u = 0, \quad u'(a) = u(b) = 0$$

и она неположительна.

ЛЕММА 3. Пусть соблюдаются условия (2)

$$(t-a)(t-b)\alpha_0(t) \in L(a, b) \text{ и } \alpha(t) \leq \alpha_0(t)$$

при  $a < t < b$ . Тогда если уравнение (1) является осцилляционным в промежутке  $a \leq t \leq b$ , то и уравнение

$$u'' + \beta(t)u' + \alpha_0(t)u = 0 \quad (12)$$

будет осцилляционным в промежутке  $a \leq t \leq b$ .

ЛЕММА 4. Если функция  $u(t)$  непрерывно дифференцируема в промежутке  $a \leq t \leq b$  и  $u(a) = u(b) = 0$ , а функция  $g(t)$  неотрицательна и суммируема вместе с  $1/g(t)$ , то

$$\int_a^b g(t) u^2(t) dt \leq \frac{1}{\pi^2} \left( \int_a^b g(t) dt \right)^2 \int_a^b \frac{u'^2(t)}{g(t)} dt. \quad (13)$$

Доказательство. Положим

$$u(t) = w(x), \quad x = \pi \int_a^t g(\tau) d\tau / \int_a^b g(\tau) d\tau. \quad (14)$$

Поскольку  $w(0) = w(\pi) = 0$  и  $w'(x) \in L^2(0, \pi)$ , имеем

$$\int_0^\pi w^2(x) dx \leq \int_0^\pi w'^2(x) dx$$

(см. [6], стр. 222). Отсюда согласно (14) непосредственно следует справедливость неравенства (13).

Доказательство теоремы. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Допустим про-

тивное, что уравнение (1) является осцилляционным в промежутке  $a \leq t \leq b$ . Тогда, согласно лемме 3, и уравнение (12) будет осцилляционным в промежутке  $a \leq t \leq b$ .

Пусть  $u(t)$  — решение уравнения (12), удовлетворяющее условиям

$$u(t_1) = u(t_2) = 0 \quad (15)$$

и

$$u'(t) > 0 \quad \text{при} \quad t_1 < t < t_2, \quad (16)$$

где  $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ . Ввиду неотрицательности  $\alpha_0(t)$  и  $u(t)$  из (12) следует

$$\frac{d}{dt} \left\{ \exp \left[ \int_a^t \beta(\tau) d\tau \right] u'(t) \right\} \leq 0 \quad \text{при} \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (17)$$

Из (15) и (17) очевидно, что для некоторого  $t_0 \in (t_1, t_2)$  имеем

$$u'(t) \operatorname{sign}(t_0 - t) = |u'(t)| \quad \text{при} \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (18)$$

Согласно (4) и (18) из (12) находим

$$u''(t) + \beta_0(t) \operatorname{sign}(t_0 - t) u'(t) + \alpha_0(t) u(t) = \gamma(t), \quad (19)$$

где

$$\gamma(t) = [\beta_0(t) - \beta(t) \operatorname{sign}(t_0 - t)] |u'(t)| \geq 0 \quad \text{при} \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (20)$$

Пусть  $G(t, \tau)$  — функция Грина задачи (5)–(15). Согласно лемме 2 имеем

$$G(t, \tau) \leq 0 \quad \text{при} \quad t_1 \leq t, \tau \leq t_2. \quad (21)$$

В силу (15), (19), (20) и (21) получаем

$$u(t) = \int_{t_1}^{t_2} G(t, \tau) \gamma(\tau) d\tau \leq 0 \quad \text{при} \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

что противоречит неравенству (16). Полученное противоречие доказывает теорему.

**Доказательство следствия 1.** Согласно вышедоказанной теореме достаточно показать, что уравнение

$$u'' + \beta g(t) \operatorname{sign}(t_0 - t) u' + \alpha g^2(t) u = 0, \quad (22)$$

где

$$g(t) = (t - a)^{-\sigma_1} (b - t)^{-\sigma_2} \quad (23)$$

является неосцилляционным в промежутке  $a \leq t \leq b$  при любом  $t_0 \in [a, b]$ . Допустим противное, то есть что для некоторого  $t_0 \in [a, b]$  уравнение (22) имеет решение  $u(t)$ , удовлетворяющее условиям (15) и (16).

Умножая обе части уравнения (22) на  $u(t)/g(t)$  и интегрируя от  $t_1$  до  $t_2$ , согласно лемме 1 и равенствам (15) и (23), найдем

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{u'^2(t)}{g(t)} dt \leq \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{g(t)} \right)'' u^2(t) dt + \alpha \int_{t_1}^{t_2} g(t) u^2(t) dt + \beta \int_{t_1}^{t_2} |u(t) u'(t)| dt. \quad (24)$$

Согласно лемме 4 имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t) u^2(t) dt \leq \frac{1}{\pi^2} \left[ \int_{t_1}^{t_2} g(t) dt \right]^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{u'^2(t)}{g(t)} dt \quad (25)$$

и

$$\int_{t_1}^{t_2} |u(t) u'(t)| dt \leq \left[ \int_{t_1}^{t_2} g(t) u^2(t) dt \right]^{1/2} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \frac{u'^2(t)}{g(t)} dt \right]^{1/2} \leq \frac{1}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} g(t) dt \int_{t_1}^{t_2} \frac{u'^2(t)}{g(t)} dt. \quad (26)$$

С другой стороны, из (23) ясно, что

$$\left( \frac{1}{g(t)} \right)'' \leq 0 \quad \text{при } a < t < b. \quad (27)$$

Учтя, что  $u'(t) \neq 0$  при  $t_1 \leq t \leq t_2$ , в силу (6), (25), (26) и (27) из (24) найдем

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{u'^2(t)}{g(t)} dt \leq \left\{ \frac{\alpha}{\pi^2} \left[ \int_{t_1}^{t_2} g(t) dt \right]^2 + \frac{\beta}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} g(t) dt \right\} \int_{t_1}^{t_2} \frac{u'^2(t)}{g(t)} dt < \int_{t_1}^{t_2} \frac{u'^2(t)}{g(t)} dt.$$

Полученное противоречие доказывает справедливость следствия.

Выписав в явном виде решение  $u(t; t_0)$  уравнения

$$u'' + \beta \operatorname{sign}(t - t_0) u' + \alpha u = 0 \quad (28)$$

при начальных условиях

$$u(a; t_0) = 0, \quad u'(a; t_0) = 1,$$

с помощью элементарных рассуждений покажем, что если

соблюдается неравенство (7), то

$$u(t; t_0) > 0 \text{ при } a < t \leq b, a \leq t_0 \leq b.$$

Следовательно, уравнение (28) является неосцилляционным для любого  $t_0 \in [a, b]$ . Применяя теперь доказанную выше теорему, справедливость следствия 2 становится очевидной.

Следует отметить, что для уравнений с суммируемыми коэффициентами следствие 2 не является новым. Его разные доказательства содержатся в работах [3, 4] (см. также [7], стр. 275—279).

Тбилисский государственный  
университет

Поступило  
23.IX.1968

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] de la Vallée Poussin Ch. J., Sur l'équation différentielle du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordres, J. math. pures et appl., 9, № 8 (1929), 125—144.
- [2] Hartman P., Wintner A., On a oscillation criterion de la Vallée Poussin, Quart. Appl. Math., 13, № 3 (1955), 330—332.
- [3] Epheser H., Über die Existenz der Lösungen von Randwertaufgaben mit Gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Z., 61, № 4 (1955), 435—454.
- [4] Мильштейн Г. Н., О краевой задаче для системы двух дифференциальных уравнений, Дифф. уравнения, 1, № 12 (1965), 1628—1638.
- [5] Трикоми Ф., Дифференциальные уравнения, М., 1962.
- [6] Харди Г. Т., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г., Неравенства, М., 1948.
- [7] Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления, М., 1966.
- [8] Кигурадзе И. Т., О задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностями, Сообщ. АН Грузинской ССР, 37, № 1 (1965), 19—24.