И. Т. Кигурадзе, Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж.*, 1987, том 30, 3–103

УДК 517.927

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. Т. Кигурадзе

ВВЕДЕНИЕ

Теория краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений по сути дела построена в последнее двадцатипятилетие. Именно в это время был существенно развит метод априорных оценок, что позволило установить признаки разрешимости и корректности широкого класса нелинейных задач с функциональными [8, 9, 16, 17, 19, 34, 42—44, 53, 54, 56, 69, 70, 82], многоточечными [18, 21, 22, 27, 31, 48, 55, 73, 74, 78, 80] и двухточечными [10—12, 23, 24, 26, 28, 30, 33, 35, 41, 45, 47, 57, 58, 62, 63, 65, 66, 72, 79, 87, 89] краевыми условиями. Изложению основ упомянутой теории и посвящена настоящая работа.

В первой главе (§§ 1—3) исследуются краевые задачи вида

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x), \tag{0.1}$$

$$h(x)=0, \tag{0.2}$$

где $f:[a, b]\times R^n\to R^n$ — вектор-функция из класса Каратеодори, а h — непрерывный оператор, действующий из пространства непрерывных вектор-функций в R^n.

В § 1 рассматривается линейный случай. В § 2 приведены достаточные условия существования и единственности решений нелинейной краевой задачи (0.1), (0.2), обобщающие результаты Конти [69, 70] и Опяля [82].

В § 3 изучается связь решения задачи (0.1), (0.2) с решениями в определенном смысле близкой к ней задачи

$$\frac{dx}{dt}=\tilde{f}(t, x), \tag{0.1'}$$

$$\tilde{h}(x)=0. \tag{0.2'}$$

В случае задачи Коши, т. е. когда

$$h(x) \equiv \tilde{h}(x) \equiv x(t_0) - c$$

этот вопрос исследован достаточно подробно. Здесь особенно следует отметить теорему Красносельского-Крейна [38] и ряд ее интересных модификаций и обобщений [13, 39, 49—51, 59, 68, 88], в которых утверждается близость между решениями задач (0.1), (0.2) и (0.1′), (0.2′) при интегральной малости $\tilde{f} - f$.

В отличие от задачи Коши изолированность решения общей задачи (0.1), (0.2) в нелинейном случае не гарантирует даже разрешимости задачи (0.1′), (0.2′), какими бы малыми ни были $\tilde{f} - f$ и $\tilde{h} - h$.

Например, как в этом легко убедиться, задача

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \quad x(0) = x(1)$$

имеет только нулевое решение, в то время как задача

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + \varepsilon, \quad x(0) = x(1)$$

не имеет решения ни при каком $\varepsilon > 0$. Именно этим объясняется, что во многих работах связь между решениями задач (0.1), (0.2) и (0.1′), (0.2′) исследуется при априорном предположении о разрешимости как исходной, так и возмущенной задач (см., например, [12, 44]). Поиски условий корректности нелинейных краевых задач привели к понятию сильно изолированного решения [8, 9]. Именно работы [8, 9] лежат в основе § 3, где доказывается, что задачи с сильно изолированными решениями являются корректными и для них справедливы аналоги вышеупомянутых теорем типа Красносельского—Крейна.

Во второй главе (§§ 4—6) для системы (0.1) рассматриваются многоточечные краевые задачи, являющиеся обобщениями задачи Коши—Николетти [78, 80]. Следуя [15, 31, 34] мы устанавливаем в определенном смысле неулучшаемые признаки их разрешимости и однозначной разрешимости, носящие характер односторонних ограничений на f. Здесь же предлагается метод приближенного нахождения решения.

Третья глава (§§ 7—8) посвящена двухточечным краевым задачам

$$x(a) \in S_1, \; x(b) \in S_2 \tag{0.3}$$

для системы (0.1), где $S_i \subset R^n$ $(i=1, 2)$ — непустые замкнутые множества. Изложение этой главы опирается на результаты работ [23, 24, 26, 30, 33], в которых, в свою очередь, развиты идеи С. Н. Бернштейна и М. Нагумо. Доказанные в ней теоремы существования охватывают случай, когда компоненты вектор-функции f являются быстрорастущими по фазовым переменным.

В четвертой главе (§§ 9—11) исследованы те вопросы теории периодических и ограниченных решений, которые непосредственно связаны с краевыми задачами. Естественно, что здесь не нашли отражения многие проблемы этой обширной и весьма богатой результатами теории (см. [36, 37, 46, 52, 60—62, 86]). §§ 9 и 11 основаны на результатах работ [29, 31, 32, 34, 81, 83], а § 10 — на результатах работы [28].

За пределами настоящей работы остались краевые задачи для дифференциальных систем с неинтегрируемыми сингулярностями [18, 22, 25, 27, 64, 73, 74, 87], а также начальная и краевые задачи для функционально-дифференциальных и обобщенных в смысле Я. Курцвейля дифференциальных систем (см., например, [1—7, 14, 67, 76, 77, 84]).

На протяжении всей работы приняты следующие обозначения:

$$\mathbf{R}=]-\infty, +\infty[, \ R_+=[0, +\infty[;$$

$\mathbf{R}^n$ — n-мерное вещественное евклидово пространство векторов $x=(x_i)_{i=1}^n$ с нормой

$$\|x\|=\sum_{i=1}^n |x_i|;$$

$$\mathbf{R}_+^n=\{(x_i)_{i=1}^n\in\mathbf{R}^n:\ x_1\geqslant 0, \ \ldots, \ x_n\geqslant 0\};$$

$\mathbf{R}^{n\times n}$ — пространство вещественных $n\times n$ матриц $X=(x_{ik})_{i,k=1}^n$ с нормой

$$\|X\|=\sum_{i,k=1}^n |x_{ik}|;$$

если $x=(x_i)_{i=1}^n\in\mathbf{R}^n$ и $X=(x_{ik})_{i,k=1}^n\in\mathbf{R}^{n\times n}$, то

$$|x|=(|x_i|)_{i=1}^n, \quad [x]_+=\left(\frac{|x_i|+x_i}{2}\right)_{i=1}^n,$$

$$|X|=(|x_{ik}|)_{i,k=1}^n,$$

$\det X$ — детерминант X, а X^{-1} — матрица, обратная к X; E — единичная матрица;

$X(t+)$ и $X(t-)$ — соответственно правый и левый односторонние пределы отображения X в точке t;

$C([a, b]; \mathbf{R}^n)$ и $C([a, b]; \mathbf{R}^{n\times n})$ — пространства непрерывных вектор-функций $x:[a, b]\to\mathbf{R}^n$ и матричных функций $X:[a, b]\to\mathbf{R}^{n\times n}$;

$$\|x\|_C=\max\{\|x(t)\|: a\leqslant t\leqslant b\};$$

$$C([a, b]; \mathbf{R}_+^n)=\{x\in C([a, b]; R^n): x(t)\in\mathbf{R}_+^n \text{ при } a\leqslant t\leqslant b\};$$

$\tilde{C}([a, b]; \mathbf{R}^n)$ — множество абсолютно непрерывных вектор-функций $x:[a, b]\to R^n$;

$L^\mu([a, b]; \mathbf{R}^n)$ и $L^\mu([a, b]; \mathbf{R}^{n\times n})$, где $1\leqslant\mu<+\infty$,

— пространства вектор-функций $x:[a, b]\to R^n$ и матричных функций $X:[a, b]\to \mathbf{R}^{n\times n}$ с суммируемыми со степенью μ компонентами;

$$\| x \|_{L^\mu} = \left(\int_a^b \| x(t) \|^\mu dt \right)^{\frac{1}{\mu}};$$

$L^{+\infty}([a, b]; \mathbf{R}^n)$ и $L^{+\infty}([a, b]; \mathbf{R}^{n\times n})$ — пространства вектор-функций $x:[a, b]\to R^n$ и матричных функций $X:[a, b]\to \mathbf{R}^{n\times n}$ с существенно ограниченными компонентами;

$$\| x \|_{L^{+\infty}} = \mathrm{vrai}\max\{\| x(t)\| : a \leqslant t \leqslant b\};$$

$$L^\mu([a, b]; \mathbf{R}^n_+) = \{x \in L^\mu([a, b]; \mathbf{R}^n) : x(t) \in \mathbf{R}^n_+ \text{ при } a \leqslant t \leqslant b\};$$

$$K([a, b] \times D_1; D_2), \text{ где } D_1 \subset \mathbf{R}^n \text{ и } D_2 \subset \mathbf{R}^m$$

(или $D_2 \subset \mathbf{R}^{m\times m}$) — класс Каратеодори, т. е. множество отображений $f:[a, b]\times D_1 \to D_2$ таких, что $f(\cdot, x):[a, b]\to D_2$ измеримо при любом $x \in D_1$; $f(t, \cdot): D_1 \to D_2$ непрерывно при почти всех $t \in [a, b]$ и

$$\sup\{\| f(\cdot, x)\| : x \in D_0\} \in L([a, b]; \mathbf{R})$$

для любого компакта $D_0 \subset D_1$;

$K^0([a, b]\times D_1; D_2)$ — множество отображений $f:[a, b]\times D_1 \to D_2$ таких, что $f(\cdot, x(\cdot)) : [a, b]\to D_2$ является измеримым для любой непрерывной вектор-функции $x:[a, b]\to D_1$.

Неравенства между векторами и матрицами понимаются покомпонентно.

Оператор $g: B_1 \to B_2$, где B_1 и B_2 — банаховы пространства, называется положительно однородным, если для любых $\lambda \in \mathbf{R}_+$ и $x \in B_1$

$$g(\lambda x) = \lambda g(x).$$

Оператор $g: C([a, b]; \mathbf{R}^n) \to \mathrm{L}([a, b]; \mathbf{R})$ называется неубывающим, если для любых $x, y \in C([a, b]; \mathbf{R}^n)$ таких, что $x(t) \leqslant y(t)$ при $t \in [a, b]$, соблюдается неравенство

$$g(x)(t) \leqslant g(y)(t) \text{ при } t \in [a, b].$$

Вектор-функция $x:[a, b]\to \mathbf{R}^n$ называется решением дифференциальной системы (0.1), если она принадлежит множеству $\tilde{C}([a, b]; \mathbf{R}^n)$ и удовлетворяет (0.1) почти всюду на $[a, b]$.

Решения встречающихся в работе систем дифференциальных неравенств ищутся также во множествах абсолютно непрерывных вектор-функций.

Глава 1

ОБЩАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

§ 1. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И КОРРЕКТНОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В этом параграфе изучается общая линейная краевая задача

$$\frac{dx}{dt}=P(t)\,x+q(t), \tag{1.1}$$

$$l(x)=c_0, \tag{1.2}$$

где $P\in L([a,b];\ \mathrm{R}^{n\times n})$, $q\in L([a,b];\ R^n)$, $c_0\in R^n$, а $l:C([a,b];\ \mathrm{R}^n)\to\to\mathrm{R}^n$ — линейный непрерывный оператор.

Наряду с (1.1), (1.2) рассмотрим соответствующую однородную задачу

$$\frac{dx}{dt}=P(t)\,x, \tag{1.1$_0$}$$

$$l(x)=0 \tag{1.2$_0$}$$

и введем следующее

Определение 1.1. $G:[a,b]\times[a,b]\to\mathrm{R}^{n\times n}$ называется матрицей Грина задачи (1.1_0), (1.2_0), если:

а) для любого $\tau\in]a,b[$ сужения столбцов матрицы $G(\cdot,\tau)$ на промежутки $[a,\tau[$ и $]\tau,b]$ являются решениями системы (1.1_0), при этом

$$G(\tau+,\tau)-G(\tau-,\tau)=E;$$

б) $G(t,\cdot)\in L^{+\infty}([a,b];\ \mathrm{R}^{n\times n})$ при любом $t\in[a,b]$;

в) для любой $q\in L([a,b];\mathrm{R}^n)$ вектор-функция $x(t)=\int\limits_a^b G(t,\tau)\,q(\tau)\,d\tau$ удовлетворяет условию (1.2_0).

Если $Z\in C([a,b];\ \mathrm{R}^{n\times n})$ — матричная функция со столбцами $z_1,\dots,z_n$, то под $l(Z)$ будем подразумевать матрицу со столбцами $l(z_1),\dots,l(z_n)$.

Теорема 1.1. Для однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.2) необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная задача (1.1_0), (1.2_0) имела только нулевое решение. Если последнее условие выполнено, то решение x задачи (1.1), (1.2) допускает представление

$$x(t)=x_0(t)+\int\limits_a^b G(t,\tau)\,q(\tau)\,d\tau, \tag{1.3}$$

где x_0 — решение задачи (1.1_0), (1.2), а G — матрица Грина задачи (1.1_0), (1.2_0).

Доказательство. Пусть Y — фундаментальная матрица системы (1.1_0), удовлетворяющая условию

$$Y(a)=E.$$

Тогда для любого решения x системы (1.1) имеем

$$x(t)=Y(t)c+A(q)(t), \tag{1.4}$$

где $c=x(a)$ и

$$A(q)(t)=Y(t)\int_a^t Y^{-1}(\tau)\,q(\tau)\,d\tau. \tag{1.5}$$

Для того, чтобы x удовлетворяло условию (1.2), необходимо и достаточно, чтобы c было решением системы линейных алгебраических уравнений

$$l(Y)c=c_0-l(A(q)). \tag{1.6}$$

Но эта система и, следовательно, задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда

$$\det l(Y)\neq 0. \tag{1.7}$$

С другой стороны, очевидно, что (1.7) является необходимым и достаточным условием отсутствия у однородной задачи (1.1_0), (1.2_0) ненулевого решения.

Если (1.7) соблюдено, то из (1.4) и (1.6) вытекает следующее представление решения x задачи (1.1), (1.2)

$$x(t)=x_0(t)+Y(t)h(q)+A(q)(t); \tag{1.8}$$

где

$$h(q)=-[l(Y)]^{-1}l(A(q)) \tag{1.9}$$

и

$$x_0(t)=Y(t)[l(Y)]^{-1}c_0, \tag{1.10}$$

при этом x_0 представляет собой решение задачи (1.1_0), (1.2).

Ввиду (1.9) $h: L([a,b];R^n)\to R^n$ является линейным непрерывным оператором. Поэтому существует матричная функция $H\in L^{+\infty}([a,b];R^{n\times n})$ такая, что

$$h(q)=\int_a^b H(t)\,q(t)\,dt$$

(см. [20]). Согласно этому представлению и равенству (1.5), формулу (1.8) можно переписать в виде (1.3), где

$$G(t,\tau)=\begin{cases} Y(t)\,[H(\tau)+Y^{-1}(\tau)] & \text{при } a\leqslant\tau\leqslant t\leqslant b\\ Y(t)\,H(\tau) & \text{при } a\leqslant t<\tau\leqslant b\end{cases}$$

является матрицей Грина задачи (1.1_0), (1.2_0). Из определения 1.1 легко следует также единственность этой матрицы (с точностью до значений H на множестве меры нуль). Теорема доказана.

Замечание 1.1. Пусть

$$\det l(Y)=0. \tag{1.11}$$

Тогда для любой $q\in L([a,b];\ \mathbf{R}^n)$ существует такой вектор $c_0\in\mathbf{R}^n$, что система (1.6), и следовательно задача (1.1), (1.2), не имеет решения.

Замечание 1.2. Пусть отображение $l: C([a,b];\ \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}^n$ является сюръективным и соблюдается условие (1.11). Тогда для любого $c_0\in\mathbf{R}^n$ существует $q\in L([a,b];\ \mathbf{R}^n)$ такая, что задача (1.1), (1.2) не имеет решения.

Лемма 1.1. Пусть

$$\alpha_k\in L([a,b];\ \mathbf{R}),\quad \beta_k\in C([a,b];\ \mathbf{R})\quad (k=0,1,\dots),$$

$$\lim_{k\to+\infty}\|\beta_k-\beta_0\|_C=0, \tag{1.12}$$

$$r=\sup\left\{\int_a^b|\alpha_k(\tau)|\,d\tau: k=0,1,\dots\right\}<+\infty \tag{1.13}$$

и равномерно на $[a,b]$

$$\lim_{k\to+\infty}\int_a^t\alpha_k(\tau)\,d\tau=\int_a^t\alpha_0(\tau)\,d\tau. \tag{1.14}$$

Тогда равномерно на $[a,b]$ имеем

$$\lim_{k\to+\infty}\int_a^t\beta_k(\tau)\alpha_k(\tau)\,d\tau=\int_a^t\beta_0(\tau)\alpha_0(\tau)\,d\tau.$$

Доказательство. Для произвольно заданного $\varepsilon>0$ подберем ступенчатую функцию $\eta:[a,b]\to\mathbf{R}$ таким образом, чтобы

$$2r\,|\beta_0(t)-\eta(t)|<\varepsilon \text{ при } a\leqslant t\leqslant b. \tag{1.15}$$

Положим

$$\gamma_k(t)=\int_a^t[\beta_k(\tau)\alpha_k(\tau)-\beta_0(\tau)\alpha_0(\tau)]\,d\tau,\quad \delta_k(t)=\int_a^t\eta(\tau)\,[\alpha_k(\tau)-\alpha_0(\tau)]\,d\tau.$$

В силу (1.14)

$$\lim_{k\to+\infty}\|\delta_k\|_C=0. \tag{1.16}$$

С другой стороны, согласно (1.13) и (1.15) имеем

$$\|\gamma_k\|_C\leqslant\varepsilon+r\,\|\beta_k-\beta_0\|_C+\|\delta_k\|_C\quad (k=1,2,\dots).$$

Отсюда ввиду (1.12), (1.16) и произвольности ε следует, что

$$\lim_{k\to+\infty}\|\gamma_k\|_C=0.$$

Лемма доказана.

Для любого натурального k наряду с задачей (1.1), (1.2) рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt} = P_k(t)\,x + q_k(t), \tag{1.17}$$

$$l_k(x) = c_k, \tag{1.18}$$

где $P_k \in L([a, b];\ \mathbf{R}^{n\times n})$, $q_k \in L([a, b];\ \mathbf{R}^n)$, $c_k \in \mathbf{R}^n$, а $l_k: C([a, b];\ \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}^n$ — линейный непрерывный оператор.

Теорема 1.2. Пусть

$$\lim_{k\to+\infty} l_k(y) = l(y) \text{ при } y \in \widetilde{C}([a, b];\ \mathbf{R}^n), \quad \lim_{k\to+\infty} c_k = c_0, \tag{1.19}$$

$$\sup\{\| l_k \| : k = 1, 2, \ldots\} < +\infty^{1)}, \tag{1.20}$$

$$\sup\left\{\int_a^b \| P_k(\tau) \|\, d\tau : k = 1, 2, \ldots\right\} < +\infty \tag{1.21}$$

и равномерно на $[a, b]$ соблюдаются условия

$$\lim_{k\to+\infty} \int_a^t P_k(\tau)\, d\tau = \int_a^t P(\tau)\, d\tau, \tag{1.22}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \int_a^t q_k(\tau)\, d\tau = \int_a^t q(\tau)\, d\tau. \tag{1.23}$$

Если, кроме того, задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение x то, начиная с некоторого k_0, задача (1.17), (1.18) также имеет единственное решение x_k и

$$\lim_{k\to+\infty} \| x_k - x \|_C = 0. \tag{1.24}$$

Доказательство. Пусть Y и Y_k — соответственно фундаментальные матрицы систем (1.1_0) и

$$\frac{dx}{dt} = P_k(t)\,x,$$

удовлетворяющие условиям

$$Y(a) = Y_k(a) = E.$$

Следуя [40], докажем, что

$$\lim_{k\to+\infty} \| Y_k - Y \|_C = 0. \tag{1.25}$$

Положив

$$Z_k(t) = Y_k(t)\, Y^{-1}(t) - E,$$

будем иметь

$$Z_k'(t) = P_k(t) - P(t) + P_k(t)\, Z_k(t) - Z_k(t)\, P(t)$$

и $Z_k(a) = 0$. Поэтому $\| Z_k(t) \| \leqslant \varepsilon_k + \int_a^t \gamma_k(\tau)\, \| Z_k(\tau) \|\, d\tau$ при $a \leqslant t \leqslant b$, где

[1] Здесь $\|l_k\|$ — норма оператора l_k.

$$\varepsilon_k = \max\left\{\left\|\int_a^t [P_k(\tau) - P(\tau)]\,d\tau\right\| : a \leqslant t \leqslant b\right\},$$

$$\gamma_k(t) = \|P_k(t)\| + \|P(t)\|.$$

Отсюда в силу леммы Гронуолла—Беллмана [27, с. 49] находим

$$\|Z_k(t)\| \leqslant \varepsilon_k \exp\left(\int_a^b \gamma_k(\tau)\,d\tau\right) \text{ при } a \leqslant t \leqslant b.$$

Из этой оценки ввиду условий (1.21) и (1.22) вытекает равенство (1.25).

С учетом (1.19), (1.20) и (1.25) получим

$$\lim_{k\to+\infty} l_k(Y_k) = l(Y).$$

Отсюда согласно (1.7) имеем

$$\det l_k(Y_k) \neq 0 \text{ при } k \geqslant k_0,$$

где k_0 — достаточно большое натуральное число. Следовательно, для любого $k \geqslant k_0$ задача (1.17), (1.18) однозначно разрешима; при этом ее решение x_k имеет вид

$$x_k(t) = x_{0k}(t) + Y_k(t)\,h_k(q_k) + A_k(q_k)(t), \tag{1.26}$$

где

$$A_k(q_k)(t) = Y_k(t)\int_a^t Y_k^{-1}(\tau)\,q_k(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_a^t q_k(\tau)\,d\tau + Y_k(t)\int_a^t Y_k^{-1}(\tau)\,P_k(\tau)\left(\int_a^\tau q_k(s)\,ds\right)d\tau,$$

$$h_k(q_k) = -[l_k(Y_k)]^{-1} l_k(A_k(q_k)),$$

$$x_{0k}(t) = Y_k(t)\,[l_k(Y_k)]^{-1} c_k.$$

В силу леммы 1.1 из условий (1.19)—(1.23) и (1.25) следует, что

$$\lim_{k\to+\infty} \|A_k(q_k) - A(q)\|_C = 0,$$

где

$$A(q)(t) = \int_a^t q(\tau)\,d\tau + Y(t)\int_a^t Y^{-1}(\tau)\,P(\tau)\left(\int_a^\tau q(s)\,ds\right)d\tau =$$

$$= Y(t)\int_a^t Y^{-1}(\tau)\,q(\tau)\,d\tau.$$

Кроме того,

$$\lim_{k\to+\infty} h_k(q_k) = h(q), \quad \lim_{k\to+\infty} \|x_{0k} - x_0\|_C = 0,$$

где h и x_0 — оператор и вектор-функция, заданные равенствами (1.9) и (1.10). Если теперь учесть представления (1.8) и (1.26), то справедливость равенства (1.24) станет очевидной. Теорема доказана.

Замечание 1.3. Приведенные ниже примеры показывают, что в теореме 1.2 условия (1.20) и (1.21) являются существенными и отказаться хотя бы от одного из них нельзя.

Пусть $a=0$, $b=2\pi$, $n=1$, $c_k=c_0=1$,

$$P(t)=P_k(t)=0, \quad q(t)=0, \quad q_k=k\cos k^2t,$$

$$l(x)=x(0), \quad l_k(x)=x(0)+k\int_0^{2\pi} x(t)\sin k^2t dt.$$

Тогда соблюдаются все условия теоремы 1.2 кроме (1.20). С другой стороны,

$$x(t)=1, \quad x_k(t)=1-\pi+\frac{1}{k}\sin k^2t$$

и, следовательно, нарушается равенство (1.24).

Предположим теперь, что $a=0$, $b=1$, $n=1$, $c_k=c_0=0$, $P(t)=q(t)=0$, $P_k(t)=k\cos k^2t$, $q_k(t)=-k\sin k^2t$, $l_k(x)=$ $=l(x)=x(0)$. Тогда

$$x(t)=0, \quad x_k(t)=-k\int_0^t \exp\left(\frac{\sin k^2t}{k}-\frac{\sin k^2\tau}{k}\right)\sin k^2\tau d\tau$$

и

$$\lim_{k\to+\infty}[x_k(t)-x(t)]=\frac{t}{2}.$$

Однако, в этом случае соблюдаются все условия теоремы 1.2 кроме (1.21).

§ 2. ПРИЗНАКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x), \tag{2.1}$$

$$h(x)=0, \tag{2.2}$$

где $f\in K([a,b]\times\mathbf{R}^n;\ \mathbf{R}^n)$, а $h: C([a,b];\ \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}^n$ — непрерывный оператор. Приведенные ниже теоремы существования и единственности решения этой задачи опираются на следующую лемму об априорной оценке.

Лемма 2.1. Пусть $S\subset L([a,b];\ \mathbf{R}^{n\times n})$, а $g: C([a,b];\ \mathbf{R}^n)\to$ $\to\mathbf{R}^n$ — положительно-однородный непрерывный оператор, при этом:

а) задача

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x,\ g(x)\leqslant 0 \tag{2.3}$$

не имеет ненулевого решения, если только $A\in S$;

б) существует $\varphi\in L([a, b];\ \mathbf{R}_+)$ такая, что любая $A\in S$ удовлетворяет неравенству $\|A(t)\|\leqslant\varphi(t)$ при $a<t<b$;

в) если $A_k\in S$ $(k=1, 2, \ldots)$, $A\in L([a, b];\ \mathbf{R}^{n\times n})$ и равномерно на $[a, b]$

$$\lim_{k\to+\infty}\int_a^t A_k(\tau)\,d\tau=\int_a^t A(\tau)\,d\tau,$$

то $A\in S$. Тогда найдется такая положительная постоянная ρ_0, что для любых $x\in\widetilde{C}([a, b];\ \mathbf{R}^n)$ и $A\in S$ справедлива оценка

$$\|x\|_C\leqslant\rho_0\left[\|[g(x)]_+\|+\max\left\{\left\|\int_a^t[x'(\tau)-A(\tau)x(\tau)]\,d\tau\right\|: a<t\leqslant b\right\}\right].$$

Доказательство. Допустим, что лемма неверна. Тогда найдутся последовательности $A_k\in S$ и $x_k\in\widetilde{C}([a, b];\ \mathbf{R}^n)$ $(k=1, 2,\ldots)$ такие, что при каждом k

$$\|x_k\|_C>k\left(\|[g(x_k)]_+\|+\left\|\int_a^t[x_k'(\tau)-A_k(\tau)x_k(\tau)]\,d\tau\right\|\right)\ \text{при}\ a<t<b.$$

Полагая $\widetilde{x}_k(t)=\|x_k\|_C^{-1}x_k(t)$ и $\widetilde{x}_k'(t)-A_k(t)\widetilde{x}_k(t)=q_k(t)$, имеем

$$\|\widetilde{x}_k\|_C=1\quad(k=1, 2, \ldots), \tag{2.4}$$

$$\left\|\int_a^t q_k(\tau)\,d\tau\right\|<\frac{1}{k}\ \text{при}\ a<t<b\quad(k=1, 2, \ldots) \tag{2.5}$$

и

$$\|[g(\widetilde{x}_k)]_+\|<\frac{1}{k}\quad(k=1, 2, \ldots). \tag{2.6}$$

Пусть $B_k(t)=\int_a^t A_k(\tau)\,d\tau$. В силу условия б) $\|B_k(t)-B_k(s)\|\leqslant$ $\leqslant\int_s^t\varphi(\tau)\,d\tau$ при $a\leqslant s<t\leqslant b$ $(k=1, 2, \ldots)$. Поэтому согласно лемме Арцела—Асколи без ограничения общности можем считать, что $(B_k)_{k=1}^{+\infty}$ равномерно сходится. Ясно, что матричная функция

$$B(t)=\lim_{k\to+\infty}B_k(t) \tag{2.7}$$

абсолютно непрерывна. Следовательно,

$$B(t)=\int_a^t A(\tau)\,d\tau,$$

где $A\in L([a,b];\ \mathbf{R}^{n\times n})$; при этом ввиду условия в) $A\in S$.

Согласно (2.4) последовательность $(\tilde{x}_k(a))_{k=1}^{+\infty}$ также можно считать сходящейся. В силу теоремы 1.2 из б), (2.5) и (2.7) следует, что

$$\lim_{k\to+\infty}\|\tilde{x}_k-x\|_C=0, \tag{2.8}$$

где x — решение задачи

$$\frac{dx}{dt}=A(t)\,x,\quad x(a)=c_0,$$

а $c_0=\lim\limits_{k\to+\infty}\tilde{x}_k(a)$. Из (2.6) и (2.8) находим $g_0(x)\leqslant 0$, т. е. x является решением задачи (2.3). Поэтому ввиду а) $x(t)\equiv 0$, что противоречит равенствам (2.4) и (2.8). Полученное противоречие доказывает лемму.

Определение 2.1. Пусть $l: C([a,b];\mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}^n$ — линейный непрерывный, а $l_0: C([a,b];\ \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}_+^n$ — положительно-однородный непрерывный операторы. Скажем, что матричная функция $P:[a,b]\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{n\times n}$ удовлетворяет условию Опяля относительно пары (l,l_0), если

а) $P\in K([a,b]\times\mathbf{R}^n;\ \mathbf{R}^{n\times n})$ и существует $\varphi\in L([a,b];\ \mathbf{R}_+)$ такая, что на множестве $[a,b]\times\mathbf{R}^n$ соблюдается неравенство

$$\|P(t,x)\|\leqslant\varphi(t); \tag{2.9}$$

б) задача

$$\frac{dx}{dt}=A(t)\,x,\quad |l(x)|\leqslant l_0(x) \tag{2.10}$$

имеет только нулевое решение при произвольной $A\in L([a,b],\ R^{n\times n})$, для которой существует последовательность $y_k\in C([a,b];\ R^n)$ $(k=1,2,\ldots)$ такая, что

$$\lim_{k\to+\infty}\int_a^t P(\tau,\ y_k(\tau))\,d\tau=\int_a^t A(\tau)\,d\tau \text{ равномерно на } [a,b]. \tag{2.11}$$

Теорема 2.1. Пусть на множестве $[a,b]\times\mathbf{R}^n$ соблюдается неравенство

$$\|f(t,x)-P(t,x)\,x\|\leqslant\alpha(t,\|x\|), \tag{2.12}$$

а в пространстве $C([a,b];\ \mathbf{R}^n)$ — неравенство

$$|h(x)-l(x)|\leqslant l_0(x)+l_1(\|x\|_C), \tag{2.13}$$

где $l: C([a,b];\ \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}^n$ и $l_0: C([a,b];\ R^n)\to\mathbf{R}_+^n$ — соответственно линейный и положительно-однородный непрерывные операторы, матричная функция P удовлетворяет условию Опяля относительно пары (l, l_0), $\alpha \in K([a, b]\times \mathbf{R}_+;\ \mathbf{R}_+)$ не убывает по второму аргументу, $l_1 \in C(\mathbf{R}_+;\ \mathbf{R}_+^n)$ и

$$\lim_{\rho\to+\infty} \frac{1}{\rho}\int_a^b \alpha(t, \rho)\,dt = \lim_{\rho\to+\infty} \frac{\| l_1(\rho)\|}{\rho} = 0. \tag{2.14}$$

Тогда задача (2.1), (2.2) разрешима.

Доказательство. Пусть $g(x) = |l(x)| - l_0(x)$, а S — множество тех матричных функций $A \in L([a, b];\ \mathbf{R}^{n\times n})$, для каждой из которых существует последовательность $y_k \in C([a, b];\ \mathbf{R}^n)$ $(k=1, 2, \dots)$ такая, что соблюдается (2.11). В силу определения 2.1 ясно, что для g и S соблюдены условия а)—в) леммы 2.1. Подберем $\rho_0 > 0$ таким образом, чтобы было верно заключение этой леммы.

Согласно (2.14) существует положительное число ρ_1 такое, что

$$\rho_0\left[\| l_1(\rho)\| + \int_a^b \alpha(t, \rho)\,dt\right] < \rho \text{ при } \rho \geqslant \rho_1. \tag{2.15}$$

Положим

$$q(t, x) = f(t, x) - P(t, x)\,x, \tag{2.16}$$

$$\chi(\tau) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \leqslant \tau \leqslant \rho_1, \\ 2 - \dfrac{\tau}{\rho_1} \text{ при } \rho_1 < \tau < 2\rho_1, \\ 0 \text{ при } \tau \geqslant 2\rho_1, \end{cases} \tag{2.17}$$

$$\tilde{l}(x) = \chi(\| x\|_C)\,[l(x) - h(x)],$$

$$\rho_2 = 2\rho_1 + \rho_0 \sup\{\| l_0(y)\| + \| l_1(\| y\|_C)\| : \| y\|_C \leqslant 2\rho_1\}. \tag{2.18}$$

$$U = \{y \in C([a, b];\ R^n) : \| y\|_C \leqslant \rho_2\}$$

и для любой $y \in U$ рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = P(t, y(t))\,x + q(t, y(t)), \tag{2.19}$$

$$l(x) = \tilde{l}(y). \tag{2.20}$$

Согласно условию Опяля задача

$$\frac{dx}{dt} = P(t, y(t))\,x, \quad l(x) = 0$$

имеет только нулевое решение. Поэтому в силу теоремы 1.1 и леммы 2.1 задача (2.19), (2.20) имеет единственное решение $x(t) = w(y)(t)$ и

$$\| w(y)\|_C \leqslant \rho_0\left(\| \tilde{l}(y)\| + \int_a^b \| q(t, y(t))\|\,dt\right).$$

Отсюда ввиду (2.12), (2.13) и (2.15)—(2.18) следует, что

$$\| w(y)\|_C \leqslant \rho_2.$$

Таким образом, мы определили оператор $w: U \to U$, который согласно теореме 1.2 является непрерывным.

В силу (2.9), (2.12) и (2.16) для любой $y \in U$ справедлива оценка

$$\| w(y)(t) - w(y)(s) \| \leqslant \int_s^t \varphi_0(\tau)\, d\tau \text{ при } a \leqslant s < t \leqslant b,$$

где $\varphi_0(t) = \rho_2 \varphi(t) + \alpha(t, \rho_2)$. Следовательно, множество $w(U)$ компактно.

Согласно принципу Шаудера [20] существует $x \in U$ такая, что

$$x(t) = w(x)(t) \text{ при } a \leqslant t \leqslant b.$$

Отсюда в силу (2.13) и (2.16)—(2.18) следует, что x является решением системы (2.1), удовлетворяющим условиям

$$l(x) = \tilde{l}(x) \tag{2.21}$$

и

$$| l(x) | \leqslant l_0(x) + l_1(\|x\|_C). \tag{2.22}$$

Согласно лемме 2.1 и неравенствам (2.12), (2.15) и (2.22) имеем

$$\| x \|_C \leqslant \rho_0 \left[\| l_1(\| x \|_C) \| + \int_a^b \alpha(t, \| x \|_C)\, dt \right] \text{ и } \| x \|_C < \rho_1.$$

Ввиду этой оценки из (2.17), (2.18) и (2.21) вытекает, что x удовлетворяет условию (2.2). Теорема доказана.

Теорема 2.2. Пусть на множестве $[a, b] \times \mathbf{R}^n$ соблюдаются неравенства (2.12) и

$$P_1(t) \leqslant P(t, x) \leqslant P_2(t), \tag{2.23}$$

а в пространстве $C([a, b]; \mathbf{R}^n)$ — неравенство (2.13), где $l: C([a, b]; \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}^n$ и $l_0: C([a, b]; \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}_+^n$ — соответственно линейный и положительно-однородный непрерывные операторы, $P \in K^0([a, b] \times \mathbf{R}^n; \mathbf{R}^{n \times n})$, $P_k \in L([a, b]; \mathbf{R}^{n \times n})$ $(k = 1, 2)$, $\alpha \in K([a, b] \times \mathbf{R}_+; \mathbf{R}_+)$ не убывает по второму аргументу, $l_1 \in C(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}_+^n)$ и выполнено условие (2.14). Пусть, кроме того, для любой матричной функции $A \in L([a, b]; \mathbf{R}^{n \times n})$, удовлетворяющей неравенствам

$$P_1(t) \leqslant A(t) \leqslant P_2(t) \text{ при } a < t < b, \tag{2.24}$$

задача (2.10) имеет только нулевое решение. Тогда задача (2.1), (2.2) разрешима.

Доказательство. Обозначим через S множество всех матричных функций $A \in L([a, b]; \mathbf{R}^{n \times n})$, удовлетворяющих неравенствам (2.24). Очевидно, что для S и $g(x) = | l(x) | - l_0(x)$ выполнены все условия леммы 2.1. Подберем число $\rho_0 > 0$ таким образом, чтобы было верно заключение этой леммы.

Ввиду (2.14) существует положительное число ρ_1, для которого справедлива оценка (2.15). Рассмотрим дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt}=P_1(t)\,x+\chi(\|x\|)\,[f(t,x)-P_1(t)\,x], \tag{2.25}$$

где χ — функция, заданная равенством (2.17). Согласно теореме 2.1 задача (2.25), (2.2) разрешима, ибо матричная функция P_1 удовлетворяет условию Опяля относительно пары (l, l_0). Пусть x — ее произвольное решение. Тогда

$$x'(t)-A(t)x(t)=\chi(\|x(t)\|)[f(t,x(t))-P(t,x(t))\,x(t)],$$

где

$$A(t)=P_1(t)+\chi(\|x(t)\|)\,[P(t,x(t))-P_1(t)].$$

С другой стороны, ввиду (2.17) и (2.23) ясно, что A удовлетворяет неравенствам (2.24), т. е. $A\in S$. Поэтому согласно лемме 2.1 и неравенствам (2.12), (2.13) и (2.15) находим

$$\|x\|_C\leqslant\rho_0\left[\|l_1(\|x\|_C)\|+\int_a^b\alpha(t,\|x\|_C)\,dt\right] \text{ и } \|x\|_C<\rho_1.$$

Однако из (2.17) ясно, что любое решение системы (2.25), допускающее такую оценку, является и решением системы (2.1). Теорема доказана.

Замечание 2.1. Теорема 2.2 представляет интерес лишь в случае, когда $P\notin K([a,b]\times\mathbf{R}^n;\ \mathbf{R}^{n\times n})$, ибо при $P\in K([a,b]\times\times\mathbf{R}^n;\ \mathbf{R}^{n\times n})$ она непосредственно следует из теоремы 2.1.

Теорема 2.3. Пусть на множестве $[a,b]\times\mathbf{R}^n$ соблюдается неравенство

$$|f(t,x)-P_0(t)\,x|\leqslant Q(t)\,|x|+q(t,\|x\|), \tag{2.26}$$

а в пространстве $C([a,b];\ \mathbf{R}^n)$ — неравенство (2.13), где $l: C([a,b];\ R^n)\to\mathbf{R}^n$ и $l_0: C([a,b];\ \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}^n_+$ — соответственно линейный и положительно-однородный непрерывные операторы, $P_0\in L([a,b];\ R^{n\times n})$, $Q\in L([a,b];\ \mathbf{R}^{n\times n}_+)$, $q\in K([a,b]\times\mathbf{R}_+;\ \mathbf{R}^n_+)$ не убывает по второму аргументу, $l_1\in C(\mathbf{R}_+;\ \mathbf{R}^n_+)$ и

$$\lim_{\rho\to+\infty}\frac{1}{\rho}\int_a^b\|q(t,\rho)\|\,dt=\lim_{\rho\to+\infty}\frac{\|l_1(\rho)\|}{\rho}=0.$$

Пусть, кроме того, задача

$$|x'(t)-P_0(t)\,x(t)|\leqslant Q(t)\,|x(t)|,\quad |l(x)|\leqslant l_0(x) \tag{2.27}$$

имеет только нулевое решение. Тогда задача (2.1), (2.2) разрешима.

Доказательство. Пусть

$$x=(x_i)_{i=1}^n,\quad f(t,x)=(f_i(t,x))_{i=1}^n,\quad q(t,s)=(q_i(t,s))_{i=1}^n,$$
$$P_0(t)=(p_{0ij}(t))_{i,j=1}^n,\quad Q(t)=(q_{ij}(t))_{i,j=1}^n.$$

Полагая

$$\eta_i(t, x)=\left[\sum_{j=1}^{n} q_{ij}(t)\,|x_j|+q_i(t, \|x\|)+1\right]^{-1}\times$$
$$\times\left[f_i(t, x)-\sum_{j=1}^{n} p_{0ij}(t)\,x_j\right]$$

и

$$p_{ij}(t, x)=p_{0ij}(t)+q_{ij}(t)\,\eta_i(t, x)\operatorname{sign} x_j,$$

ввиду (2.26) находим

$$|\eta_i(t, x)|<1, \quad \left|f_i(t, x)-\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t, x)\,x_j\right|\leqslant q_i(t, \|x\|)+1$$
$$(i=1,\ldots,n)$$

и

$$p_{0ij}(t)-q_{ij}(t)\leqslant p_{ij}(t, x)\leqslant p_{0ij}(t)+q_{ij}(t) \quad (i, j=1,\ldots,n).$$

Следовательно, выполнены неравенства (2.12) и (2.23), где

$$P(t, x)=(p_{ij}(t, x))_{i,j=1}^{n}, \quad P_1(t)=P_0(t)-Q(t),$$
$$P_2(t)=P_0(t)+Q(t)$$

и $\alpha(t,\rho)=\|q(t,\rho)\|+n$, при этом $P\in K^0([a, b]\times\mathbf{R}^n;\ \mathbf{R}^{n\times n})$. С другой стороны, из однозначной разрешимости задачи (2.27) вытекает, что задача (2.10) имеет только нулевое решение для любой матричной функции $A\in L([a, b];\ \mathbf{R}^{n\times n})$, удовлетворяющей неравенствам (2.24). Если теперь применить теорему 2.2, то разрешимость задачи (2.1), (2.2) станет очевидной.

В случае, когда Q и l_0 тождественно равны нулю, теорема 2.3 принимает вид

Следствие 2.1. Пусть на множестве $[a, b]\times\mathbf{R}^n$ соблюдается неравенство

$$\|f(t, x)-P(t)\,x\|\leqslant\alpha(t, \|x\|),$$

а в пространстве $C([a, b];\ \mathbf{R}^n)$ — неравенство $\|h(x)-l(x)\|\leqslant\leqslant\beta(\|x\|_C)$, где $l: C([a, b];\ \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}^n$ — линейный непрерывный оператор, $P\in L([a, b];\ \mathbf{R}^{n\times n})$, $\alpha\in K([a, b]\times\mathbf{R}_+;\ \mathbf{R}_+)$ не убывает по второму аргументу, $\beta\in C(\mathbf{R}_+;\ \mathbf{R}_+)$ и

$$\lim_{\rho\to+\infty}\frac{1}{\rho}\int_a^b \alpha(t, \rho)\,dt=\lim_{\rho\to+\infty}\frac{\beta(\rho)}{\rho}=0.$$

Пусть, кроме того, задача

$$\frac{dx}{dt}=P(t)\,x, \quad l(x)=0$$

имеет только нулевое решение. Тогда задача (2.1), (2.2) разрешима.

Опираясь на теорему 2.3, легко покажем, что справедлива следующая

Теорема 2.4. Пусть на множестве $[a, b]\times\mathbf{R}^n$ соблюдается условие

$$|f(t, x)-f(t, y)-P_0(t)(x-y)|\leqslant Q(t)|x-y|,$$

а в пространстве $C([a, b]; \mathbf{R}^n)$ — условие

$$|h(x)-h(y)-l(x-y)|\leqslant l_0(x-y),$$

где $l: C([a, b]; \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}^n$ и $l_0: C([a, b]; \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}_+^n$ — соответственно линейный и положительно-однородный непрерывные операторы, $P_0\in L([a, b]; \mathbf{R}^{n\times n})$, $Q\in L([a, b]; \mathbf{R}_+^{n\times n})$ и задача (2.27) имеет только нулевое решение. Тогда задача (2.1), (2.2) однозначно разрешима.

§ 3. КОРРЕКТНОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В этом параграфе, как и в предыдущем, будет рассмотрена нелинейная краевая задача

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x), \tag{3.1}$$

$$h(x)=0, \tag{3.2}$$

где $f\in K([a,b]\times\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$, а $h: C([a,b]; \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}^n$ — непрерывный оператор.

Для любых $x^0\in C([a, b]; \mathbf{R}^n)$ и $r\in]0, +\infty[$ через $U(x^0; r)$ обозначим открытый шар радиуса r пространства $C([a, b]; \mathbf{R}^n)$ с центром в x^0, а через $D(x^0; r)$ — множество тех $x\in\mathbf{R}^n$, которые удовлетворяют условию $\min\{\|x-x^0(\tau)\| : a\leqslant\tau\leqslant b\}<r$.

Под $M([a, b]\times\mathbf{R}_+; \mathbf{R}_+)$ мы будем подразумевать множество функций $\omega\in K([a, b]\times\mathbf{R}_+; \mathbf{R}_+)$, не убывающих по второму аргументу и удовлетворяющих условию $\omega(t, 0)=0$ при $a<t<b$.

Пусть x^0 — решение задачи (3.1), (3.2), а r — положительное число. Введем следующие определения.

Определение 3.1. x^0 называется сильно изолированным в радиусе r, если существуют $P\in K([a, b]\times\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^{n\times n})$, $q\in K([a, b]\times\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$, линейный непрерывный оператор $l: C([a, b]; \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}^n$, положительно-однородный непрерывный оператор $l_0: C([a, b]; \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}_+^n$ и непрерывный оператор $\tilde{l}: C([a, b]; \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}^n$ такие, что

а) при $a<t<b$, $\|x-x^0(t)\|<r$ соблюдается равенство $f(t, x)=P(t, x)x+q(t, x)$, а на множестве $U(x^0; r)$ — равенство $h(x)=l(x)+\tilde{l}(x)$;

б) функции $\alpha(t, \rho)=\max\{\|q(t, x)\| : \|x\|\leqslant\rho\}$ и $\beta(\rho)=$ $=\sup\{\|[|\tilde{l}(x)|-l_0(x)]_+\| : \|x\|_C\leqslant\rho\}$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{\rho\to+\infty}\frac{1}{\rho}\int_a^b \alpha(t, \rho)\,dt=0, \quad \lim_{\rho\to+\infty}\frac{\beta(\rho)}{\rho}=0;$$

в) задача

$$\frac{dx}{dt}=P(t, x)x+q(t, x), \tag{3.3}$$

$$l(x)+\tilde{l}(x)=0 \tag{3.4}$$

не имеет решения, отличного от x^0;

г) матричная функция P удовлетворяет условию Опяля относительно пары (l, l_0).

Определение 3.2. Задача (3.1), (3.2) называется $(x^0; r)$ — корректной, если для любых $\varepsilon\in]0, r[$ и $\omega\in M([a, b]\times R_+; R_+)$ найдется положительное число δ такое, что, каковы бы ни были вектор-функция $\eta\in K([a, b]\times R^n; R^n)$ и непрерывный оператор $\gamma : C([a, b]; R^n)\to R^n$, удовлетворяющие неравенствам

$$\left\|\int_a^t \eta(\tau, x)\,d\tau\right\|\leqslant\delta, \quad \|\eta(t, x)-\eta(t, y)\|\leqslant\omega(t, \|x-y\|)$$

при $a<t<b$, x и $y\in D(x^0; r)$, $\|\gamma(x)\|\leqslant\delta$ при $x\in U(x^0; r)$, задача

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x)+\eta(t, x),$$

$$h(x)+\gamma(x)=0$$

имеет хотя бы одно решение, содержащееся в $U(x^0; r)$, причем каждое такое решение принадлежит и шару $U(x^0; \varepsilon)$.

Определение 3.3. Задача (3.1), (3.2) называется корректной, если она имеет единственное решение x^0 и для любого $r>0$ является $(x^0; r)$ — корректной.

Теорема 3.1. Если задача (3.1), (3.2) имеет решение x^0, сильно изолированное в радиусе $r>0$, то она является $(x^0; r)$ — корректной.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма, являющаяся простой модификацией теоремы Красносельского—Крейна о переходе к пределу под знаком интеграла [38].

Лемма 3.1. Пусть $\omega\in M([a, b]\times R_+; R_+)$, $D\subset R^n$, $y_m : [a, b]\to D$ $(m=1, 2, \ldots)$ — равностепенно непрерывная последовательность вектор-функций, $\eta_m\in K([a, b]\times D; R^n)$,

$$\|\eta_m(t, x)-\eta_m(t, y)\|\leqslant\omega(t, \|x-y\|) \text{ при } a<t<b, \ x \text{ и } y\in D \quad (m=1, 2, \ldots) \tag{3.5}$$

и

$$\lim_{m\to+\infty}\int_a^t \eta_m(\tau, x)\,d\tau=0 \text{ равномерно на } [a, b]\times D. \tag{3.6}$$

Тогда

$$\lim_{m\to+\infty}\int_a^t \eta_m(\tau, y_m(\tau))\,d\tau=0 \text{ равномерно на } [a, b]. \tag{3.7}$$

Доказательство. Пусть

$$\alpha_m=\sup\left\{\left\|\int_s^t \eta_m(\tau, x)\,d\tau\right\| : a\leqslant s<t\leqslant b,\ x\in D\right\},$$

$$\beta_m=\max\left\{\left\|\int_a^t \eta_m(\tau, y_m(\tau))\,d\tau\right\| : a\leqslant t\leqslant b\right\}.$$

Согласно (3.6)

$$\lim_{m\to+\infty}\alpha_m=0. \tag{3.8}$$

Наша цель — доказать, что

$$\lim_{m\to+\infty}\beta_m=0. \tag{3.9}$$

Для произвольно заданного $\varepsilon>0$ подберем $\delta>0$ таким образом, чтобы

$$\int_a^b \omega(\tau, \delta)\,d\tau<\varepsilon. \tag{3.10}$$

Ввиду равностепенной непрерывности $(y_m)_{m=1}^{+\infty}$ найдется $\delta_0>0$ такое, что

$\|y_m(t)-y_m(\tau)\|<\delta$ при $a\leqslant t,\tau\leqslant b,\ |t-\tau|\leqslant\delta_0\ (m=1, 2, \ldots)$.

Пусть k — целая часть числа $\frac{b-a}{\delta_0}$, $t_i=a+i\delta_0$ и $\tilde{y}_m(t)=y(t_i)$ при $t_i\leqslant t<t_{i+1}$ $(i=0, \ldots, k)$. Тогда

$$\|y_m(t)-\tilde{y}_m(t)\|<\delta \text{ при } a<t<b\ (m=1, 2, \ldots)$$

и

$$\left\|\int_a^t \eta_m(\tau, \tilde{y}_m(\tau))\,d\tau\right\|\leqslant(k+1)\,\alpha_m \text{ при } a<t<b\ (m=1, 2, \ldots).$$

Применяя наряду с этими оценками и условие (3.5), находим

$$\left\|\int_a^t \eta_m(\tau, y_m(\tau))\,d\tau\right\|\leqslant\int_a^t \|\eta_m(\tau, y_m(\tau))-\eta_m(\tau, \tilde{y}_m(\tau))\|\,d\tau+$$

$$+\left\|\int_a^t \eta_m(\tau, \tilde{y}_m(\tau))\,d\tau\right\| \leqslant \int_a^b \omega(\tau, \delta)\,d\tau + (k+1)\,\alpha_m < \varepsilon + (k+1)\,\alpha_m$$

$$\text{при } a < t < b \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно, $\beta_m < \varepsilon + (k+1)\,\alpha_m$ $(m=1, 2, \ldots)$. Отсюда ввиду (3.8) и произвольности ε вытекает равенство (3.9). Лемма доказана.

Замечание 3.1. Если множество D ограничено и соблюдается условие (3.5), то для выполнения (3,6) необходимо и достаточно, чтобы при любом $x \in D$ имели бы $\lim\limits_{m\to+\infty} \int_a^t \eta_m(\tau, x)\,d\tau = 0$ равномерно на $[a, b]$.

Доказательство теоремы 3.1. Отметим прежде всего, что ниже под P, q, l, l_0, $\tilde{l}$, α и β будем подразумевать отображения, фигурирующие в определении 3.1.

Допустим, что теорема неверна. Тогда найдутся $\varepsilon \in]0, r[$, $\omega \in M([a, b] \times R_+;\ R_+)$, последовательность вектор—функций $\eta_m \in K([a, b] \times R^n;\ R^n)$ $(m=1, 2, \ldots)$ и последовательность непрерывных операторов $\gamma_m : C([a, b];\ R^n) \to R^n$ $(m=1, 2, \ldots)$ такие, что

$$\left\|\int_a^t \eta_m(\tau, x)\,d\tau\right\| < \frac{1}{m}, \quad \|\eta_m(t, x) - \eta_m(t, y)\| \leqslant \omega(t, \|x-y\|)$$

$$\text{при } a < t < b, \quad x \text{ и } y \in D(x^0; r) \quad (m=1, 2, \ldots), \tag{3.11}$$

$$\|\gamma_m(x)\| < \frac{1}{m} \text{ при } x \in U(x^0; r) \quad (m=1, 2, \ldots) \tag{3.12}$$

и при любом натуральном m задача

$$\frac{dx}{dt} = P(t, x)\,x + q(t, x) + \eta_m(t, x),$$

$$l(x) + \tilde{l}(x) + \gamma_m(x) = 0$$

либо не имеет решения, принадлежащего шару $U(x^0; r)$, либо имеет хотя бы одно решение, содержащееся в $U(x^0; r) \setminus U(x^0; \varepsilon)$.

Пусть

$$\chi(t, x) =$$

$$= \begin{cases} x \text{ при } \|x - x^0(t)\| \leqslant r \\ x^0(t) + \dfrac{r}{\|x - x^0(t)\|}(x - x^0(t)) \text{ при } \|x - x^0(t)\| > r \end{cases} \tag{3.13}$$

и

$$\tilde{\chi}(x)(t) = \chi(t, x(t)).$$

В силу теоремы 2.1 при любом m задача

$$\frac{dx}{dt}=P(t, x)x+q(t, x)+\eta_m(t, \chi(t, x)),$$

$$l(x)+\tilde{l}(x)+\gamma_m(\tilde{\chi}(x))=0$$

разрешима. Из вышесказанного очевидно, что она имеет решение x_m, удовлетворяющее неравенству

$$\|x_m-x^0\|_C\geqslant\varepsilon. \tag{3.14}$$

Положим

$$y_m(t)=\chi(t, x_m(t))$$

и

$$\delta_m=\max\left\{\left\|\int_s^t\eta_m(\tau, x^0(\tau))\,d\tau\right\|:\ a\leqslant s\leqslant t\leqslant b\right\}.$$

Ввиду (3.11), (3.13) и леммы 3.1

$$\left\|\int_s^t\eta_m(\tau, y_m(\tau))\,d\tau\right\|\leqslant\int_s^t\omega(\tau, r)\,d\tau+\delta_m \text{ при } a\leqslant s<t\leqslant b$$

$$(m=1, 2, \ldots) \tag{3.15}$$

и

$$\lim_{m\to+\infty}\delta_m=0. \tag{3.16}$$

С другой стороны, согласно лемме 2.1 существует положительное число ρ_0 такое, что

$$\|x_m\|_C\leqslant\rho_0\left[\beta(\|x_m\|_C)+\int_a^b\alpha(t, \|x_m\|_C)\,dt+\zeta_m\right]\quad(m=1, 2, \ldots),$$

где

$$\zeta_m=\max\left\{\left\|\int_a^t\eta_m(\tau, y_m(\tau))\,d\tau\right\|:\ a\leqslant t\leqslant b\right\}+\frac{1}{m}.$$

Отсюда ввиду (3.15), (3.16) и условия б) определения 3.1 вытекает, что

$$\rho_1=\sup\{\|x_m\|_C:\ m=1, 2, \ldots\}<+\infty.$$

С учетом последнего неравенства и оценок (3.15) находим

$$\|x_m(t)-x_m(s)\|\leqslant\int_s^t\psi(\tau)\,d\tau+\delta_m \text{ при } a\leqslant s\leqslant t\leqslant b\quad(m=1, 2, \ldots),$$

где $\psi(t)=\rho_1\max\{\|P(t, x)\|:\ \|x\|\leqslant\rho_1\}+\alpha(t, \rho_1)+\omega(t, r)$. Принимая теперь во внимание условие (3.16), убедимся в равностепенной непрерывности последовательности $(x_m)_{m=1}^{+\infty}$. Очевидно, что вместе с ней равностепенно непрерывной является и последовательность $(y_m)_{m=1}^{+\infty}$. Поэтому в силу леммы 3.1 соблюдается условие (3.7). С другой стороны, ввиду (3.12)

$$\lim_{m\to+\infty} \gamma_m(y_m)=0. \qquad (3.17)$$

Не ограничивая общности последовательность $(x_m)_{m=1}^{+\infty}$ можем считать равномерно сходящейся. Согласно (3.7) и (3.17)

$$x^*(t)=\lim_{m\to+\infty} x_m(t)$$

является решением задачи (3.3), (3.4). Кроме того, из (3.14) имеем

$$\|x^*-x^0\|_c\geqslant\varepsilon.$$

Но это невозможно, так как согласно условию в) определения 3.1 упомянутая задача не имеет отличного от x^0 решения. Полученное противоречие доказывает теорему.

Применяя лемму 2.1, легко убедимся, что из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.1. Пусть соблюдаются условия одной из теорем 2.1—2.3. Тогда однозначная разрешимость задачи (3.1), (3.2) гарантирует ее корректность.

Следствие 3.2. Если соблюдаются условия теоремы 2.4, то задача (3.1), (3.2) является корректной.

Следствие 3.3. Пусть $h(x)=x(t_0)-g(x)$, $t_0\in[a, b]$, множество

$$G=\{g(x) : x\in C([a, b]; R^n)\}$$

ограничено и для любого $c\in\bar{G}$, где $\bar{G}$ — замыкание G, каждое решение дифференциальной системы (3.1), удовлетворяющее начальному условию

$$x(t_0)=c, \qquad (3.18)$$

может быть продолжено на весь отрезок $[a, b]$. Тогда однозначная разрешимость задачи (3.1), (3.2) гарантирует ее корректность.

Доказательство. Нетрудно показать существование такого положительного числа ρ_0, что при любом $c\in G$ каждое решение задачи (3.1), (3.18) принадлежит шару $U(0; \rho_0)$ (см. [27], доказательство леммы 4.2).

Допустим теперь, что задача (3.1), (3.2) имеет единственное решение x^0. Согласно теореме 3.1, для доказательства следствия достаточно установить, что x^0 является сильно изолированным в радиусе r при любом $r>\rho_0$. Положим

$$P(t, x)=0,\ q(t, x)=f(t, \chi(t, x)),$$
$$l(x)=x(t_0),\ l_0(x)=0,\ \tilde{l}(x)=-g(x),$$

где χ — функция, заданная равенством (3.13). Очевидно, что выполнены условия а), б), и г) определения 3.1. С другой стороны, ввиду выбора ρ_0, любое решение задачи (3.3), (3.4) принадлежит шару $U(0;\ \rho_0)$ и поэтому оно одновременно является и решением задачи (3.1), (3.2). Но последняя задача не имеет отличного от x^0 решения. Следовательно, выполнено и условие в) определения 3.1, т. е. x^0 является сильно изолированным в радиусе r. Следствие доказано.

При $g(x) = \mathrm{const}$ из доказанного предложения получается

Следствие 3.4 (см. [38, 39]). Пусть $t_0 \in [a,\ b]$, $c \in R^n$ и система (3.1) имеет единственное определенное на сегменте $[a,\ b]$ решение, удовлетворяющее начальному условию (3.18). Тогда задача (3.1), (3.18) корректна.

Следствие 3.5. Пусть существуют решение x^0 задачи (3.1), (3.2) и положительное число r такие, что

$$|f(t,\ x) - f(t,\ x^0(t)) - P(t)(x - x^0(t))| \leqslant Q(t)\,|x - x^0(t)|$$
$$\text{при } a < t < b,\ \|x - x^0(t)\| < r \tag{3.19}$$

и

$$|h(x) - l(x - x^0)| \leqslant l^*(|x - x^0|) \text{ при } x \in U(x^0;\ r), \tag{3.20}$$

где $l : C([a,\ b];\ \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}^n$ и $l^* : C([a,\ b];\ \mathbf{R}^n_+) \to \mathbf{R}^n_+$ — соответственно линейный и положительно-однородный, не убывающий непрерывные операторы, $P \in L([a,\ b];\ \mathbf{R}^{n \times n})$, $Q \in L([a,\ b];\ \mathbf{R}^{n \times n}_+)$ и задача

$$|x'(t) - P(t)\,x(t)| \leqslant Q(t)\,|x(t)|, \quad |l(x)| \leqslant l^*(|x|) \tag{3.21}$$

имеет только нулевое решение. Тогда задача (3.1), (3.2) является $(x^0;\ r)$—корректной.

Доказательство. Положим

$$P(t,\ x) = P(t), \quad q(t,\ x) = f(t,\ \chi(t,\ x)) - P(t)\,\chi(t,\ x),$$
$$\tilde{l}(x) = h(\tilde{\chi}(x)) - l(\tilde{\chi}(x)), \quad l_0(x) = 0,$$

где χ — функция, заданная равенством (3.13) и $\tilde{\chi}(x)(t) = \chi(t,\ x(t))$. Тогда ясно, что соблюдаются условия а), б) и г) определения 3.1. Согласно теореме 3.1 нам остается показать, что соблюдается и условие в). Пусть $\tilde{x}$ — произвольное решение задачи (3.3), (3.4). Положим

$$x(t) = \tilde{x}(t) - x^0(t).$$

Поскольку $|\chi(t,\ \tilde{x}(t)) - x^0(t)| \leqslant |x(t)|$ при $a < t < b$ и оператор l^* не убывает, из (3.19) и (3.20) вытекает, что x является решением задачи (3.21). Но по нашему допущению последняя имеет только нулевое решение. Таким образом, задача (3.3), (3.4) не имеет отличного от x^0 решения. Следствие доказано.

Следствие 3.6. Пусть компоненты вектор-функции f имеют частные производные по последним n переменным, принадлежащие классу $K([a, b]\times\mathbf{R}^n; \mathbf{R})$, и существует решение x^0 задачи (3.1), (3.2) такое, что оператор h имеет производную Фреше l в точке x^0 и задача

$$\frac{dx}{dt}=F(t, x^0(t))\,x, \quad l(x)=0, \tag{3.22}$$

где $F(t, x)=\dfrac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ имеет только нулевое решение. Тогда при достаточно малом r задача (3.1), (3.2) является $(x^0; r)$—корректной.

Доказательство. Пусть

$$P(t)=F(t, x^0(t)).$$

Согласно теореме 1.2 однозначная разрешимость задачи (3.22) гарантирует существование такого положительного числа δ, что задача (3.21) не имеет ненулевого решения, если только

$$l^*(|x|)=\alpha\|x\|_C, \tag{3.23}$$

$$\alpha\in R_+^n, \quad Q\in L([a, b]; R_+^{n\times n}), \quad \|\alpha\|\leqslant\delta, \quad \int\limits_a^b\|Q(t)\|\,dt\leqslant\delta.$$

Подберем число $r>0$ таким образом, чтобы

$$\|h(x)-l(x-x^0)\|\leqslant\frac{\delta}{n}\|x-x^0\|_C \text{ при } x\in U(x^0; r) \tag{3.24}$$

и

$$\int\limits_a^b q(t)\,dt<\frac{\delta}{n^2},$$

где

$$q(t)=\max\{\|F(t, x)-P(t)\|:\|x-x^0(t)\|\leqslant r\}.$$

Из представления

$$f(t, x)-f(t, x^0(t))=\int\limits_0^1 F(t, sx+(1-s)\,x^0(t))\,ds\,(x-x^0(t))$$

и условия (3.24) вытекают неравенства (3.19) и (3.20), где l^*—оператор, заданный равенством (3.23), а $Q(t)$ и α—$n\times n$-матрица и n-мерный вектор, компоненты которых соответственно равны $q(t)$ и $\dfrac{\delta}{n}$. С другой стороны, согласно выбору Q и l^* задача (3.21) имеет только нулевое решение. Таким образом, выполнены все условия следствия 3.5, что гарантирует $(x^0; r)$—корректность задачи (3.1), (3.2).

Глава 2

МНОГОТОЧЕЧНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 4. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В этой главе рассматриваются краевые задачи вида

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i=1, \ldots, n), \tag{4.1}$$

$$x_i(t_i)=\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i=1, \ldots, n), \tag{4.2}$$

где $-\infty<a<b<+\infty$. $t_i\in[a, b]$,

$$f_i\in K([a, b]\times R^n;\ R) \quad (i=1, \ldots, n),$$

а $\varphi_i:C([a, b];\ R^n)\to R\ (i=1, \ldots, n)$ — непрерывные функционалы.

Для дальнейшего удобно ввести следующее

Определение 4.1. Скажем, что пара $((p_{ik})_{i,k=1}^n;\ (\varphi_{0i})_{i=1}^n)$, состоящая из матричной функции $(p_{ik})_{i,k=1}^n\in L([a, b];\ R^{n\times n})$ и положительно-однородного непрерывного неубывающего оператора $(\varphi_{0i})_{i=1}^n:C([a, b];\ R_+^n)\to R_+^n$, принадлежит множеству $U(t_1, \ldots, t_n)$, если

$$p_{ik}(t)\geqslant 0 \text{ при } a<t<b,\ i\neq k$$

и задача

$$x_i'(t)\operatorname{sign}(t-t_i)\leqslant\sum_{k=1}^n p_{ik}(t)x_k(t) \quad (i=1, \ldots, n), \tag{4.3}$$

$$x_i(t_i)\leqslant\varphi_{0i}(|x_1|, \ldots, |x_n|) \quad (i=1, \ldots, n) \tag{4.4}$$

не имеет ненулевого неотрицательного решения.

4.1 Признаки разрешимости.

Теорема 4.1. Для разрешимости задачи (4.1), (4.2) необходимо и достаточно существование вектор-функций $\alpha_k=(\alpha_{kj})_{j=1}^n\in\tilde{C}([a, b];\ R^n)\ (k=1, 2)$ таких, что

$$\alpha_1(t)\leqslant\alpha_2(t) \text{ при } a<t<b, \tag{4.5}$$

$$(-1)^k[f_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha_{ki}(t), x_{i+1}, \ldots, x_n)-\alpha_{ki}'(t)]\operatorname{sign}(t-t_i)\leqslant 0$$
$$\text{при } a<t<b,\ \alpha_1(t)\leqslant(x_j)_{j=1}^n\leqslant\alpha_2(t) \quad (i=1, \ldots, n;\ k=1, 2) \tag{4.6}$$

и на множестве $\{(x_j)_{j=1}^n\in\tilde{C}([a, b];\ R^n):\alpha_1(t)\leqslant(x_j(t))_{j=1}^n\leqslant\alpha_2(t)$ при $a<t<b\}$ соблюдаются неравенства

$$\alpha_{1i}(t_i)\leqslant\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)\leqslant\alpha_{2i}(t_i)\ (i=1, \ldots, n). \tag{4.7}$$

Теорема 4.2. Пусть на $[a, b]\times R^n$ и на $C([a, b];\ R^n)$ соответственно соблюдаются неравенства

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n)\operatorname{sign}[(t-t_i)x_i] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)\,|x_k| + q(t) \quad (i=1, \ldots, n) \tag{4.8}$$

и

$$|\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \varphi_{0i}(|x_1|, \ldots, |x_n|) + \gamma \quad (i=1, \ldots, n), \tag{4.9}$$

где $q \in L([a, b];\ \mathrm{R}_+)$, $\gamma \in R_+$ и

$$((p_{ik})_{i,k=1}^{n};\ (\varphi_{0i})_{i=1}^{n}) \in U(t_1, \ldots, t_n). \tag{4.10}$$

Тогда задача (4.1), (4.2) разрешима.

Следствие 4.1. Пусть на $[a, b] \times \mathrm{R}^n$ соблюдаются неравенства (4.8), а на $C([a, b];\ \mathrm{R}^n)$ — неравенства

$$|\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} l_{ik}\,\|x_k\|_{L^\nu} + \gamma \quad (i=1, \ldots, n),$$

где $p_{ik} \in L^\mu([a, b];\ \mathrm{R}_+)$, $l_{ik} \in R_+$ $(i,\ k=1, \ldots, n)$, $1 \leqslant \mu \leqslant +\infty$, $\frac{1}{\mu} + \frac{2}{\nu} = 1$, $\gamma \in \mathrm{R}_+$ и собственные значения матрицы

$$\left((b-a)^{\frac{1}{\nu}} l_{ik} + \left[\frac{2(b-a)}{\pi}\right]^{\frac{2}{\nu}} \|p_{ik}\|_{L^\mu}\right)_{i,k=1}^{n} \tag{4.11}$$

по модулю меньше единицы. Тогда задача (4.1), (4.2) разрешима.

Следствие 4.2. Пусть на $[a, b] \times \mathrm{R}^n$ и на $C([a, b] \times \mathrm{R}^n)$ соответственно соблюдаются неравенства

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n)\operatorname{sign}[(t-t_i)x_i] \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_{ik}\,|x_k| + q(t) \quad (i=1, \ldots, n)$$

и

$$|\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant |x(s_i)| + \gamma \quad (i=1, \ldots, n),$$

где $s_i \in [a, b]$, $s_i \neq t_i$, $p_{ii} < 0$ $(i=1, \ldots, n)$, $p_{ik} \in R_+$ при $i \neq k$, $\gamma \in R_+$ и действительные части собственных значений матрицы $(p_{ik})_{i,k=1}^{n}$ отрицательны. Тогда задача (4.1), (4.2) разрешима.

4.2. Единственность и корректность.

Теорема 4.3. Пусть на $[a, b] \times \mathrm{R}^n$ и на $C([a, b];\ \mathrm{R}^n)$ соответственно соблюдаются неравенства

$$[f_i(t, x_1, \ldots, x_n) - f_i(t, y_1, \ldots, y_n)]\operatorname{sign}[(t-t_i)(x_i - y_i)] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)\,|x_k - y_k| \quad (i=1, \ldots, n) \tag{4.12}$$

и

$$|\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) - \varphi_i(y_1, \ldots, y_n)| \leqslant \varphi_{0i}(|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|) \tag{4.13}$$
$$(i=1, \ldots, n),$$

где p_{ik} и φ_{0i} $(i, k=1, \ldots, n)$ удовлетворяют условию (4.10). Тогда задача (4.1), (4.2) имеет одно и только одно решение.

Замечание 4. 1. Пусть $\varphi_{0i}: C([a, b]; \mathbf{R}_+^n) \to \mathbf{R}_+$ $(i=1, \ldots, n)$ — линейные непрерывные функционалы, $p_{ik} \in L([a, b]; \mathbf{R}_+)$ при $i \neq k$, $p_{ii} \in L([a, b]; \mathbf{R})$ $(i, k=1, \ldots, n)$, но нарушается условие (4.10). Тогда найдутся удовлетворяющие неравенствам (4.12) и (4.13) функции $f_i \in K([a, b] \times \mathbf{R}^n; \mathbf{R})$ $(i=1, \ldots, n)$ и функционалы $\varphi_i: C([a, b]; \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ $(i=1, \ldots, n)$, для которых задача (4.1), (4.2) не имеет решения (см. § 6).

Следствие 4.3. Пусть на $[a, b] \times \mathbf{R}^n$ соблюдаются неравенства (4.12), а на $C([a, b]; \mathbf{R}^n)$ — неравенства

$$|\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) - \varphi_i(y_1, \ldots, y_n)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \|x_k - y_k\|_{L^\nu} \quad (i=1, \ldots, n),$$

где $p_{ik} \in L^\mu([a, b]; \mathbf{R}_+)$, $l_{ik} \in \mathbf{R}_+$ $(i, k=1, \ldots, n)$, $1 \leqslant \mu \leqslant +\infty$, $\frac{1}{\mu} + \frac{2}{\nu} = 1$ и собственные значения матрицы (4.11) по модулю меньше единицы. Тогда задача (4.1), (4.2) имеет одно и только одно решение.

Следствие 4.4. Пусть $\lambda_i \in [-1, 1]$, $\gamma_i \in R$, $s_i \in [a, b]$, $s_i \neq t_i$ $(i=1, \ldots, n)$, на $[a, b] \times \mathbf{R}^n$ соблюдаются неравенства

$$[f_i(t, x_1, \ldots, x_n) - f_i(t, y_1, \ldots, y_n)] \operatorname{sign}[(t-t_i)(x_i - y_i)] \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} p_{ik} |x_k - y_k| \quad (i=1, \ldots, n),$$

где $p_{ii} < 0$ $(i=1, \ldots, n)$, $p_{ik} \in R_+$ при $i \neq k$ и действительные части собственных значений матрицы $(p_{ik})_{i,k=1}^n$ отрицательны. Тогда система (4.1) имеет одно и только одно решение, удовлетворяющее краевым условиям

$$x_i(t_i) = \lambda_i x_i(s_i) + \gamma_i \quad (i=1, \ldots, n). \tag{4.14}$$

Теорема 4.4. В условиях теоремы 4.2 однозначная разрешимость задачи (4.1), (4.2) гарантирует ее корректность.

Следствие 4.5. Если соблюдаются условия теоремы 4.3, то задача (4.1), (4.2) является корректной.

4.3. Об одном методе построения решения. В качестве нулевого приближения к решению задачи (4.1), (4.2) возьмем произвольную вектор-функцию $(x_{i0})_{i=1}^n \in C([a, b]; \mathbf{R}^n)$. Если $(m-1)$-ое приближение $(x_{im-1})_{i=1}^n$ построено, то за m-ое приближение $(x_{im})_{i=1}^n$ примем вектор-функцию, i-ая компонента которой является решением следующей задачи Коши

$$x'_{im}(t) = f_i(t, x_{1m-1}(t), \ldots, x_{i-1m-1}(t), x_{im}(t), x_{i+1m-1}(t), \ldots$$
$$\ldots, x_{nm-1}(t)), \tag{4.15}$$

$$x_{im}(t_i) = \varphi_i(x_{1m-1}, \ldots, x_{nm-1}). \tag{4.16}$$

Теорема 4.5. Пусть соблюдаются условия теоремы 4.3. Тогда для любой $(x_{i0})_{i=1}^n \in C([a, b]; R^n)$ найдется единственная последовательность $(x_{im})_{i=1}^n \in C([a, b]; R^n)$ $(m=1, 2, \ldots)$ такая, что при каждом натуральном m и $i \in \{1, \ldots, n\}$ функция x_{im} является решением задачи (4.15), (4.16) и

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t) - x_{im}(t)| \leqslant r_0 \delta^m \text{ при } a \leqslant t \leqslant b \quad (m=1, 2, \ldots), \tag{4.17}$$

где $(x_i)_{i=1}^n$ — решение задачи (4.1), (4.2), а $r_0 > 0$ и $\delta \in]0, 1[$ — не зависящие от m числа.

§ 5. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

5.1. Леммы об априорных оценках.

Лемма 5.1. Пусть

$$((p_{ik})_{i,k=1}^n;\ (\varphi_{0i})_{i=1}^n) \in U(t_1, \ldots, t_n). \tag{5.1}$$

Тогда существует положительное число ρ такое, что для любых $q \in L([a, b]; R_+)$ и $\gamma \in R_+$ каждое решение задачи

$$x_i'(t) \operatorname{sign}[(t-t_i) x_i(t)] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t) |x_k(t)| + q(t) \quad (i=1, \ldots, n), \tag{5.2}$$

$$|x_i(t_i)| \leqslant \varphi_{0i}(|x_1|, \ldots, |x_n|) + \gamma \quad (i=1, \ldots, n) \tag{5.3}$$

допускает оценку

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_C \leqslant \rho \left[\gamma + \int_a^b q(t)\, dt\right]. \tag{5.4}$$

Доказательство. Пусть

$$g(x) = (|x_i(t_i)| - \varphi_{0i}(|x_1|, \ldots, |x_n|))_{i=1}^n,$$

а S — множество всех матричных функций $A = (a_{ik})_{i,k=1}^n \in$ $\in L([a, b]; \mathbf{R}^{n \times n})$, удовлетворяющих условиям

$$a_{ii}(t) = p_{ii}(t) \operatorname{sign}(t - t_i) \quad (i=1, \ldots, n)$$

и

$$|a_{ik}(t)| \leqslant p_{ik}(t) \text{ при } a < t < b,\ i \neq k.$$

Согласно условию (5.1) задача (2.3) не имеет ненулевого решения, если только $A \in S$. Поскольку S удовлетворяет также условиям б) и в) леммы 2.1, существует положительное число ρ_0 такое, что

$$\|y\|_C \leqslant \rho_0 \left[\|[g(y)]_+\| + \int_a^b \|y'(t) - A(t)\,y(t)\|\,dt \right] \tag{5.5}$$

при любых $y \in C([a, b]; R^n)$ и $A \in S$.

Пусть $(x_i)_{i=1}^n$ — решение задачи (5.2), (5.3). Для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ через y_i обозначим решение задачи Коши

$$y_i'(t) = a_{ii}(t)\,y_i(t) + \left[\sum_{k \neq i,\, k=1}^{n} p_{ik}(t)\,|x_k(t)| + q(t) \right] \operatorname{sign}(t - t_i),$$

$$y_i(t_i) = |x_i(t_i)|.$$

Легко видеть, что

$$|x_i(t)| \leqslant y_i(t) \text{ при } a \leqslant t \leqslant b \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{5.6}$$

и вектор-функция $y = (y_i)_{i=1}^n$ является решением дифференциальной системы

$$y'(t) = A(t)\,y(t) + (\eta_i(t)\,q(t))_{i=1}^n, \tag{5.7}$$

удовлетворяющим условию

$$\|[g(y)]_+\| \leqslant n\gamma, \tag{5.8}$$

где $A(t) = (a_{ik}(t))_{i,k=1}^n$, $a_{ik}(t) = \eta_i(t)\,p_{ik}(t)$ при $i \neq k$, а $\eta_i : [a, b] \to [-1, 1]$ $(i = 1, \ldots, n)$ — измеримые функции. С другой стороны, $A \in S$ и, следовательно, справедливо неравенство (5.5). Ввиду (5.6)—(5.8) из (5.5) вытекает оценка (5.4), где $\rho = n\rho_0$. Лемма доказана.

Лемма 5.2. Пусть соблюдается условие (5.1). Тогда найдется такое число $\delta \in]0, 1[$, что

$$((\tilde{p}_{ik})_{i,k=1}^n;\ (\tilde{\varphi}_{0i})_{i=1}^n) \in U(t_1, \ldots, t_n), \tag{5.9}$$

где

$$\tilde{p}_{ik}(t) = \frac{1}{\delta}\,p_{ik}(t) \text{ при } i \neq k, \quad \tilde{p}_{ii}(t) = p_{ii}(t),$$

$$\tilde{\varphi}_{0i}(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{\delta}\,\varphi_{0i}(y_1, \ldots, y_n). \tag{5.10}$$

Доказательство. Подберем положительное число ρ таким образом, чтобы было верно заключение леммы 5.1. Пусть

$$q_0(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \neq i,\, k=1}^{n} p_{ik}(t), \quad \gamma_0 = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{0i}(1, \ldots, 1),$$

$\delta \in]0, 1[$ — число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{1-\delta}{\delta}\,\rho \left[\gamma_0 + \int_a^b q_0(t)\,dt \right] < \frac{1}{2}, \tag{5.11}$$

а $\tilde{p}_{ik}$ и $\tilde{\varphi}_{0i}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ — функции и функционалы, заданные равенствами (5.10). Рассмотрим произвольное неотрицательно решение $(x_i)_{i=1}^n$ задачи

$$x_i'(t)\operatorname{sign}(t-t_i)\leqslant\sum_{k=1}^n \tilde p_{ik}(t)\,x_k(t)\quad (i=1,\ldots,n),\tag{5.12}$$

$$x_i(t_i)\leqslant\tilde\varphi_{0i}(x_1,\ldots,x_n)\quad (i=1,\ldots,n),\tag{5.13}$$

Очевидно, что оно является и решением задачи (5.2), (5.3), где

$$q(t)=\frac{1-\delta}{\delta}\,q_0(t)\sum_{i=1}^n\|x_i\|_C,\quad \gamma=\frac{1-\delta}{\delta}\,\gamma_0\sum_{i=1}^n\|x_i\|_C.$$

Согласно выбору ρ справедлива оценка (5.4), из которой ввиду (5.11) находим

$$\sum_{i=1}^n\|x_i\|_C\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\|x_i\|_C$$

и, следовательно, $x_i(t)\equiv 0$ $(i=1,\ldots,n)$. Лемма доказана.

Лемма 5.3. Пусть соблюдается условие (5.1). Тогда существуют числа $\rho\in]0,+\infty[$ и $\delta\in]0,1[$ такие, что для произвольной $(y_{i0})_{i=1}^n\in C([a,b];R_+^n)$ и любых последовательностей $\gamma_m\in R_+$, $(y_{im})_{i=1}^n\in\tilde C([a,b];R_+^n)$, $q_m\in L([a,b];R_+)$ $(m=1,2,\ldots)$, удовлетворяющих при каждом натуральном m неравенствам

$$y_{im}'(t)\operatorname{sign}(t-t_i)\leqslant p_{ii}(t)\,y_{im}(t)+$$
$$+\sum_{k\neq i,\,k=1}^n p_{ik}(t)\,y_{im-1}(t)+q_m(t)\ \text{при}\ a<t<b\quad (i=1,\ldots,n)\tag{5.14}$$

и

$$y_{im}(t_i)\leqslant\varphi_{0i}(y_{1m-1},\ldots,y_{nm-1})+\gamma_m\quad (i=1,\ldots,n),\tag{5.15}$$

справедливы оценки

$$\sum_{i=1}^n\|y_{im}\|_C\leqslant\rho\left[\sum_{k=1}^m\delta^{m-k}\left(\gamma_k+\int_a^b q_k(t)\,dt\right)+\delta^m\sum_{i=1}^n\|y_{i0}\|_C\right]$$
$$(m=1,2,\ldots).\tag{5.16}$$

Доказательство. Согласно лемме 5.2 существует число $\delta\in]0,1[$ такое, что функции и функционалы $\tilde p_{ik}$ и $\tilde\varphi_{0i}$ $(i,k=1,\ldots,n)$, заданные равенствами (5.10), удовлетворяют условию (5.9).

Для каждого $i\in\{1,\ldots,n\}$ на множестве $C([a,b];R_+^n)$ введем оператор

$$h_i(z_1,\ldots,z_n)(t)=\tilde\varphi_{0i}(z_1,\ldots,z_n)\exp\left(\int_{t_i}^t a_i(\tau)\,d\tau\right)+$$

$$+\left|\int\limits_{t_i}^{t}\exp\left(\int\limits_{\tau}^{t}a_i(s)\,ds\right)\left[\sum_{k\neq i,k=1}^{n}\tilde{p}_{ik}(\tau)\,z_k(\tau)\right]d\tau\right|,$$

где $a_i(t)=p_{ii}(t)\operatorname{sign}(t-t_i)$. Пусть

$$z_{i0}(t)\equiv 1\quad (i=1,\ldots,n),\quad \eta=2\sum_{i=1}^{n}\exp\left(\int\limits_{a}^{b}|p_{ii}(t)|\,dt\right),$$

а $(z_{im})_{i=1}^{n}$ $(m=1,2,\ldots)$ — последовательность вектор-функций, заданных равенствами

$$z_{im}(t)=h_i(z_{1m-1},\ldots,z_{nm-1})(t)+\eta$$
$$(i=1,\ldots,n;\ m=1,2,\ldots). \tag{5.17}$$

Легко видеть, что

$$1\leqslant z_{im-1}(t)\leqslant z_{im}(t)\ \text{при}\ a\leqslant t\leqslant b\ \ (i=1,\ldots,n;\ m=1,2,\ldots).$$

Следовательно,

$$\rho_m=\sum_{i=1}^{n}\|z_{im}\|_C\quad (m=1,2,\ldots)$$

является неубывающей последовательностью положительных чисел. Покажем, что

$$\rho=\lim_{m\to+\infty}\rho_m<+\infty. \tag{5.18}$$

Допустим противное, т. е. что $\rho_m\to+\infty$ при $m\to+\infty$, и положим $x_{im}(t)=\frac{1}{\rho_m}z_{im}(t)$, $\bar{x}_{im}(t)=h_i(x_{1m-1},\ldots,x_{nm-1})(t)$, $\eta_m=\frac{\eta}{\rho_m}$. Тогда

$$\lim_{m\to+\infty}\eta_m=0, \tag{5.19}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\|x_{im}\|_C=1\quad (m=1,2,\ldots), \tag{5.20}$$

а последовательность вектор-функций $(\bar{x}_{im})_{i=1}^{n}$ $(m=1,2,\ldots)$ является равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной. Поэтому

$$\lim_{m\to+\infty}\sup\bar{x}_{im}(t)=\bar{x}_i(t)\ \text{равномерно на}\ [a,b]\ \ (i=1,\ldots,n), \tag{5.21}$$

где $(\bar{x}_i)_{i=1}^{n}\in C([a,b];R_{+}^{n})$. С другой стороны, из (5.17) находим

$$x_{im}(t)\leqslant\bar{x}_{im}(t)+\eta_m\ \text{при}\ a\leqslant t\leqslant b\ \ (i=1,\ldots,n;\ m=1,2,\ldots)$$

и

$$\bar{x}_{im}(t)\leqslant h_i(\bar{x}_{1m-1}+\eta_{m-1},\ldots,\bar{x}_{nm-1}+\eta_{m-1})(t)$$
$$\text{при}\ a\leqslant t\leqslant b\ \ (i=1,\ldots,n;\ m=1,2,\ldots).$$

Из этих неравенств ввиду (5.19)—(5.21) вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{n}\|\bar{x}_i\|_C \geqslant 1$$

и

$$\bar{x}_i(t) \leqslant x_i(t) \text{ при } a \leqslant t \leqslant b \quad (i=1,\ldots,n),$$

где

$$x_i(t) = h_i(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)(t) \quad (i=1,\ldots,n).$$

Поэтому

$$[x_i'(t)-a_i(t)x_i(t)]\operatorname{sign}(t-t_i) = \sum_{k\neq i,k=1}^{n}\tilde{p}_{ik}(t)\bar{x}_k(t) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k\neq i,k=1}^{n}\tilde{p}_{ik}(t)x_k(t) \text{ при } a<t<b \quad (i=1,\ldots,n)$$

и

$$x_i(t_i) = \tilde{\varphi}_{0i}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n) \leqslant \tilde{\varphi}_{0i}(x_1,\ldots,x_n) \quad (i=1,\ldots,n).$$

Следовательно, $(x_i)_{i=1}^n$ является ненулевым неотрицательным решением задачи (5.12), (5.13). Но это противоречит условию (5.9). Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (5.18).

Пусть

$$(y_{i0})_{i=1}^n \in C([a,b];R_+^n), \quad \zeta_0 = \sum_{i=1}^{n}\|y_{i0}\|_C > 0,$$

а $\gamma_m \in R_+$, $(y_{im})_{i=1}^n \in \tilde{C}([a,b];R_+^n)$, $q_m \in L([a,b];R_+)$ $(m=1,2,\ldots)$ — произвольные последовательности, удовлетворяющие при каждом m неравенствам (5.14) и (5.15). Положим

$$\zeta_m = \sum_{k=1}^{m}\delta^{m-k}\left(\gamma_k + \int_a^b q_k(t)\,dt\right) + \delta^m\sum_{i=1}^{n}\|y_{i0}\|_C,$$

$$\bar{y}_{i0}(t) \equiv 1, \quad \bar{y}_{im}(t) = \frac{y_{im}(t)}{\zeta_m} \quad (i=1,\ldots,n).$$

С учетом неравенств

$$\zeta_m \geqslant \delta\zeta_{m-1}, \quad \zeta_m > \gamma_m, \quad \zeta_m > \int_a^b q_m(t)\,dt \quad (m=1,2,\ldots)$$

из (5.14) и (5.15) находим

$$\bar{y}_{im}(t) \leqslant h_i(\bar{y}_{1m-1},\ldots,\bar{y}_{nm-1})(t) + \eta \, (i=1,\ldots,n;\ m=1,2,\ldots).$$

Ввиду (5.17) отсюда получим

$$\tilde{y}_{im}(t) \leqslant z_{im}(t) \text{ при } a \leqslant t \leqslant b \, (i=1, \ldots, n; \; m=1, 2 \ldots)$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} \| \bar{y}_{im} \|_C \leqslant \sum_{i=1}^{n} \| z_{im} \|_C = \rho_m \leqslant \rho \quad (m=1, 2, \ldots).$$

Следовательно, справедливы оценки (5.16). Поскольку ρ не зависит от $(y_{i0})_{i=1}^{n}$, эти оценки будут иметь место и в том случае, когда $y_{i0}(t) \equiv 0$ $(i=1, \ldots, n)$. Лемма доказана.

5.2. О множестве $U(t_1, \ldots, t_n)$.

Лемма 5.4. Пусть

$$\varphi_{0i}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \| x_k \|_{L^\nu}, \quad l_{ik} \in R_+, \quad p_{ik} \in L^\mu([a, b]; R_+)$$
$$(i, \; k=1, \ldots, n),$$

$1 \leqslant \mu \leqslant +\infty, \frac{1}{\mu} + \frac{2}{\nu} = 1$ и собственные значения матрицы

$$A = \left((b-a)^{\frac{1}{\nu}} l_{ik} + \left[\frac{2(b-a)}{\pi} \right]^{\frac{2}{\nu}} \| p_{ik} \|_{L^\mu} \right)_{i, k=1}^{n}$$

по модулю меньше единицы. Тогда соблюдается условие (5.1).

Доказательство. Пусть $(x_i)_{i=1}^{n}$ — произвольное неотрицательное решение задачи (4.3), (4.4). Тогда

$$x_i(t) \leqslant \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \| x_k \|_{L^\nu} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{t_i}^{t} p_{ik}(t) x_k(\tau) \, d\tau \right| \text{ при } a \leqslant t \leqslant b \quad (i=1, \ldots, n).$$

Отсюда согласно неравенствам Минковского и Гельдера вытекает, что

$$\| x_i \|_{L^\nu} \leqslant (b-a)^{\frac{1}{\nu}} \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \| x_k \|_{L^\nu} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \| p_{ik} \|_{L^\mu} \left[\int_a^b \left| \int_{t_i}^{t} | x_k(\tau) |^{\frac{\nu}{2}} d\tau \right|^2 dt \right]^{\frac{1}{\nu}} \quad (i=1, \ldots, n).$$

С другой стороны, в силу неравенства Виртингера ([62], с. 409)

$$\left[\int_a^b \left| \int_{t_i}^{t} | x_k(\tau) |^{\frac{\nu}{2}} d\tau \right|^2 dt \right]^{\frac{1}{\nu}} \leqslant \left[\frac{2(b-a)}{\pi} \right]^{\frac{2}{\nu}} \| x_k \|_{L^\nu},$$

Поэтому

$$(E-A)r \leqslant 0, \qquad (5.21)$$

где $r=(\|x_i\|_{L^\nu})_{i=1}^n$, а E — единичная матрица. Поскольку собственные значения матрицы A по модулю меньше единицы, из последнего неравенства вытекает, что $r=0$. Следовательно, задача (4.3), (4.4) не имеет ненулевого неотрицательного решения. Лемма доказана.

Лемма 5.5. Пусть

$$\varphi_{0i}(x_1, \ldots, x_n)=x_i(s_i), \; s_i\in[a, b], \; s_i\neq t_i \; (i=1, \ldots, n),$$

$p_{ik}(t)\equiv p_{ik}=\mathrm{const}$, $p_{ii}<0$, $p_{ik}\geqslant 0$ при $i\neq k$ и действительные части собственных значений матрицы $(p_{ik})_{i,k=1}^n$ отрицательны. Тогда соблюдается условие (5.1).

Доказательство. Положим

$$a_{ii}=0, \; a_{ik}=\frac{p_{ik}}{|p_{ii}|} \text{ при } i\neq k \text{ и } A=(a_{ik})_{i,k=1}^n.$$

Из ограничений, наложенных на матрицу $(p_{ik})_{i,k=1}^n$, следует, что собственные значения матрицы A по модулю меньше единицы.

Пусть $(x_i)_{i=1}^n$ — произвольное неотрицательное решение задачи (4.3), (4.4). Тогда

$$x_i(t)\leqslant \delta_i(t)\,x_i(s_i)+(1-\delta_i(t))\sum_{k=1}^n a_{ik}\|x_k\|_C \text{ при } a\leqslant t\leqslant b$$
$$(i=1, \ldots, n),$$

где $\delta_i(t)=\exp(p_{ii}|t-t_i|)$. Поскольку $s_i\neq t_i$, отсюда находим

$$x_i(s_i)\leqslant \sum_{k=1}^n a_{ik}\|x_k\|_C \quad (i=1, \ldots, n)$$

и

$$\|x_i\|_C\leqslant \sum_{k=1}^n a_{ik}\|x_k\|_C \quad (i=1, \ldots, n).$$

Следовательно, вектор $r=(\|x_i\|_C)_{i=1}^n$ удовлетворяет неравенству (5.21), из которого получаем $r=0$, т. е. $x_i(t)\equiv 0$ $(i=1, \ldots, n)$. Лемма доказана.

§ 6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 4.1. Необходимость очевидна, ибо если $(x_i)_{i=1}^n$ является решением задачи (4.1), (4.2), то для вектор-функций $\alpha_1(t)=\alpha_2(t)=(x_i(t))_{i=1}^n$ соблюдаются условия (4.5)—(4.7).

Докажем достаточность. Для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ положим

$$\chi_i(t, s) = \begin{cases} \alpha_{1i}(t) \text{ при } s < \alpha_{1i}(t) \\ s \text{ при } \alpha_{1i}(t) \leqslant s \leqslant \alpha_{2i}(t), \\ \alpha_{2i}(t) \text{ при } s > \alpha_{2i}(t) \end{cases}$$

$$\overline{\chi}_i(u)(t) = \chi_i(t, u(t)),$$

$$\tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) = f_i(t, \chi_1(t, x_1), \ldots, \chi_n(t, x_n))$$

и

$$\tilde{\varphi}_i(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_i(\overline{\chi}_1(x_1), \ldots, \overline{\chi}_n(x_n)).$$

Тогда на $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ соблюдается неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} |\tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant q(t),$$

где

$$q(t) = \max\left\{\sum_{i=1}^{n} |f_i(t, x_1, \ldots, x_n)| : \alpha_1(t) \leqslant (x_j)_{j=1}^{n} \leqslant \alpha_2(t)\right\}$$

и $q \in L([a, b]; \mathbb{R}_+)$. С другой стороны, ввиду (4.7) на $C([a, b]; \mathbb{R}^n)$ имеем

$$\alpha_{1i}(t_i) \leqslant \tilde{\varphi}_i(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \alpha_{2i}(t_i) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Поскольку, кроме того, задача

$$\frac{dx_i}{dt} = 0, \quad x_i(t_i) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

имеет только нулевое решение, то в силу следствия 2.1 дифференциальная система

$$\frac{dx_i}{dt} = \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{6.1}$$

обладает решением $(x_i)_{i=1}^{n}$, удовлетворяющим краевым условиям

$$x_i(t_i) = \tilde{\varphi}_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{6.2}$$

Для доказательства теоремы достаточно установить, что

$$\alpha_{1i}(t) \leqslant x_i(t) \leqslant \alpha_{2i}(t) \text{ при } a \leqslant t \leqslant b \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{6.3}$$

ибо каждое решение задачи (6.1), (6.2), удовлетворяющее этим неравенствам, одновременно является и решением задачи (4.1), (4.2).

Допустим, что (6.3) нарушается, т. е. для некоторых $k \in \{1, 2\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $\tau_0 \in [a, b]$ функция

$$u(t) = (-1)^k [x_i(t) - \alpha_{ki}(t)]$$

удовлетворяет неравенству

$$u(\tau_0) > 0.$$

Согласно (6.2) и (4.7), $\tau_0 \neq t_i$. Для определенности будем считать $\tau_0 > t_k$. Тогда найдется $\tau_1 \in [t_k, \tau_0[$ такое, что

$$u(\tau_1)=0,\ u(t)>0 \text{ при } \tau_1<t\leqslant\tau_0. \tag{6.4}$$

С другой стороны, ввиду (4.6) имеем

$$u'(t)=(-1)^k[f_i(t, \overline{\chi}_1(x_1)(t), \ldots, \overline{\chi}_{i-1}(x_{i-1})(t), \alpha_{ki}(t),$$
$$\overline{\chi}_{i+1}(x_{i+1})(t), \ldots, \overline{\chi}_n(x_n)(t)) - \alpha'_{ki}(t)] \leqslant 0 \text{ при } \tau_1<\tau<\tau_0,$$

что противоречит условиям (6.4). Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство теоремы 4.2. Подберем положительное число ρ таким образом, чтобы было верно заключение леммы 5.1. Положим

$$\rho_0=\rho\left(\gamma+\int_a^b q(t)\,dt\right),$$

$$\chi(s)=\begin{cases}1 \text{ при } |s|\leqslant\rho_0\\ 2-\dfrac{|s|}{\rho_0} \text{ при } \rho_0<s<2\rho_0,\\ 0 \text{ при } |s|\geqslant 2\rho_0\end{cases} \tag{6.5}$$

$$p_i(t)=p_{ii}(t)\operatorname{sign}(t-t_i),\quad q_i(t, x_1, \ldots, x_n)=$$
$$=\chi\left(\sum_{k=1}^n |x_k|\right)[f_i(t, x_1, \ldots, x_n)-p_i(t)x_i] \quad (i=1, \ldots, n) \tag{6.6}$$

и

$$\widetilde{\varphi}_i(x_1, \ldots, x_n)=\chi\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_C\right)\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)\ (i=1, \ldots, n). \tag{6.7}$$

Тогда

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^n |q_i(\cdot, x_1, \ldots, x_n)| : (x_k)_{k=1}^n \in R^n\right\} \in L([a, b]; \mathrm{R}_+) \tag{6.8}$$

и

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^n |\widetilde{\varphi}_i(x_1, \ldots, x_n)| : (x_k)_{k=1}^n \in C([a, b]; \mathrm{R}^n)\right\} < +\infty. \tag{6.9}$$

Ясно, что задача

$$\frac{dx_i}{dt}=p_i(t)x_i,\ x_i(t_i)=0\ (i=1, \ldots, n) \tag{6.10}$$

имеет только нулевое решение. Учтя наряду с этим обстоятельством условия (6.8) и (6.9) и применив следствие 2.1, убедимся, что задача

$$\frac{dx_i}{dt}=p_i(t)x_i+q_i(t, x_1, \ldots, x_n)\ (i=1, \ldots, n), \tag{6.11}$$

$$x_i(t_i)=\tilde{\varphi}_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i=1, \ldots, n) \tag{6.12}$$

является разрешимой. Пусть $(x_i)_{i=1}^n$ — произвольное решение этой задачи. Ввиду неравенств (4.8), (4.9) и равенств (6.5)—(6.7), оно будет и решением задачи (5.2), (5.3). Поэтому в силу выбора ρ справедлива оценка (5.4), т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_C \leqslant \rho_0.$$

Согласно этому неравенству из (6.5)—(6.7) следует, что $(x_i)_{i=1}^n$ является и решением задачи (4.1), (4.2). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4.3. Из (4.12) и (4.13) вытекают неравенства (4.8) и (4.9), где

$$q(t)=\sum_{i=1}^{n} |f_i(t, 0, \ldots, 0)|, \quad \gamma=\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(0, \ldots, 0)|.$$

Следовательно, соблюдаются все условия теоремы 4.2, что и гарантирует разрешимость задачи (4.1), (4.2). Нам остается доказать, что она имеет не более одного решения.

Пусть $(x_{1i})_{i=1}^n$ и $(x_{2i})_{i=1}^n$ — произвольные решения задачи (4.1), (4.2) и

$$y_i(t)=|x_{1i}(t)-x_{2i}(t)| \quad (i=1, \ldots, n).$$

Согласно (4.12) и (4.13) $(y_i)_{i=1}^n$ является неотрицательным решением задачи (4.3), (4.4). Поэтому ввиду (4.10) $y_i(t)\equiv 0$ $(i=1, \ldots, n)$. Теорема доказана.

Из доказанных теорем и лемм 5.4 и 5.5 непосредственно получаются следствия 4.1—4.4.

Покажем теперь, что верно замечание 4.1. Поскольку условие (4.10) нарушено, задача (4.3), (4.4) имеет ненулевое неотрицательное решение $(x_i)_{i=1}^n$. Для каждого $i\in\{1, \ldots, n\}$ через y_i обозначим решение задачи Коши

$$y_i'=\left[p_{ii}(t)\,y_i+\sum_{k\neq i,k=i}^{n} p_{ik}(t)\,x_k(t)\right]\operatorname{sign}(t-t_i),$$

$$y_i(t_i)=x_i(t_i).$$

Легко видеть, что

$$y_i(t)\geqslant x_i(t) \text{ при } a\leqslant t\leqslant b \quad (i=1, \ldots, n)$$

и вектор-функция $(y_i)_{i=1}^n$ является ненулевым решением линейной однородной задачи

$$\frac{dy_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_{ik}(t)\,y_k \quad (i=1, \ldots, n),$$

$$y_i(t_i)=\delta_i\varphi_{0i}(y_1, \ldots, y_n) \quad (i=1, \ldots, n),$$

где $\delta_i \in [0, 1]$, $\tilde{p}_{ii}(t) = p_{ii}(t)$, $\tilde{p}_{ik} \in L([a, b]; R)$ и $|\tilde{p}_{ik}(t)| \leqslant p_{ik}(t)$ при $a < t < b$, $i \neq k$. Согласно замечанию 1.1 найдутся числа $c_i (i=1, \ldots, n)$ такие, что в случае, когда

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_{ik}(t) x_k,$$

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = \delta_i \varphi_{0i}(x_1, \ldots, x_n) + c_i \quad (i=1, \ldots, n),$$

задача (4.1), (4.2) не имеет решения, хотя f_i и φ_i $(i=1, \ldots, n)$ удовлетворяют неравенствам (4.12) и (4.13).

Доказательство теоремы 4.4. Пусть выполнены условия теоремы 4.2 и задача (4.1), (4.2) имеет единственное решение $x^0 = (x_i^0)_{i=1}^n$. В силу теоремы 3.1 и определения 3.3 для доказательства корректности рассматриваемой задачи, достаточно установить, что x^0 является сильно изолированным в произвольном радиусе $r > 0$.

Выберем $\rho \in]0, +\infty[$ таким образом, чтобы было верно заключение леммы 5.1. Пусть

$$\rho_0 = r + \sum_{i=1}^{n} \| x_i^0 \| + \rho \left(\gamma + \int_a^b q(t)\, dt \right),$$

p_i, q_i и $\tilde{\varphi}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ — функции и функционалы, заданные равенствами (6.5) — (6.7), δ_{ik} — символ Кронекера,

$$P(t) = (\delta_{ik} p_i(t))_{i,k=1}^n, \quad l(x) = (x_i(t_i))_{i=1}^n, \quad l_0(x) = 0$$

и

$$\tilde{l}(x) = -(\tilde{\varphi}_i(x_1, \ldots, x_n))_{i=1}^n.$$

Тогда

$$(f_i(t, x_1, \ldots, x_n))_{i=1}^n = P(t)\, x + (q_i(t, x_1, \ldots, x_n))_{i=1}^n$$
$$\text{при } a \leqslant t \leqslant b, \quad \| x - x^0(t) \| \leqslant r,$$

$$(x_i(t_i) - \tilde{\varphi}_i(x_1, \ldots, x_n))_{i=1}^n = l(x) + \tilde{l}(x) \text{ при } \| x - x^0 \|_C \leqslant r$$

и соблюдаются условия (6.8) и (6.9). Согласно (4.10) задача (6.10) имеет только нулевое решение, т. е. матричная функция P удовлетворяет условию Опяля относительно пары (l, l_0). С другой стороны, квазилинейная задача (6.11), (6.12) не имеет отличного от x^0 решения, ибо, как это было отмечено при доказательстве теоремы 4.2, каждое решение упомянутой задачи одновременно является и решением задачи (4.1), (4.2). Следовательно, x^0 является сильно изолированным в радиусе r. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4.5. Согласно теореме 4.3 задача (4.1), (4.2) имеет единственное решение $(x_i)_{i=1}^n$. С другой стороны, из условия (4.12) следует, что для произвольных $i\in\{1,\ldots,n\}$, $c_0\in R$ и $z_k\in C([a,b];R)$ $(k\neq i;\ k=1,\ldots,n)$ задача Коши

$$\frac{du}{dt}=f_i(t,z_1(t),\ldots,z_{i-1}(t),u,z_{i+1}(t),\ldots,z_n(t)),\quad u(t_i)=c_0$$

имеет единственное решение, определенное на всем $[a,b]$. Поэтому для любой $(x_{i0})_{i=1}^n\in C([a,b];R^n)$ существует единственная последовательность $(x_{im})_{i=1}^n$ $(m=1,2,\ldots)$ такая, что при каждом натуральном m и $i\in\{1,\ldots,n\}$ функция x_{im} является решением задачи (4.15), (4.16). В силу (4.12) и (4.13) для любого m функции

$$y_{im}(t)=|x_i(t)-x_{im}(t)|\quad(i=1,\ldots,n)$$

удовлетворяют неравенствам (5.14) и (5.15), где $q_m(t)\equiv 0$ и $\gamma_m=0$. Поэтому согласно лемме 5.3 справедливы оценки (4.17), где $r_0\in]0,+\infty[$ и $\delta\in]0,1[$ — не зависящие от m числа. Теорема доказана.

Замечание 6.1. Описанный выше процесс построения решения задачи (4.1), (4.2) является в определенном смысле устойчивым. В самом деле, пусть выполнены условия теоремы 4.5. Тогда для любых $(\bar{x}_{i0})_{i=1}^n\in C([a,b];R^n)$, $(q_{im})_{i=1}^n\in L([a,b];R^n)$ и $(\gamma_{im})_{i=1}^n\in R^n$ $(m=1,2,\ldots)$ существует единственная последовательность вектор-функций $(\bar{x}_{im})_{i=1}^n\in\tilde{C}([a,b];R^n)$ $(m=1,2,\ldots)$ таких, что при любом натуральном m и $i\in\{1,\ldots,n\}$ функция $\bar{x}_{im}$ является решением задачи Коши

$$\bar{x}'_{im}(t)=f_i(t,\bar{x}_{1m-1}(t),\ldots,\bar{x}_{i-1m-1}(t),\bar{x}_{im}(t),\bar{x}_{i+1m-1}(t),\ldots$$
$$\ldots,\bar{x}_{nm-1}(t))+q_{im}(t),$$
$$\bar{x}_{im}(t_i)=\varphi_i(\bar{x}_{1m-1}\ldots,\bar{x}_{nm-1})+\gamma_{im}.$$

С другой стороны, в силу леммы 5.3

$$\sum_{i=1}^n\|x_{im}-\bar{x}_{im}\|_C\leqslant\rho\sum_{k=0}^m\eta_k\delta^{m-k}\quad(m=1,2,\ldots),$$

где $(x_{im})_{i=1}^n$ $(m=1,2,\ldots)$ — последовательность, фигурирующая в теореме 4.2,

$$\eta_0=\sum_{i=1}^n\|x_{i0}-\bar{x}_{i0}\|_C,\quad \eta_m=\sum_{i=1}^n\left[|\gamma_{im}|+\int_a^b|q_{im}(t)|\,dt\right]$$
$$(m=1,2,\ldots),$$

а $\rho\in]0,+\infty[$ и $\delta\in]0,1[$ — числа, не зависящие от m, q_{im} и γ_{im}. Из сказанного, в частности, следует, что если

$$\lim_{m\to+\infty}\eta_m=0,$$

то

$$\lim_{m\to+\infty} \| x_{im} - \bar{x}_{im} \|_C = 0 \quad (i=1, \ldots, n).$$

Глава 3

ДВУХТОЧЕЧНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 7. МНОГОМЕРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

В этом параграфе устанавливаются признаки разрешимости краевой задачи

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i=1, \ldots, n), \tag{7.1}$$

$$(x_i(a))_{i=1}^n \in S_1, \quad (x_i(b))_{i=1}^n \in S_2, \tag{7.2}$$

где $-\infty < a < b < +\infty$, $n \geqslant 2$,

$$f = (f_i)_{i=1}^n \in K([a, b] \times \mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n),$$

а $S_j \subset \mathbf{R}^n$ $(j=1, 2)$ — непустые множества.

7.1. Формулировка теоремы существования. Прежде всего введем следующее

Определение 7.1. $(\gamma_i)_{i=1}^n \in \widetilde{C}([a, b]; R^n)$ называется *нижней (верхней) вектор-функцией дифференциальной системы* (7.1), если существует множество I_0 меры нуль такое, что для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $t \in [a, b] \setminus I_0$

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant \gamma_i'(t) \text{ при } x_i = \gamma_i(t), \quad x_k \leqslant \gamma_k(t)$$
$$(k \neq i; \quad k=1, \ldots, n),$$
$$(f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant \gamma_i'(t) \text{ при } x_i = \gamma_i(t), \quad x_k \geqslant \gamma_k(t)$$
$$(k \neq i; \quad k=1, \ldots, n)).$$

Для любой $\gamma = (\gamma_i)_{i=1}^n : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ положим

$$M_\gamma(t) = \{(x_i)_{i=1}^n \in \mathbf{R}^n: \; x_1 < \gamma_1(t), \ldots, x_n < \gamma_n(t)\},$$
$$M^\gamma(t) = \{(x_i)_{i=1}^n \in \mathbf{R}^n: \; x_1 > \gamma_1(t), \ldots, x_n > \gamma_n(t)\},$$
$$M_\gamma = \{(t, x_1, \ldots, x_n): \; t \in [a, b], \; (x_i)_{i=1}^n \in M_\gamma(t)\},$$
$$M^\gamma = \{(t, x_1, \ldots, x_n): t \in [a, b], \; (x_i)_{i=1}^n \in M^\gamma(t)\}.$$

Скажем, что решение $(x_i)_{i=1}^n$ системы (7.1) проходит через множество $D \subset [a, b] \times R^n$, если существует $t_0 \in [a, b]$, для которого $(t_0, x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)) \in D$.

Если $S \subset R^n$, то под $X_f(a, S)$ будем понимать множество всех максимально продолженных вправо решений системы (7.1), удовлетворяющих начальному условию

$$(x_i(a))_{i=1}^n \in S.$$

Решение $(x_i)_{i=1}^n$ дифференциальной системы (7.1), определенное в промежутке $[a, t^*[\subset [a, b[$, назовем сингулярным, если

$$\lim_{t \to t^*} \sum_{i=1}^n |x_i(t)| = +\infty.$$

Теорема 7.1. Пусть S_1 — ограниченный континуум, S_2 — замкнутое множество и существуют нижняя $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^n$ и верхняя $\beta = (\beta_i)_{i=1}^n$ вектор-функции дифференциальной системы (7.1) такие, что:

а) $X_f(a, S_1)$ содержит как решение, проходящее через M_α, так и решение, проходящее через M^β;

б) $X_f(a, S_1)$ не содержит сингулярного решения, не проходящего через $M_\alpha \cup M^\beta$;

в) $S_2 \cap M_\alpha(b) = S_2 \cap M^\beta(b) = \varnothing$;

г) S_2 имеет непустое пересечение с каждым континуумом, пересечения которого как с $M_\alpha(b)$, так и с M^β (b) непусты. Тогда задача (7.1), (7.2) имеет решение $(x_i)_{i=1}^n$, удовлетворяющее условию

$$(x_i(t))_{i=1}^n \notin M_\alpha(t) \cup M^\beta(t) \text{ при } a \leqslant t \leqslant b. \tag{7.3}$$

7.2. Вспомогательные предложения.

Лемма 7.1 (см. [71, 75]). Пусть существует функция $q \in L([a, b]; \mathrm{R}_+)$ такая, что на $[a, b] \times R^n$ соблюдается неравенство

$$\sum_{i=1}^n |f_i(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant q(t). \tag{7.4}$$

Тогда для любого континуума $S \subset R^n$ множество

$$S_0 = \{(x_i(b))_{i=1}^n : (x_i)_{i=1}^n \in X_f(a, S)\}$$

также является континуумом.

Доказательство. Докажем прежде всего замкнутость множества S_0. Пусть $(c_{ik})_{i=1}^n$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — произвольная сходящаяся последовательность точек этого множества и

$$\lim_{k \to +\infty} c_{ik} = c_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Тогда существует последовательность $(x_{ik})_{i=1}^n$ $(k = 1, 2, \ldots)$ решений системы (7.1) таких, что

$$(x_{ik}(a))_{i=1}^n \in S \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{7.5}$$

и

$$x_{ik}(b)=c_{ik}\quad (i=1,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots).$$

Ввиду (7.4) эта последовательность является равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной. Поэтому без ограничения общности ее можно считать равномерно сходящейся. Очевидно,

$$x_i(t)=\lim_{k\to+\infty} x_{ik}(t)\quad (i=1,\ldots,n)$$

является решением системы (7.1). С другой стороны, ввиду замкнутости S из (7.5) следует, что $(x_i)_{i=1}^n \in X_f(a, S)$. Поэтому $(c_i)_{i=1}^n=(x_i(b))_{i=1}^n \in S_0$. Следовательно, S_0 — замкнутое множество.

Для завершения доказательства леммы нам остается установить связность S_0. Допустим противное. Тогда найдутся непустые замкнутые множества $S_0^{(j)}$ $(j=1, 2)$ такие, что

$$S_0=S_0^{(1)}\cup S_0^{(2)},\quad S_0^{(1)}\cap S_0^{(2)}\neq\varnothing.$$

Поэтому

$$S=S^{(1)}\cup S^{(2)},$$

где $S^{(j)}$ $(j=1, 2)$ таковы, что

$$S_0^{(j)}=\{(x_i(b))_{i=1}^n : (x_i)_{i=1}^n \in X_f(a, S^{(j)})\}\quad (j=1,2). \tag{7.6}$$

Из замкнутости $S_0^{(j)}$ $(j=1, 2)$ следует замкнутость $S^{(j)}$ $(j=1, 2)$. С другой стороны, поскольку S является континуумом,

$$S^{(1)}\cap S^{(2)}\neq\varnothing.$$

Пусть

$$c=(c_i)_{i=1}^n \in S^{(1)}\cap S^{(2)}, \tag{7.7}$$

$X_f(a, c)$ — множество всех решений системы (7.1), удовлетворяющих начальному условию

$$x_i(a)=c_i\quad (i=1,\ldots,n)$$

и

$$Q=\{(x_i(b))_{i=1}^n : (x_i)_{i=1}^n \in X_f(a, c)\}.$$

Тогда согласно (7.6) и (7.7)

$$Q\subset S_0,\quad Q\cap S_0^{(j)}\neq\varnothing\quad (j=1,2).$$

Но это невозможно, ибо в силу теоремы Кнезера ([62], с. 28) Q является континуумом. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 7.2. Пусть S_1 — континуум и существуют нижняя $\alpha=(\alpha_i)_{i=1}^n$ и верхняя $\beta=(\beta_i)_{i=1}^n$ вектор-функции дифференциальной системы (7.1), удовлетворяющие условиям а), в) и г) теоремы 7.1. Пусть, кроме того, каждая функция f_i имеет частную производную

$$f'_i(t, x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f_i(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}, \tag{7.8}$$
$$f'_i \in K([a, b] \times \mathrm{R}^n; \mathrm{R})$$

и на $[a, b] \times R^n$ соблюдается неравенство (7.4), где $q \in L([a, b]; R_+)$. Тогда задача (7.1), (7.2) обладает решением, удовлетворяющим условию (7.3).

Доказательство. Покажем прежде всего, что произвольное решение $(x_i)_{i=1}^n \in X_f(a, S_1)$, проходящее через M^β, удовлетворяет условию

$$(x_i(b))_{i=1}^n \in M^\beta(b). \tag{7.9}$$

Допустим противное. Тогда найдутся $(x_i)_{i=1}^n \in X_f(a, S_1)$, $t_0 \in$ $\in [a, b[$, $t_1 \in]t_0, b]$ и $k \in \{1, \dots, n\}$ такие, что

$$x_i(t) > \beta_i(t) \text{ при } t_0 \leqslant t < t_1 \quad (i=1, \dots, n) \tag{7.10}$$

и

$$x_k(t_1) = \beta_k(t_1). \tag{7.11}$$

Полагая $u(t) = x_k(t) - \beta_k(t)$, согласно определению верхней вектор—функции и условиям (7.8) и (7.10) находим

$$u'(t) = [f(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) - f(t, x_1(t), \dots, x_{k-1}(t),$$
$$\beta_k(t), x_{k+1}(t), \dots, x_n(t))] + [f(t, x_1(t), \dots, x_{k-1}(t), \beta_k(t),$$
$$x_{k+1}(t), \dots, x_n(t)) - \beta_k'(t)] \geqslant -g(t)u(t) \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

где

$$g(t) = \max\{|f_k'(t, x_1(t), \dots, x_{k-1}(t), s, x_{k+1}(t), \dots, x_n(t))| :$$
$$\beta_k(t) \leqslant s \leqslant x_k(t)\}.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$u(t_1) \geqslant \exp\left(-\int_{t_0}^{t_1} g(\tau)\,d\tau\right) u(t_0) > 0.$$

Но это противоречит равенству (7.11). Тем самым справедливость включения (7.9) доказана. Совершенно аналогично докажем, что произвольное решение $(x_i)_{i=1}^n \in X_f(a, S_1)$, проходящее через множество M_α, удовлетворяет условию

$$(x_i(b))_{i=1}^n \in M_\alpha(b).$$

В силу леммы 7.1 множество

$$S_{10} = \{(x_i(b))_{i=1}^n : (x_i)_{i=1}^n \in X_f(a, S_1)\}$$

является континуумом. С другой стороны, согласно условию а) и установленному выше свойству решений, проходящих через множества M_α и M^β, имеем

$$S_{10}\cap M_\alpha(b)\neq\varnothing,\quad S_{10}\cap M^\beta(b)\neq\varnothing.$$

Отсюда ввиду условия г) вытекает, что

$$S_{10}\cap S_2\neq\varnothing.$$

Следовательно, задача (7.1), (7.2) разрешима. Остается лишь отметить, что ввиду наложенного на множество S_2 ограничения в) произвольное решение рассматриваемой задачи удовлетворяет условию (7.3).

Лемма 7.3. Пусть $S\subset\mathbf{R}^n$ — непустое, ограниченное, замкнутое множество, $M\subset[a, b]\times\mathbf{R}^n$ и множество

$$M(t)=\{(x_i)_{i=1}^n\in\mathbf{R}^n:(t, x_1, \ldots, x_n)\in M\}$$

открыто при любом $t\in[a, b]$. Пусть, кроме того, $X_f(a, S)$ не содержит сингулярного решения, не проходящего через M. Тогда найдется такое положительное число r, что для любых $(x_i)_{i=1}^n\in X_f(a, S)$ и $b_0\in]a, b]$ справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^n|x_i(t)|<r \text{ при } a\leqslant t\leqslant b_0, \tag{7.12}$$

если только

$$(x_i(t))_{i=1}^n\notin M(t) \text{ при } a\leqslant t\leqslant b_0. \tag{7.13}$$

Доказательство. Пусть

$$r_0=\max\left\{\sum_{i=1}^n|x_i|:(x_i)_{i=1}^n\in S\right\}$$

и

$$f^*(t, r)=\max\left\{\sum_{i=1}^n|f_i(t, x_1, \ldots, x_n)|:\sum_{i=1}^n|x_i|\leqslant r\right\}.$$

Выберем $a_0\in]a, b]$ таким образом, чтобы

$$\int_a^{a_0} f^*(t, r_0+1)\,dt<1. \tag{7.14}$$

Любое решение $(x_i)_{i=1}^n\in X_f(a, S)$ на своем промежутке определения допускает оценку

$$\sum_{i=1}^n|x_i(t)|\leqslant r_0+\int_a^t f^*\left(\tau, \sum_{i=1}^n|x_i(\tau)|\right)d\tau.$$

Отсюда ввиду (7.14) следует, что промежуток определения $(x_i)_{i=1}^n$ содержит $[a, a_0]$ и

$$\sum_{i=1}^n|x_i(t)|<r_0+1 \text{ при } a\leqslant t\leqslant a_0.$$

Предположим теперь, что лемма неверна. Тогда согласно выбору a_0 для каждого натурального m найдутся $b_m \in]a_0, b]$ и $(x_{im})_{i=1}^n \in X_f(a, S)$ такие, что

$$(x_{im}(t))_{i=1}^n \notin M(t) \text{ при } a \leqslant t \leqslant b_m, \tag{7.15}$$

$$\sum_{i=1}^n |x_{im}(t)| < r_0 + 1 \text{ при } a \leqslant t \leqslant a_0, \quad \sum_{i=1}^n |x_{im}(b_m)| > m. \tag{7.16}$$

Пусть

$$\bar{x}_{im}(t) = \begin{cases} x_{im}(t) \text{ при } a \leqslant t < b_m \\ x_{im}(b_m) \text{ при } b_m \leqslant t \leqslant b, \end{cases}$$

$$y(t) = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |x_{im}(\tau)| : a \leqslant \tau \leqslant t, \ m \geqslant 1\right\}$$

и

$$t^* = \sup\{t \in [a, b[: y(t) < +\infty\}.$$

Ввиду (7.16)

$$a_0 \leqslant t^* \leqslant \liminf_{m\to+\infty} b_m$$

и

$$\limsup_{m\to+\infty} \sum_{i=1}^n |\bar{x}_{im}(t^*)| = +\infty. \tag{7.17}$$

Из определения t^* непосредственно вытекает равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность последовательности $(\bar{x}_{im})_{i=1}^n (m = 1, 2, \ldots)$ на каждом сегменте, содержащемся в $[a, t^*[$. Не ограничивая общности эту последовательность можно считать равномерно сходящейся на каждом таком сегменте. Легко видеть, что вектор-функция

$$(x_i(t))_{i=1}^n = \lim_{m\to+\infty} (x_{im}(t))_{i=1}^n \text{ при } a \leqslant t < t^*$$

является решением дифференциальной системы (7.1), причем ввиду замкнутости S

$$(x_i)_{i=1}^n \in X_f(a, S).$$

С другой стороны, из (7.15) имеем

$$(x_i(t))_{i=1}^n \notin M(t) \text{ при } a \leqslant t < t^*,$$

так как $M(t)$ открыто при любом $t \in [a, b]$. Отсюда ясно, что

$$r^* = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |x_i(t)| : a \leqslant t < t^*\right\} < +\infty,$$

ибо $X_f(a, S)$ не содержит сингулярного решения, не проходящего через M.

Пусть $t_*\in]a_0, t^*[$ и натуральное число m_0 таковы, что

$$\int_{t_*}^{t^*} f^*(t, r^*+2)\,dt < 1$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} |\overline{x}_{im}(t_*)| < r^*+1 \text{ при } m > m_0.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} |\overline{x}_{im}(t)| < r^*+2 \text{ при } t_* \leqslant t \leqslant t^* \quad (m = m_0+1, \ldots).$$

Но эта оценка противоречит условию (7.17). Лемма доказана.

7.3. Доказательство теоремы существования. Согласно лемме 7.3 найдется положительное число r такое, что для любых $(x_i)_{i=1}^n \in X_f(a, S)$ и $b_0\in]a, b]$ справедлива оценка (7.12), если только

$$(x_i(t))_{i=1}^n \notin M_\alpha(t) \cup M^\beta(t) \text{ при } a \leqslant t \leqslant b_0. \tag{7.18}$$

Не ограничивая общности будем считать, что

$$r > \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i| : (x_i)_{i=1}^n \in S_1\right\} \tag{7.19}$$

и

$$r > \max\left\{\sum_{i=1}^{n} (|\alpha_i(t)| + |\beta_i(t)|) : a \leqslant t \leqslant b\right\}. \tag{7.20}$$

Пусть

$$\chi(u) = \begin{cases} u \text{ при } |u| \leqslant r \\ r \operatorname{sign} u \text{ при } |u| > r \end{cases},$$

$$\tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) = f_i(t, \chi(x_1), \ldots, \chi(x_n)) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{7.21}$$

и

$$\gamma_{1i}(t) = \min\{\alpha_i(t), \beta_i(t)\}, \quad \gamma_{2i}(t) = \max\{\alpha_i(t), \beta_i(t)\} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Положим

$$\varphi_i(t, u) = \begin{cases} \dfrac{u - \alpha_i(t)}{\beta_i(t) - \alpha_i(t)} \text{ при } \gamma_{1i}(t) \leqslant u \leqslant \gamma_{2i}(t) \\ \varphi_i(t, \gamma_{1i}(t)) \text{ при } u < \gamma_{1i}(t) \\ \varphi_i(t, \gamma_{2i}(t)) \text{ при } u > \gamma_{2i}(t) \end{cases},$$

$$\psi_i(t, u) = \begin{cases} \dfrac{\beta_i(t) - u}{\beta_i(t) - \alpha_i(t)} \text{ при } \gamma_{1i}(t) \leqslant u \leqslant \gamma_{2i}(t) \\ \psi_i(t, \gamma_{1i}(t)) \text{ при } u < \gamma_{1i}(t) \\ \psi_i(t, \gamma_{2i}(t)) \text{ при } u > \gamma_{2i}(t) \end{cases},$$

если $\alpha_i(t) \neq \beta_i(t)$ и

$$\varphi_i(t, u) = \psi_i(t, u) = \frac{1}{2},$$

если $\alpha_i(t) = \beta_i(t)$. Для любого натурального m введем функции

$$g_{im}(t, x_1, \ldots, x_n) = m \int_{x_i}^{x_i+\frac{1}{m}} \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, u, x_{i+1}, \ldots, x_n)\, du,$$

$$\begin{aligned} f_{im}(t, x_1, \ldots, x_n) &= g_{im}(t, x_1, \ldots, x_n) + \\ &+ [\tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \beta_i(t), x_{i+1}, \ldots, x_n) - \\ &- g_{im}(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \beta_i(t), x_{i+1}, \ldots, x_n)]\, \varphi_i(t, x_i) + \\ &+ [\tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha_i(t), x_{i+1}, \ldots, x_n) - \\ &- g_{im}(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha_i(t), x_{i+1}, \ldots, x_n)]\, \psi_i(t, x_i) \end{aligned}$$

и рассмотрим дифференциальную систему

$$\frac{dx_i}{dt} = f_{im}(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{7.22}$$

Ясно, что функции $\dfrac{\partial f_{im}(t, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ принадлежат классу $K([a, b] \times \mathbf{R}^n; \mathbf{R})$,

$$\begin{aligned} f_{im}(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha_i(t), x_{i+1}, \ldots, x_n) &\equiv \\ \equiv \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha_i(t), x_{i+1}, \ldots, x_n) & \quad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{7.23}$$

и

$$\begin{aligned} f_{im}(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \beta_i(t), x_{i+1}, \ldots, x_n) &\equiv \\ \equiv \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \beta_i(t), x_{i+1}, \ldots, x_n) & \quad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{7.24}$$

Кроме того, на $[a, b] \times R^n$ соблюдаются условия

$$\lim_{m \to +\infty} f_{im}(t, x_1, \ldots, x_n) = \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{7.25}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} |f_{im}(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant q(t) \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{7.26}$$

где

$$q(t) = 3 \max \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f_i(t, x_1, \ldots, x_n)| : |x_1| \leqslant r, \ldots, |x_n| \leqslant r \right\}.$$

Ввиду (7.20) и (7.21) из равенств (7.23) и (7.24) следует, что α и β являются нижней и верхней вектор-функциями дифференциальной системы (7.22). Поэтому согласно лемме 7.2 задача

(7.22), (7.2) имеет решение $(x_{im})_{i=1}^n$ такое, что

$$(x_{im}(t))_{i=1}^n \notin M_\alpha(t) \cup M^\beta(t) \text{ при } a \leqslant t \leqslant b. \tag{7.27}$$

Ограниченность множества S_1 и неравенства (7.26) гарантируют равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность последовательности $(x_{im})_{i=1}^n$ $(m=1, 2, \ldots)$, так что без ограничения общности эту последовательность можно считать равномерно сходящейся. Ввиду (7.25), (7.26) и замкнутости множеств S_j $(j=1, 2)$ вектор-функция

$$(x_i(t))_{i=1}^n = \lim_{m\to+\infty} (x_{im}(t))_{i=1}^n$$

является решением дифференциальной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i=1, \ldots, n)$$

при краевых условиях (7.2). С другой стороны, из (7.27) ясно, что $(x_i)_{i=1}^n$ удовлетворяет и условию (7.3).

Нам остается лишь показать, что $(x_i)_{i=1}^n$ является решением системы (7.1). Согласно (7.21) для этого достаточно установить, что

$$\sum_{i=1}^n |x_i(t)| < r \text{ при } a \leqslant t \leqslant b.$$

Допустим противное. Тогда ввиду (7.2) и (7.19) найдется $b_0 \in]a, b]$ такое, что

$$\sum_{i=1}^n |x_i(t)| < r \text{ при } a \leqslant t < b_0, \quad \sum_{i=1}^n |x_i(b_0)| = r.$$

Согласно (7.21) сужение $(x_i)_{i=1}^n$ на $[a, b_0]$ является решением системы (7.1). Однако $(x_i)_{i=1}^n$ удовлетворяет и условию (7.18). Поэтому в силу выбора r справедлива оценка (7.12). Получили противоречие, что и доказывает теорему.

7.4. Следствия теоремы существования. Рассмотрим случай, когда краевые условия (7.2) имеют вид

$$x_i(a) = \varphi_i(x_n(a)) \quad (i=1, \ldots, n-1), \quad \varphi(x_1(b), \ldots, x_n(b)) = 0, \tag{7.28}$$

где

$$\varphi_i \in C(\mathbf{R}; \mathbf{R}) \quad (i=1, \ldots, n-1), \quad \varphi \in C(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}). \tag{7.29}$$

Следствие 7.1. Пусть существуют нижняя $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^n$ и верхняя $\beta = (\beta_i)_{i=1}^n$ вектор-функции дифференциальной системы (7.1) и положительное число r такие, что

$$\varphi_i(u) \leqslant \alpha_i(a) \text{ при } u \leqslant -r,$$
$$\varphi_i(u) \geqslant \beta_i(a) \text{ при } u \geqslant r \quad (i=1, \ldots, n-1) \tag{7.30}$$

и

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \neq 0 \text{ при } (x_i)_{i=1}^n \in M_\alpha(b) \cup M^\beta(b). \qquad (7.31)$$

Пусть, кроме того, система (7.1) при начальных условиях

$$x_i(a) = \varphi_i(x_n(a)) \quad (i = 1, \ldots, n-1) \qquad (7.32)$$

не обладает не проходящим через $M_\alpha \cup M^\beta$ сингулярным решением. Тогда задача (7.1), (7.28) имеет решение $(x_i)_{i=1}^n$, удовлетворяющее условию (7.3).

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что

$$r > \max\{|\alpha_n(a)|, |\beta_n(a)|\}.$$

Положим

$$\tilde{\varphi}_i(u) = \begin{cases} \varphi_i(u) \text{ при } -r \leqslant u \leqslant r \\ \varphi_i(r) + 1 - \frac{r}{u} \text{ при } u > r \quad (i = 1, \ldots, n-1), \\ \varphi_i(-r) - 1 - \frac{r}{u} \text{ при } u < -r \end{cases} \qquad (7.33)$$

$$S_1 = \{(x_i)_{i=1}^n \in \mathbf{R}^n : x_i = \tilde{\varphi}_i(x_n) \ (i = 1, \ldots, n-1)\}$$

и

$$S_2 = \{(x_i)_{i=1}^n \in \mathbf{R}^n : \varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0\}.$$

Ввиду (7.29)—(7.31) S_1 и S_2 соответственно являются ограниченным континуумом и замкнутым множеством, для которых выполнены условия а) — г) теоремы 7.1. Поэтому задача (7.1), (7.2) имеет решение $(x_i)_{i=1}^n$, удовлетворяющее условию (7.3). Из (7.3), (7.30) и (7.33) вытекает, что $x_n(a) \in [-r, r]$. Следовательно, $(x_i)_{i=1}^n$ удовлетворяет краевым условиям (7.28). Следствие доказано.

Следствие 7.2. Пусть существуют положительные числа r_k $(k = 1, \ldots, n)$ и функция $q \in L([a, b]; \mathbf{R}_+)$ такие, что

$$\varphi_i(u) \operatorname{sign} u \geqslant r_i \quad (i = 1, \ldots, n-1) \text{ при } |u| \geqslant r_n, \qquad (7.34)$$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \neq 0 \text{ при } x_k \operatorname{sign} x_1 > r_k \quad (k = 1, \ldots, n), \qquad (7.35)$$

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} x_1 \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$
$$\text{при } a \leqslant t \leqslant b, \ x_k \operatorname{sign} x_1 > r_k \quad (k = 1, \ldots, n) \qquad (7.36)$$

и на $[a, b] \times \mathbf{R}^n$ соблюдается неравенство

$$\sum_{i=1}^n f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} x_i \leqslant q(t) \left(1 + \sum_{i=1}^n |x_i|\right). \qquad (7.37)$$

Тогда задача (7.1), (7.28) разрешима.

Доказательство. Ввиду (7.34)—(7.36) $\alpha(t) \equiv (-r_i)_{i=1}^n$ и $\beta(t) \equiv (r_i)_{i=1}^n$ являются нижней и верхней вектор-функциями дифференциальной системы (7.1), для которых выполнены условия (7.30) и (7.31). С другой стороны, согласно (7.37) каждое решение системы (7.1), удовлетворяющее начальным условиям (7.32), не является сингулярным, поскольку на своем промежутке определения допускает оценку

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\mathring{x}_i(a)| \right) \exp \left(\int_a^t q(\tau)\, d\tau \right).$$

Следствие доказано.

Следствие 7.3. Пусть

$$\liminf_{|u| \to +\infty} \varphi_i(u) \operatorname{sign} u > r_0 \quad (i = 1, \ldots, n-1), \tag{7.38}$$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \neq 0 \text{ при } x_k \operatorname{sign} x_n > r_0 \ (k = 1, \ldots, n-1) \tag{7.39}$$

и на $[a, b] \times R^n$ соблюдаются неравенства

$$r_1 |x_{i+1}| \leqslant f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} x_{i+1} \leqslant r_2 |x_{i+1}| \tag{7.40}$$

$$(i = 1, \ldots, n-1),$$

$$f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} x_n \leqslant$$

$$\leqslant \left[h_0(t, x_1) + h_1(x_1) \sum_{i=2}^{n} (1 + |x_i|)^{\frac{1}{i-1}} \right] \sum_{i=2}^{n} (1 + |x_i|)^{\frac{n-1}{i-1}} \tag{7.41}$$

и

$$f_n(t, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \operatorname{sign} x_{n-1} \geqslant 0 \text{ при } |x_{n-1}| > r_0, \tag{7.42}$$

где r_i $(i = 0, 1, 2)$ — положительные постоянные, $h_0 \in K([a, b] \times \mathbf{R}; \mathbf{R}_+)$ и $h_1 \in C(\mathbf{R}; \mathbf{R}_+)$. Тогда задача (7.1), (7.28) разрешима.

Доказательство. Для упрощения доказательства мы дополнительно предположим, что f_n имеет частную производную $\dfrac{\partial f_n(t, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n}$, принадлежащую классу $K([a, b] \times \mathbf{R}^n; \mathbf{R})$. Тогда согласно (7.42)

$$f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} x_{n-1} \geqslant -h(t, x_1, \ldots, x_n) |x_n| \text{ при } |x_{n-1}| \geqslant r_0, \tag{7.43}$$

где $h \in K([a, b] \times \mathbf{R}^n; \mathbf{R}_+)$. Отметим, что от указанного ограничения легко можно освободиться с помощью техники, использованной при доказательстве теоремы 7.1. Положим $\beta_i(t) \equiv -\alpha_i(t) \equiv r_0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $\beta_n(t) \equiv \alpha_n(t) \equiv 0$. Тогда ввиду (7.40) и (7.42) $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^n$ является нижней, а $\beta = (\beta_i)_{i=1}^n$ — верхней вектор-функцией дифференциальной системы (7.1). Из (7.38) и (7.39) вытекают неравенства (7.30) и (7.31), где r — достаточно большое положительное число.

В силу следствия 7.1 разрешимость рассматриваемой задачи будет установлена, если мы покажем, что система (7.1) не имеет не проходящего через $M_\alpha \cup M^\beta$ сингулярного решения, удовлетворяющего начальным условиям (7.32). Допустим противное. Пусть существует не проходящее через $M_\alpha \cup M^\beta$ сингулярное решение $(x_i)_{i=1}^n$ системы (7.1), определенное в промежутке $[a, t^*[\subset [a, b[$. Тогда согласно (7.40)

$$\limsup_{t \to t^*} |x_n(t)| = +\infty, \tag{7.44}$$

при этом либо

$$\rho = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} |x_i(t)| : a \leqslant t < t^* \right\} < +\infty, \tag{7.45}$$

либо найдется точка $t_0 \in [a, t^*[$ такая, что

$$x_{n-1}(t_0) x_n(t_0) > 0, \quad |x_{n-1}(t_0)| > r_0. \tag{7.46}$$

Предположим сперва, что выполнено (7.45). Тогда из (7.41) имеем

$$|x_n(t)|' \leqslant [l_0(t) + l_1 |x_n(t)|] (1 + |x_n(t)|)$$
$$\text{при } a \leqslant t < t^*, \tag{7.47}$$

где $l_0 \in L([a, b]; R_+)$ и $l_1 \in R_+$. Ввиду (7.44) существуют точки $t_1 \in [a, t^*[$ и $t_2 \in]t_1, t^*[$ такие, что

$$x_n(t) x_n(t_1) > 0 \text{ при } t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \tag{7.48}$$

и

$$|x_n(t_2)| > \rho_1 (1 + |x_n(t_1)|), \tag{7.49}$$

где

$$\rho_1 = \exp\left[\int_a^b l_0(t)\, dt + \frac{2\rho}{r_1} l_1 \right].$$

В силу неравенств (7.40), (7.45) и (7.48)

$$\int_{t_1}^{t_2} |x_n(t)|\, dt \leqslant \frac{1}{r_1} \left| \int_{t_1}^{t_2} x'_{n-1}(t)\, dt \right| = \frac{1}{r_1} |x_{n-1}(t_2) - x_{n-1}(t_1)| \leqslant \frac{2\rho}{r_1}.$$

Поэтому из (7.47) находим

$$|x_n(t_2)| \leqslant \exp\left[\int_{t_1}^{t_2} l_0(t)\, dt + l_1 \int_{t_1}^{t_2} |x_n(t)|\, dt \right] (1 + |x_n(t_1)|) \leqslant$$
$$\leqslant \rho_1 (1 + |x_n(t_1)|),$$

что противоречит условию (7.49). Тем самым доказано, что неравенство (7.45) не может иметь места.

Остается рассмотреть случай, когда соблюдаются неравенства (7.46).

Согласно (7.40) и (7.43)

$$r_1 |x_{i+1}(t)| \leqslant x_i'(t) \operatorname{sign} x_{i+1}(t) \leqslant$$
$$\leqslant r_2 |x_{i+1}(t)| \text{ при } t_0 < t < t^* \quad (i = 1, \ldots, n-1) \tag{7.50}$$

и

$$x_n'(t)\operatorname{sign} x_{n-1}(t) \geqslant -g(t)\,|x_n(t)| \text{ при } t_0 < t < t^*,$$

где $g(t) = h(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Отсюда с учетом (7.46) находим

$$|x_n(t)| \geqslant \exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau\right)|x_n(t_0)| > 0 \text{ при } t_0 \leqslant t < t^*$$

и

$$x_n(t)\,x_{n-1}(t) > 0,\ |x_{n-1}(t)| > r_0,\ |x_{n-1}(t)|' > 0$$
$$\text{при } t_0 \leqslant t < t^*. \tag{7.51}$$

В силу (7.50) и (7.51) существует точка $t_1 \in [t_0, t^*[$ такая, что

$$x_i(t) \neq 0 \text{ при } t \in [t_1, t^*[\quad (i = 1, \ldots, n), \tag{7.52}$$

причем x_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ являются монотонными на $[t_1, t^*[$. Далее,

$$\lim_{t \to t^*} |x_1(t)| < +\infty. \tag{7.53}$$

В самом деле, в противном случае из (7.50) получили бы

$$\lim_{t \to t^*} x_i(t) \operatorname{sign} x_n(t) = +\infty \quad (i = 1, \ldots, n-1).$$

Но это невозможно, поскольку $(x_i)_{i=1}^n$ не проходит через $M_\alpha \cup M^\beta$.

Полагая

$$r_3 = 2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{1/2}, \quad \mu_0 = 1 + \max\{|x_1(t_1)|, \ldots, |x_n(t_1)|\}$$

и

$$\mu_i(t) = \mu_0 + \max\{|x_i(\tau)| : t_1 \leqslant \tau \leqslant t\} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

с учетом (7.50) и (7.52) получим

$$x_i^2(t) = x_i^2(t_1) + 2\int_{t_1}^{t} x_i(\tau)\,x_i'(\tau)\,d\tau \leqslant \mu_0^2 +$$
$$+ \frac{2r_2}{r_1}\left|\int_{t_1}^{t} x_{i-1}'(\tau)\,x_{i+1}(\tau)\,d\tau\right| \leqslant \mu_0^2 +$$
$$+ \frac{2r_2}{r_1}[\mu_{i+1}(t) - \mu_0]\,|x_{i-1}(t) - x_{i-1}(t_1)| \leqslant \mu_0^2 +$$
$$+ \frac{2r_2}{r_1}[\mu_{i+1}(t) - \mu_0]\,\mu_{i-1}(t) \leqslant \mu_0^2 - 2\mu_0\mu_{i-1}(t) + \frac{2r_2}{r_1}\mu_{i+1}(t)\,\mu_{i-1}(t) \leqslant$$
$$\leqslant -\mu_0^2 + \frac{1}{2} r_3^2 \mu_{i+1}(t)\,\mu_{i-1}(t) \text{ при } t_1 \leqslant t < t^* \quad (i = 2, \ldots, n-1)$$

и, следовательно,

$$\mu_i^2(t) \leqslant r_3^2 \mu_{i+1}(t)\,\mu_{i-1}(t) \text{ при } t_1 \leqslant t < t^* \quad (i = 2, \ldots, n-1).$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\mu_i(t) \leqslant r_3^{(i-1)(n-i)} [\mu_1(t)]^{\frac{n-i}{n-1}} [\mu_n(t)]^{\frac{i-1}{n-1}} \text{ при } t_1 \leqslant t < t^* \quad (i=1, \ldots, n-1).$$

Однако ввиду (7.53)

$$\mu_1(t^*-) < +\infty.$$

Поэтому

$$\mu_i(t) < r[\mu_n(t)]^{\frac{i-1}{n-1}} \text{ при } t_1 \leqslant t < t^* \quad (i=1, \ldots, n-1), \quad (7.54)$$

где $r = r_3^{n^2}\mu_1(t^*-)$.

Из (7.41) и (7.54) находим

$$\mu_n(t) \leqslant 2\mu_0 + \int_{t_1}^{t} \left[\lambda_0(\tau) + \lambda_1 \sum_{i=2}^{n} (1 + |x_i(\tau)|)^{\frac{1}{i-1}}\right] \mu_n(\tau)\, d\tau$$

$$\text{при } t_1 \leqslant t < t^*,$$

где

$$\lambda_0(t) = nr\max\{h_0(t, u) : |u| \leqslant r\}, \quad \lambda_1 = nr\max\{h_1(u) : |u| \leqslant r\}.$$

Отсюда в силу леммы Гроноулла — Беллмана [27, с. 49] вытекает оценка

$$\mu_n(t) \leqslant \eta_0 \exp\left[\lambda_1 \sum_{i=2}^{n} \int_{t_1}^{t} (1 + |x_i(\tau)|)^{\frac{1}{i-1}} d\tau\right] \text{ при } t_1 \leqslant t < t^*, \quad (7.55)$$

где $\eta_0 = 2\mu_0 \exp\left(\int_a^b \lambda_0(\tau)\, d\tau\right)$.

Ввиду неравенства Юнга

$$\lambda_1 (1 + |x_i(\tau)|)^{\frac{1}{i-1}} \leqslant \frac{1}{2}(t^* - \tau)^{-1} +$$

$$+ 2^{i-2}\lambda_1^{i-1}(t^* - \tau)^{i-2}(1 + |x_i(\tau)|) \text{ при } t_1 \leqslant \tau < t^*.$$

Поэтому

$$\lambda_1 \int_{t_1}^{t} (1 + |x_i(\tau)|)^{\frac{1}{i-1}} d\tau \leqslant \frac{1}{2} \ln \frac{t^* - t}{t^* - t_1} + 2^n \lambda_1^{i-1}(b-a)^{i-1} +$$

$$+ 2^n \lambda_1^{i-1} \int_{t_1}^{t} (t^* - \tau)^{i-2} |x_i(\tau)|\, d\tau \text{ при } t_1 \leqslant t < t^* \quad (i=2, \ldots, n). \quad (7.56)$$

Согласно (7.50) и (7.52)

$$\int_{t_1}^{t^*} |x_2(\tau)|\, d\tau \leqslant r_2 \int_{t_1}^{t^*} |x_1'(\tau)|\, d\tau \leqslant r_2\mu_1(t^*-) < +\infty,$$

$$\sup\{(t^* - t)|x_2(t)| : t_1 \leqslant t < t^*\} < +\infty$$

и

$$\int_{t_1}^{t}(t^*-\tau)^{i-2}|x_i(\tau)|\,d\tau\leqslant r_2\left|\int_{t_1}^{t}(t^*-\tau)^{i-2}x'_{i-1}(\tau)\,d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant r_2(t^*-t)^{i-2}|x_{i-1}(t)|+r_2(t^*-t_1)^{i-2}|x_{i-1}(t_1)|+$$

$$+(i-2)\,r_2\int_{t_1}^{t}(t^*-\tau)^{i-3}|x_{i-1}(\tau)|\,d\tau \text{ при } t_1\leqslant t<t^* \quad (i=3,\ldots,n).$$

Применяя теперь индукцию, убедимся, что

$$\int_{t_1}^{t^*}(t^*-\tau)^{i-2}|x_i(\tau)|\,d\tau<+\infty \quad (i=2,\ldots,n).$$

Из этих неравенств и оценок (7.54)—(7.56) следует существование такого числа $\eta\in]1,+\infty[$, что

$$\mu_i(t)\leqslant\eta\,(t^*-t)^{-\frac{i-1}{2}} \text{ при } t_1\leqslant t<t^* \quad (i=2,\ldots,n).$$

На основе полученных оценок из (7.55) находим

$$\mu_n(t)\leqslant\eta_0\exp\left[2n\lambda_1\eta\,(b-a)^{1/2}\right] \text{ при } t_1\leqslant t<t^*$$

и

$$\limsup_{t\to t^*}|x_n(t)|\leqslant\mu_n(t^*-)<+\infty,$$

что противоречит условию (7.44). Таким образом, система (7.1) не может иметь не проходящего через $M_\alpha\cup M^\beta$ сингулярного решения, удовлетворяющего начальным условиям (7.32). Следствие доказано.

В заключение задачу (7.1), (7.28) рассмотрим при $n=3$, т. е. когда она имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,x_2,x_3) \quad (i=1,2,3), \tag{7.57}$$

$$x_i(a)=\varphi_i(x_3(a)) \quad (i=1,2), \quad \varphi(x_1(b),x_2(b),x_3(b))=0. \tag{7.58}$$

Следствие 7.4. Пусть

$$\varphi_1(u)\,u\geqslant0, \quad \varphi_2(u)\operatorname{sign}u\geqslant r_0 \text{ при } |u|\geqslant r, \tag{7.59}$$

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)\neq0 \text{ при } x_1x_3>0, \quad x_2\operatorname{sign}x_3>r_0 \tag{7.60}$$

и на $[a,b]\times\mathbf{R}^3$ соблюдаются неравенства

$$0\leqslant f_1(t,x_1,x_2,x_3)\operatorname{sign}x_2\leqslant g_1(t,x_2)(1+|x_1|), \tag{7.61}$$

$$0\leqslant f_2(t,x_1,x_2,x_3)\operatorname{sign}x_3\leqslant g_2(t,x_1,x_3)(1+|x_2|), \tag{7.62}$$

$$0\leqslant f_3(t,x_1,x_2,x_3)\operatorname{sign}x_1\leqslant$$

$$\leqslant\left[h_1(t,x_1,x_2)+h_2(x_1,x_2)\sum_{i=1}^{2}|f_i(t,x_1,x_2,x_3)|\right](1+|x_3|) \tag{7.63}$$

и

$$\gamma f_2(t, x_1, x_2, x_3) x_2 - f_1(t, x_1, x_2, x_3) x_3 \leqslant f_3(t, x_1, x_2, x_3) x_1, \quad (7.64)$$

где $r_0 \geqslant 0$, $r > 0$, $\gamma > 0$, $g_1 \in K([a, b] \times R; R_+)$, g_2 и $h_1 \in K([a, b] \times \times R^2; R_+)$, $h_2 \in C(R^2, R_+)$. Тогда задача (7.57), (7.58) разрешима.

Доказательство. Пусть $\beta_2(t) \equiv -\alpha_2(t) \equiv r_0$, $\beta_i(t) \equiv \equiv \alpha_i(t) \equiv 0$ $(i=1, 3)$. Согласно (7.59)—(7.63) $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^3$ и $\beta = (\beta_i)_{i=1}^3$ являются нижней и верхней вектор-функциями дифференциальной системы (7.57), для которых выполнены условия (7.30) и (7.31) при $n=3$.

Если система (7.57) с начальными условиями

$$x_i(a) = \varphi_i(x_3(a)) \quad (i=1, 2)$$

не имеет сингулярного решения, то в силу следствия 7.1 задача (7.57), (7.58) является разрешимой.

Нам остается рассмотреть случай, когда система (7.57) имеет сингулярное решение $(x_i)_{i=1}^3$, определенное в промежутке $[a, t^*[\subset [a, b[$, причем для доказательства следствия достаточно установить, что $(x_i)_{i=1}^3$ проходит через $M_\alpha \cup M^\beta$. Покажем прежде всего, что

$$\limsup_{t \to t^*} |x_2(t)| = +\infty. \quad (7.65)$$

Допустим противное. Пусть

$$\rho_2 = \sup\{|x_2(t)|: a \leqslant t < t^*\} < +\infty.$$

Тогда из (7.61) находим

$$\rho_1 = \sup\{|x_1(t)|: a \leqslant t < t^*\} \leqslant$$

$$\leqslant (1 + |x_1(a)|) \exp\left[\int_a^{t^*} g_1(t, x_2(t))\, dt\right] < +\infty.$$

Ввиду ограниченности x_1 и x_2

$$\lim_{t \to t^*} |x_3(t)| = +\infty. \quad (7.66)$$

В силу этого обстоятельства из неравенств (7.61)—(7.63) вытекает существование точки $t_0 \in [a, t^*[$ такой, что

$$x_3(t) \neq 0, \quad x_i(t) \neq 0, \quad x_i'(t)\, x_{i+1}(t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t < t^* \quad (i=1, 2)$$

и

$$|x_3(t)|' \leqslant \left[\lambda_0(t) + \lambda_1 \sum_{i=1}^{2} |x_i'(t)|\right](1 + |x_3(t)|) \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t < t^*,$$

где $\lambda_0 = h_1(\cdot, x_1(\cdot), x_2(\cdot)) \in L([a, t^*]; R_+)$ и $\lambda_1 = \sup\{h_2(x_1(t), x_2(t)):$

$a \leqslant t < t^*\} < +\infty$. Поэтому

$$|x_3(t)| \leqslant (1+|x_3(t_0)|)\exp\left[\int_{t_0}^{t}\lambda_0(\tau)\,d\tau+\lambda_1\sum_{i=1}^{2}\left|\int_{t_0}^{t}x_i'(\tau)\,d\tau\right|\right] \leqslant$$

$$\leqslant (1+|x_3(t_0)|)\exp\left[\int_{t_0}^{t^*}\lambda_0(\tau)\,d\tau+\lambda_1(\rho_1+\rho_2)\right] \text{ при } a \leqslant t < t^*,$$

что противоречит условию (7.66). Тем самым справедливость равенства (7.65) доказана.

Согласно (7.64)

$$[\gamma x_2^2(t)-2x_1(t)x_3(t)]' \leqslant 0 \text{ при } a \leqslant t < t^*.$$

Поэтому

$$\gamma x_2^2(t) \leqslant c_0+2x_1(t)x_3(t) \text{ при } a \leqslant t < t^*, \tag{7.67}$$

где $c_0=\gamma x_2^2(t_0)-2x_1(t_0)x_3(t_0)$.

Покажем, что x_2 отлична от нуля в некоторой левой окрестности t^*. В самом деле, если это было бы не так, то согласно (7.62) и (7.65) нашлась бы сходящаяся к t^* последовательность $t_k \in]a, t^*[$ $(k=1, 2, \ldots)$, для которой

$$x_3(t_k)=0 \ (k=1, 2, \ldots), \ \lim_{k\to+\infty}|x_2(t_k)|=+\infty.$$

Но это противоречит неравенству (7.67).

В силу условий (7.61)—(7.63) и знакопостоянства x_2 в левой окрестности t^* существует точка $t_0 \in [a, t^*[$ такая, что

$$x_i(t) \neq 0 \ (i=1, 2, 3), \ x_2'(t)x_3(t) \geqslant 0 \text{ при } t_0 \leqslant t < t^*.$$

С учетом этих неравенств из (7.65) и (7.67) находим

$$\lim_{t\to t^*}[x_2(t)\operatorname{sign}x_3(t)]=+\infty, \quad \lim_{t\to t^*}[x_1(t)x_3(t)]=+\infty.$$

Отсюда ясно, что $(x_i)_{i=1}^3$ проходит через множество $M_\alpha \cup M^\beta$. Следствие доказано.

7.5. Теорема единственности.

Теорема 7.2. Пусть для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ функция f_i имеет частные производные $f'_{ij}(t, x_1 \ldots, x_n)=\dfrac{\partial f_i(t, x_k, \ldots, x_n)}{\partial x_j}$ $(j=1, \ldots, n)$, причем

$$f'_{ii} \in K([a, b]\times \mathrm{R}^n; \mathrm{R}) \text{ и } f'_{ij} \in K([a, b]\times \mathrm{R}^n; \mathrm{R}_+)$$
$$(j \neq i, \ j=1, \ldots, n). \tag{7.68}$$

Пусть, кроме того, функции φ_i $(i=1, \ldots, n-1)$ являются возрастающими, а функция φ удовлетворяет условию

$$\varphi(y_1, \ldots, y_n) > \varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ при } y_i > x_i \ (i=1, \ldots, n). \tag{7.69}$$

Тогда задача (7.1), (7.28) имеет не более одного решения.

Доказательство. Допустим противное. Пусть задача (7.1), (7.28) имеет два различных решения $(x_i)_{i=1}^n$ и $(y_i)_{i=1}^n$. Тогда

$$y_n(a) \neq x_n(a),$$

ибо в противном случае имели бы $x_i(a)=y_i(a)$ $(i=1,\ldots,n)$, что невозможно ввиду однозначной разрешимости задачи Коши для системы (7.1).

Для определенности будем считать, что

$$y_n(a) > x_n(a).$$

Тогда

$$y_i(a)=\varphi_i(y_n(a)) > \varphi_i(x_n(a))=x_i(a) \quad (i=1,\ldots,n-1),$$

так как φ_i $(i=1,\ldots,n-1)$ — возрастающие функции. Следовательно, в некоторой правой окрестности a соблюдаются неравенства

$$y_i(t) > x_i(t) \quad (i=1,\ldots,n). \tag{7.70}$$

С другой стороны, ввиду (7.69) эти неравенства не могут быть выполнены на всем отрезке $[a,b]$. Поэтому найдутся $k\in\{1,\ldots,n\}$ и $t_0\in]a,b]$ такие, что (7.70) имеют место на $[a,t_0[$ и

$$u(t_0)=0, \tag{7.71}$$

где $u(t)=y_k(t)-x_k(t)$. Согласно (7.68) и (7.70)

$$u'(t)=f_k(t,y_1(t),\ldots,y_n(t))-f_k(t,x_1(t),\ldots,x_n(t)) \geqslant$$
$$\geqslant f_k(t,x_1(t),\ldots,x_{k-1}(t),\, y_k(t),\, x_{k+1}(t),\ldots,x_n(t))-$$
$$-f_k(t,x_1(t),\ldots,x_n(t)) \geqslant g(t)u(t) \text{ при } a<t<t_0,$$

где $g\in L([a,t_0];R)$. Отсюда находим

$$u(t_0) \geqslant u(a)\exp\left[\int_a^{t_0} g(\tau)\,d\tau\right] > 0,$$

что противоречит равенству (7.71). Полученное противоречие доказывает теорему.

§ 8. ДВУМЕРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

8.1. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальную систему

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,x_2) \quad (i=1,2) \tag{8.1}$$

с краевыми условиями

$$(x_1(a),\ x_2(a))\in S_1, \quad (x_1(b),\ x_2(b))\in S_2, \tag{8.2}$$

где

$$f_i\in K([a,b]\times\mathbf{R}^2;\ \mathbf{R}) \quad (i=1,2),$$

а $S_i\subset R^2$ $(i=1,2)$ — континуумы.

Пусть S_{i1} и S_{i2} — проекции множества S_i соответственно на оси Ox_1 и Ox_2. Нас будет интересовать случай, когда соблюдается одно из следующих трех условий

$$\inf S_{i2} = -\infty, \ \sup S_{i2} = +\infty \quad (i=1,2), \tag{8.3}$$

$$S_{12} \text{ ограничено, } \inf S_{ii} = -\infty, \ \sup S_{ii} = +\infty \quad (i=1,2), \tag{8.4}$$

$$S_{12} \text{ и } S_{22} \text{ ограничены, } \inf S_{i1} = -\infty, \ \sup S_{i1} = +\infty \quad (i=1,\ 2). \tag{8.5}$$

Для дальнейшего удобно ввести следующие определения.

Определение 8.1. Скажем, что вектор-функция $(\gamma_1, \gamma_2) \in \in \widetilde{C}([a, b]; \mathbf{R}^2)$ принадлежит множеству $A^*(f_1, f_2)$ (множеству $A_*(f_1, f_2)$), если существует множество меры нуль I_0 такое, что при всех $t \in [a, b] \setminus I_0$ и $x_2 \in R$ соблюдаются неравенства

$$[f_1(t, \gamma_1(t), x_2) - \gamma_1'(t)][x_2 - \gamma_2(t)] \geqslant 0$$

и

$$f_2(t, \gamma_1(t), \gamma_2(t)) \geqslant \gamma_2'(t) \quad (f_2(t, \gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leqslant \gamma_2'(t)).$$

Определение 8.2. $\omega \in C(\mathbf{R};\ ]0, +\infty[)$ называется функцией Нагумо, если

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{ds}{\omega(s)} = \int_{0}^{+\infty} \frac{ds}{\omega(s)} = +\infty. \tag{8.6}$$

8.2. Леммы об априорных оценках.

Лемма 8.1. Пусть $r_1 \in \mathbf{R}_+$, $r_2 \in]r_1, +\infty[$, $I \subset \mathbf{R}$ — интервал, $h_0 \in L([a, b]; \mathbf{R}_+)$, $h_1 \in L(I; \mathbf{R}_+)$, $\omega \in C(\mathbf{R};]0, +\infty[)$ и

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{\omega(s)} > \| h_0 \|_L + \| h_1 \|_L, \qquad \int_{-r_2}^{-r_1} \frac{ds}{\omega(s)} < \| h_0 \|_L + \| h_1 \|_L. \tag{8.7}$$

Тогда для любых $t_1 \in [a, b[$, $t_2 \in]t_1, b]$ и $t_0 \in [t_1, t_2]$ произвольная вектор-функция $(x_1, x_2) \in \widetilde{C}([t_1, t_2]; I \times R)$, удовлетворяющая системе дифференциальных неравенств

$$x_1'(t) x_2(t) \geqslant 0, \ x_2'(t) \operatorname{sign}[(t - t_0) x_2(t)] \leqslant$$

$$\leqslant [h_0(t) + h_1(x_1(t)) |x_1'(t)|] \omega(x_2(t)) \text{ при } t_1 < t < t_2 \tag{8.8}$$

и условию

$$|x_2(t_0)| \leqslant r_1, \tag{8.9}$$

допускает оценку

$$|x_2(t)| < r_2 \text{ при } t_1 \leqslant t \leqslant t_2. \tag{8.10}$$

Доказательство. Докажем сперва, что если $t_0 < t_2$ то

$$|x_2(t)| < r_2 \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant t_2. \tag{8.11}$$

Допустим противное. Тогда ввиду (8.9) найдутся числа $s_1 \in$

$\in[t_0, t_2[$, $s_2\in t]s_1, t_2]$ и $\sigma\in\{-1, 1\}$ такие, что

$$\sigma x_2(s_1)=r_1,\ \sigma x_2(t)>0 \text{ при } s_1<t<s_2,\ \sigma x_2(s_2)=r_2.$$

Поэтому из (8.8) находим

$$\sigma\int_{\sigma r_1}^{\sigma r_2}\frac{du}{\omega(u)}=\int_{s_1}^{s_2}\frac{|x_2(t)|'}{\omega(x_2(t))}\,dt\leqslant\int_{t_0}^{t_1}h_0(t)\,dt+\left|\int_{x_1(s_1)}^{x_1(s_2)}h_1(u)\,du\right|\leqslant$$
$$\leqslant\|h_0\|_L+\|h_1\|_L,$$

что противоречит условию (8.7). Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (8.11). Аналогично покажем, что

$$|x_2(t)|<r_2 \text{ при } t_1\leqslant t\leqslant t_0.$$

Следовательно, имеет место оценка (8.10). Лемма доказана.

Лемма 8.2. Пусть $a\leqslant a_0<b_0\leqslant b$, $r_i\in\mathbf{R}_+$ $(i=0, 1)$, $I\subset\mathbf{R}$ — интервал, $h_0\in L([a, b]; \mathbf{R}_+)$, $h_1\in L(I; \mathbf{R}_+)$, ω — функция Нагумо, а $\delta\in K([a, b]\times\mathbf{R}_+; \mathbf{R}_+)$ — неубывающая по второму аргументу функция, причем

$$\int_{a_0}^{b_0}\delta(t, r_1)\,dt>r_0. \tag{8.12}$$

Тогда существует число $r_2\in]r_1, +\infty[$ такое, что любая вектор-функция $(x_1, x_2)\in\tilde{C}([a, b]; I\times R)$, удовлетворяющая системе дифференциальных неравенств

$$x_1'(t)\operatorname{sign}x_2(t)\geqslant\delta(t, |x_2(t)|) \text{ при } a<t<b, \tag{8.13}$$

$$x_2'(t)\operatorname{sign}x_2(t)\geqslant-[h_0(t)+h_1(x_1(t))|x_1'(t)|]\,\omega(x_2(t))$$
$$\text{при } a<t<b_0, \tag{8.14}$$

$$x_2'(t)\operatorname{sign}x_2(t)\leqslant[h_0(t)+h_1(x_1(t))|x_1'(t)|]\,\omega(x_2(t))$$
$$\text{при } a_0<t<b \tag{8.15}$$

и условию

$$|x_1(b_0)-x_1(a_0)|\leqslant r_0, \tag{8.16}$$

допускает оценку

$$|x_2(t)|<r_2 \text{ при } a\leqslant t\leqslant b. \tag{8.17}$$

Доказательство. В силу (8.6) существует число $r_2\in]r_1, +\infty[$ такое, что соблюдаются неравенства (8.7).

Если предположить, что

$$|x_2(t)|\geqslant r_1 \text{ при } a_0\leqslant t\leqslant b_0,$$

то согласно (8.12) и (8.13) находим

$$|x_1(b_0)-x_1(a_0)|\geqslant\int_{a_0}^{b_0}\delta(t, r_1)\,dt>r_0.$$

Но это противоречит неравенству (8.16). Следовательно, для некоторой точки $t_0 \in [a_0, b_0]$ имеем

$$|x_2(t_0)| < r_1.$$

С другой стороны, из (8.13)—(8.15) вытекают неравенства (8.8), где $t_1 = a$ и $t_2 = b$. Поэтому в силу леммы 8.1 справедлива оценка (8.17). Лемма доказана.

Лемма 8.3. Пусть $r_1 \in \mathbf{R}_+$, $I \subset \mathbf{R}$ — интервал, $h_0 \in L([a, b]; \mathbf{R}_+)$, $h_1 \in L(I; \mathbf{R}_+)$, а ω — функция Нагумо. Тогда существует число $r_2 \in]r_1, +\infty[$ такое, что любая вектор—функция $(x_1, x_2) \in \tilde{C}([a, b]; I \times \mathbf{R})$, удовлетворяющая системе дифференциальных неравенств

$$x_1'(t) x_2(t) \geqslant 0, \ x_2'(t) \operatorname{sign} x_2(t) \leqslant$$
$$\leqslant [h_0(t) + h_1(x_1(t)) | x_1'(t)|] \omega(x_2(t)) \text{ при } a < t < b$$

и условию

$$|x_2(a)| \leqslant r_1,$$

допускает оценку (8.17).

Доказательство. Выберем число $r_2 \in]r_1, +\infty[$ таким образом, чтобы соблюдались неравенства (8.7).

Поскольку (x_1, x_2) удовлетворяет системе дифференциальных неравенств (8.8) и условию (8.9), где $t_1 = t_0 = a$ и $t_2 = b$, то в силу леммы 8.1 справедлива оценка (8.17).

Лемма 8.4. Пусть $c \in [a, b]$, $I \subset R$ — интервал, $h_0 \in L([a, b]; \mathbf{R}_+)$, $h_1 \in L(I; \mathbf{R}_+)$, а ω — функция Нагумо. Тогда существует число $r_2 \in]r_1, +\infty[$ такое, что любая вектор—функция $(x_1, x_2) \in \tilde{C}([a, b]; I \times \mathbf{R})$, удовлетворяющая системе дифференциальных неравенств

$$x_1'(t) x_2(t) \geqslant 0, \ x_2'(t) \operatorname{sign} [(t-c) x_2(t)] \leqslant$$
$$\leqslant [h_0(t) + h_1(x_1(t)) |x_1'(t)|] \ \omega(x_2(t)) \ \text{ при } a < t < b$$

и краевым условиям

$$|x_2(a)| \leqslant r_1, \ |x_2(b)| \leqslant r_1,$$

допускает оценку (8.17).

Доказательство. Пусть $r_2 \in]r_1, +\infty[$ выбрано таким образом, что выполнены неравенства (8.7). Тогда в силу леммы 8.1 справедлива оценка (8.17), ибо сужение вектор—функции (x_1, x_2) на отрезок $[a, c]$ (на отрезок $[c, b]$) удовлетворяет неравенствам (8.8) и (8.9), где $t_1 = t_0 = a$ и $t_2 = c$ ($t_1 = c$ и $t_0 = t_2 = b$).

8.3. Теоремы существования.

Теорема 8.1$_1$. Пусть выполнены условия (8.3) и существуют $(\alpha_1, \alpha_2) \in A_*(f_1, f_2)$ и $(\beta_1, \beta_2) \in A^*(f_1, f_2)$ такие, что

$$\alpha_1(t) \leqslant \beta_1(t) \text{ при } a \leqslant t \leqslant b, \tag{8.18}$$

$$\{(x_1, x_2) : x_1 < \alpha_1(a), \ x_2 > \alpha_2(a)\} \cap S_1 =$$

$$=\{(x_1,\ x_2):x_1>\beta_1(a),\ x_2<\beta_2(a)\}\cap S_1=\varnothing, \tag{8.19}$$

$$\{(x_1,\ x_2):x_1<\alpha_1(b),\ x_2<\alpha_2(b)\}\cap S_2=$$
$$=\{(x_1,\ x_2):x_1>\beta_1(b),\ x_2>\beta_2(z)\}\cap S_2=\varnothing. \tag{8.20}$$

Пусть, кроме того,

$$f_1(t,\ x_1,\ x_2)\operatorname{sign}x_2\geqslant\delta(t,\ |x_2|)\ \text{при}\ a<t<b,\ \alpha_1(t)\leqslant x_1\leqslant\beta_1(t),$$
$$x_2\in R, \tag{8.21}$$

$$f_2(t,\ x_1,\ x_2)\operatorname{sign}x_2\geqslant$$
$$\geqslant-[h_0(t)+h_1|f_1(t,\ x_1,\ x_2)|]\omega(x_2)\ \text{при}\ a<t<b_0,$$
$$\alpha_1(t)\leqslant x_1\leqslant\beta_1(t),\ x_2\in R \tag{8.22}$$

и

$$f_2(t,\ x_1,\ x_2)\operatorname{sign}x_2\leqslant[h_0(t)+h_1|f_1(t,\ x_1,\ x_2)|]\omega(x_2)\ \text{при}$$
$$a_0<t<b,\ \alpha_1(t)\leqslant x_1\leqslant\beta_1(t),\ x_2\in R, \tag{8.23}$$

где $a\leqslant a_0<b_0\leqslant b$, $h_0\in L([a,b];\ R_+)$, $h_1\in R_+$, ω — функция Нагумо, а $\delta\in K([a,\ b]\times R_+;\ R_+)$ — не убывающая по второму аргументу функция, причем

$$\lim_{\rho\to+\infty}\int_{a_0}^{b_0}\delta(t,\ \rho)\,dt=+\infty. \tag{8.24}$$

Тогда задача (8.1), (8.2) имеет решение $(x_1,\ x_2)$ такое, что

$$\alpha_1(t)\leqslant x_1(t)\leqslant\beta_1(t)\ \text{при}\ a\leqslant t\leqslant b. \tag{8.25}$$

Доказательство. Пусть

$$r_0=1+\|\alpha_1\|+\|\beta_1\|,\ I=]-r_0,\ r_0[,\ h_1(u)\equiv h_1.$$

Согласно (8.24) существует положительное число r_1, удовлетворяющее неравенству (8.12). Выберем $r_2\in]r_1,\ +\infty[$ таким образом, чтобы было верно заключение леммы 8.2.

Положим

$$\tilde f(t,\ x_1,\ x_2)=\begin{cases}f_1(t,\ \beta_1(t),\ x_2)\ \text{при}\ x_1>\beta_1(t),\\ f_1(t,\ x_1,\ x_2)\ \text{при}\ \alpha_1(t)\leqslant x_1\leqslant\beta_1(t),\\ f_1(t,\ \alpha_1(t),\ x_2)\ \text{при}\ x_1<\alpha_1(t),\end{cases} \tag{8.26}$$

$$r=r_2+\sum_{i=1}^{2}(\|\alpha_i\|_C+\|\beta_i\|_C),$$

$$\chi(s)=\begin{cases}1\ \text{при}\ 0\leqslant s\leqslant r,\\ 2-\frac{s}{r}\ \text{при}\ r<s<2r,\\ 0\ \text{при}\ s\geqslant 2r,\end{cases} \tag{8.27}$$

$$g(t,\ s)=s+\max\{|f_2(t,\ \beta_1(t),\ \beta_2(t))-f_2(t,\ \beta_1(t),\ u)|:$$

$$:|u-\beta_2(t)|\leqslant s\},\tag{8.28}$$

$$\tilde{f}_2(t,x_1,x_2)=$$
$$=\begin{cases}\chi(|x_2|)f_2(t,\beta_1(t),x_2)+g\left(t,\frac{x_1-\beta_1(t)}{1+x_1-\beta_1(t)}\right) & \text{при } x_1>\beta_1(t)\\ \chi(|x_2|)f_2(t,x_1,x_2) \text{ при } \alpha_1(t)\leqslant x_1\leqslant\beta_1(t), & \\ \chi(|x_2|)f_2(t,\alpha_1(t),x_2)-g\left(t,\frac{\alpha_1(t)-x_1}{1+\alpha_1(t)-x_1}\right) & \text{при } x_1<\alpha_1(t)\end{cases}\tag{8.29}$$

$$H_1=\{(-r,x_2):-r\leqslant x_2\leqslant\alpha_2(a)\}\cup\{(x_1,-r):-r\leqslant x_1\leqslant\beta_1(a)\},$$
$$H_2=\{(r,x_2):\beta_2(a)\leqslant x_2\leqslant r\}\cup\{(x_1,r):\alpha_1(a)\leqslant x_1\leqslant r\},$$
$$D=[-r,r]\times[-r,r],$$
$$\tilde{S}_1=(S_1\cap D)\bigcup_{i=1}^{2}H_i\tag{8.30}$$

и рассмотрим задачу

$$\frac{dx_i}{dt}=\tilde{f}_i(t,x_1,x_2)\quad(i=1,2),\tag{8.31}$$

$$(x_1(a),x_2(a))\in\tilde{S}_1,\quad(x_1(b),x_2(b))\in S_2.\tag{8.32}$$

Ввиду равенств (8.26) и (8.29) из условий $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in A_*(f_1,f_2)$ и $\beta=(\beta_1,\beta_2)\in A^*(f_1,f_2)$ следует, что α и β являются нижней[1] и верхней вектор—функциями дифференциальной системы (8.31). Сама же система (8.31) не имеет сингулярных решений.

Ввиду (8.3), (8.19) и (8.30) множество $\tilde{S}_1$ является ограниченным континуумом, причем

$$\tilde{S}_1\cap M_\alpha(a)\neq\varnothing,\quad\tilde{S}_1\cap M^\beta(a)\neq\varnothing.$$

С другой стороны, из (8.3) и (8.20) следует, что множество S_2 удовлетворяет условиям в) и г) теоремы 7.1. Согласно этой теореме задача (8.31), (8.32) имеет решение (x_1, x_2), удовлетворяющее условию

$$(x_1(t),x_2(t))\notin M_\alpha(t)\cup M^\beta(t)\text{ при }a\leqslant t\leqslant b.\tag{8.33}$$

Докажем, что

$$x_1(t)\leqslant\beta_1(t)\text{ при }a\leqslant t\leqslant b.\tag{8.34}$$

Допустим противное. Тогда найдется $t_0\in]a,b[$ такое, что

$$x_1(t_0)>\beta_1(t_0).$$

Обозначим через t_* точную нижнюю грань тех $t_1\in]a,t_0[$, для которых

$$x_1(t)>\beta_1(t)\text{ при }t_1\leqslant t\leqslant t_0.$$

Ввиду (8.33)

$$x_1(t)>\beta_1(t),\ x_2(t)\leqslant\beta_2(t)\text{ при }t_*<t\leqslant t_0.\tag{8.35}$$

[1] См. определения 7.1 и 8.1.

Поскольку $\beta \in A^*(f_1, f_2)$, из (8.26) и (8.35) находим

$$x_1'(t)-\beta_1'(t)=f_1(t, \beta_1(t), x_2(t))-\beta_1'(t)\leqslant 0 \text{ при } t_*<t<t_0$$

и

$$x_1(t_*)-\beta_1(t_*)\geqslant x_1(t_0)-\beta_1(t_0)>0.$$

Отсюда в силу определения t_* следует, что $t_*=a$. Таким образом,

$$x_1(a)>\beta_1(a), \ x_2(a)\leqslant\beta_2(a).$$

Однако согласно (8.19) и (8.30)

$$(x_1, x_2)\notin\tilde{S}_1 \text{ при } x_1>\beta_1(a), \ x_2<\beta_2(a).$$

Поэтому

$$x_2(a)=\beta_2(a). \tag{8.36}$$

Не ограничивая общности t_0 можно считать настолько близким к a что

$$|x_2(t)|<r, \quad |x_2(t)-\beta_2(t)|<\frac{x_1(t)-\beta_1(t)}{1+x_1(t)-\beta_1(t)} \text{ при } a\leqslant t\leqslant t_0.$$

С учетом этих неравенств из (8.27)—(8.29) получим

$$x_2'(t)-\beta_2'(t)=f_2(t, \beta_1(t), x_2(t))+g\left(t, \frac{x_1(t)-\beta_1(t)}{1+x_1(t)-\beta_1(t)}\right)-\beta_2'(t)\geqslant$$

$$\geqslant f_2(t, \beta_1(t), \beta_2(t))-\beta_2'(t)+\frac{x_1(t)-\beta_1(t)}{1+x_1(t)-\beta_1(t)}>0 \text{ при } a<t<t_0.$$

Но это невозможно ввиду (8.35) и (8.36). Тем самым справедливость оценки (8.34) доказана.

Аналогично докажем, что

$$x_1(t)\geqslant\alpha_1(t) \text{ при } a\leqslant t\leqslant b.$$

Следовательно, выполнено условие (8.25).

В силу (8.21)—(8.23) и (8.25)—(8.29) вектор—функция (x_1, x_2) удовлетворяет неравенствам (8.13)—(8.16). Поэтому согласно выбору r_2 имеем

$$|x_2(t)|<r_2\leqslant r \text{ при } a\leqslant t\leqslant b. \tag{8.37}$$

Ввиду оценок (8.25) и (8.37) из (8.26)—(8.31) вытекает, что (x_1, x_2) является решением задачи (8.1), (8.2). Теорема доказана.

Теорема 8.1_2. Пусть выполнены условия (8.3), множества S_{11} и S_{21} ограничены и на $[a, b]\times R^2$ соблюдаются неравенства

$$\delta(t, |x_2|)\leqslant f_1(t, x_1, x_2)\operatorname{sign}x_2\leqslant g(t, |x_2|)\,\omega_0(x_1) \tag{8.38}$$

и

$$|f_2(t, x_1, x_2)|\leqslant[h_0(t)+h_1(x_1)\,|f_1(t, x_1, x_2)|]\,\omega(x_2), \tag{8.39}$$

где $h_0\in L([a, b]; R_+)$, $h_1\in L(R; R_+)$, ω_0 и ω — функции Нагумо, g и $\delta\in K([a, b]\times R_+; R_+)$, причем δ не убывает по второму аргументу и

$$\lim_{\rho\to+\infty}\int_a^b \delta(t,\rho)\,dt=+\infty.$$

Тогда задача (8.1), (8.2) разрешима.

Доказательство. Пусть

$$a_0=a,\ b_0=b,\ I=R,$$

а r_0 и r_1 — такие, положительные числа, что

$$S_{i1}\subset\left]-\frac{r_0}{2},\ \frac{r_0}{2}\right[\quad (i=1,\ 2) \tag{8.40}$$

и выполнено неравенство (8.12). Не ограничивая общности можно считать, что

$$\delta(t,\rho)=\delta(t,r_1)\ \text{при}\ \rho>r_1 \tag{8.41}$$

и функция g не убывает по второму аргументу. Подберем $r_2\in]r_1,\ +\infty[$ таким образом, чтобы было верно заключение леммы 8.2, а $r_3\in]r_0,\ +\infty[$ возьмем настолько большим, чтобы

$$\int_{r_0}^{r_3}\frac{ds}{\omega_0(s)}>\int_a^b g(t,r_2)\,dt,\quad \int_{-r_3}^{-r_0}\frac{ds}{\omega_0(s)}>\int_a^b g(t,r_2)\,dt. \tag{8.42}$$

Пусть $r=r_2+r_3$,

а χ—функция, заданная равенством (8.27). Положим

$$\tilde f_1(t,x_1,x_2)=(1-\chi(|x_1|+|x_2|))\,\delta(t,|x_2|)\operatorname{sign}x_2+$$
$$+\chi(|x_1|+|x_2|)\,f_1(t,x_1,x_2), \tag{8.43}$$

$$\tilde f_2(t,x_1,x_2)=\chi(|x_1|+|x_2|)\,f_2(t,x_1,x_2) \tag{8.44}$$

и рассмотрим краевую задачу (8.31), (8.2).

Ввиду (8.38), (8.39) и (8.41) из (8.43) и (8.44) следует, что $\tilde f_1$ и $\tilde f_2$ на $[a,b]\times R^2$ удовлетворяют неравенствам

$$\delta(t,|x_2|)\leqslant\tilde f_1(t,x_1,x_2)\operatorname{sign}x_2\leqslant g(t,|x_2|)\,\omega_0(x_1), \tag{8.45}$$

$$|\tilde f_2(t,x_1,x_2)|\leqslant[h_0(t)+h_1(x_1)\,|\tilde f_1(t,x_1,x_2)|]\,\omega(x_2) \tag{8.46}$$

и

$$\sum_{i=1}^{2}|\tilde f_i(t,x_1,x_2)|\leqslant f^*(t), \tag{8.47}$$

где

$$f^*(t)=\max\left\{\sum_{i=1}^{2}|f_i(t,x_1,x_2)|:|x_1|+|x_2|\leqslant 2r\right\}.$$

Пусть $X(a,S_1)$ — множество всех решений системы (8.31), удовлетворяющих условию

$$(x_1(a),\ x_2(a))\in S_1.$$

Тогда в силу леммы 7.1 множество

$$S_{10}=\{(x_1(b),\ x_2(b)) : (x_1,\ x_2)\in X(a,\ S_1)\}$$

является континуумом.

Согласно (8.3) и (8.40) существуют

$$(x_{1k},\ x_{2k})\in X(a,\ S_1)\quad (k=1,\ 2)$$

такие, что

$$|x_{1k}(a)|<\frac{r_0}{2},\quad (-1)^k x_{2k}(a)>r+\int_a^b f^*(t)\,dt\quad (k=1,2).$$

С учетом неравенств (8.12), (8.45) и (8.47) находим

$$(-1)^k x_{2k}(t)\geqslant(-1)^k x_{2k}(a)-\int_a^t f^*(\tau)\,d\tau>r \text{ при } a\leqslant t\leqslant b\ (k=1,\ 2)$$

и

$$(-1)^k x_{1k}(b)\geqslant(-1)^k x_{1k}(a)+\int_a^b \delta(\tau,\ |x_2(\tau)|)\,d\tau\geqslant$$

$$\geqslant\int_a^b \delta(\tau,\ r_1)\,d\tau-|x_{1k}(a)|>\frac{r_0}{2}\quad (k=1,\ 2).$$

Следовательно, континуум S_{10} имеет как точку, расположенную левее полосы

$$D=\left\{(x_1,\ x_2)\in R^2: -\frac{r_0}{2}<x_1<\frac{r_0}{2},\ x_2\in R\right\},$$

так и точки, расположенные правее этой полосы. С другой стороны, ввиду (8.3) и (8.40)

$$S_2\subset D,\ \inf S_{22}=-\infty,\ \sup S_{22}=+\infty.$$

Поэтому

$$S_{10}\cap S_2\neq\varnothing,$$

т. е. задача (8.31), (8.2) разрешима.

Пусть (x_1,x_2) — произвольное решение задачи (8.31), (8.2). Покажем, что оно является и решением задачи (8.1), (8.2). В силу (8.43) и (8.44) для этого достаточно установить, что

$$|x_1(t)|+|x_2(t)|<r \text{ при } a\leqslant t\leqslant b. \tag{8.48}$$

Из (8.40), (8.45) и (8.46) ясно, что (x_1,x_2) удовлетворяет неравенствам (8.13)—(8.16). Поэтому ввиду выбора r_2 оно допускает оценку (8.17). Из (8.17), (8.40) и (8.45) имеем

$$|x_2(a)|<r_0,\ |x_2(t)|'\leqslant g(t,\ r_2)\,\omega_0(x_1(t)) \text{ при } a<t<b.$$

Отсюда с учетом (8.42) находим

$$|x_1(t)|<r_3 \text{ при } a\leqslant t\leqslant b.$$

Следовательно, справедлива оценка (8.48). Теорема доказана.

Приведенные ниже теоремы 8.2_k $(k=1,2)$ и 8.3 содержат признаки разрешимости задачи (8.1), (8.2) в случаях, когда множества S_i $(i=1,2)$ удовлетворяют условиям (8.4) и (8.5). Доказательства этих теорем мы опускаем, ибо они аналогичны доказательствам теорем 8.1_k $(k=1,2)$. Основная разница заключается в том, что вместо леммы 8.2 применяются леммы 8.3 и 8.4.

Теорема 8.2_1. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2)\in A_*(f_1, f_2)$, $(\beta_1, \beta_2)\in A^*(f_1, f_2)$ и выполнены условия (8.4) и (8.18)—(8.20). Пусть, кроме того, на множестве

$$\{(t, x_1, x_2) : a<t<b,\quad \alpha_1(t)\leqslant x_1\leqslant\alpha_2(t),\quad x_2\in R\} \tag{8.49}$$

соблюдаются неравенства

$$f_i(t, x_1, x_2)\operatorname{sign} x_2\geqslant 0 \tag{8.50}$$

и

$$f_2(t, x_1, x_2)\operatorname{sign} x_2\leqslant[h_0(t)+h_1|f_1(t, x_1, x_2)|]\omega(x_2), \tag{8.51}$$

где $h_0\in L([a, b];\ \mathbf{R}_+)$, $h_1\in\mathbf{R}_+$, а ω — функция Нагумо. Тогда задача (8.1), (8.2) имеет решение (x_1, x_2), удовлетворяющее условию (8.25).

Теорема 8.2_2. Пусть выполнены условия (8.4), множество S_{21} ограничено и на $[a, b]\times\mathbf{R}^2$ соблюдаются неравенства

$$0\leqslant f_1(t, x_2)\operatorname{sign} x_2\leqslant g(t, |x_2|)\omega_2(x_1) \tag{8.52}$$

и

$$f_2(t, x_1, x_2)\operatorname{sign} x_2\leqslant[h_0(t)+h_1(x_1)|f_1(t, x_1, x_2|]\omega(x_2), \tag{8.53}$$

где $g\in K([a, b]\times\mathbf{R}_+;\ \mathbf{R}_+)$, $h_0\in L([a, b];\ \mathbf{R}_+)$, $h_1\in L\ (\mathbf{R};\ \mathbf{R}_+)$, а ω_0 и ω — функции Нагумо. Тогда задача (8.1), (8.2) разрешима.

Теорема 8.3. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2)\in A_*(f_1, f_2)$, $(\beta_1, \beta_2)\in A^*(f_1, f_2)$ и выполнены условия (8.5) и (8.18)—(8.20). Пусть, кроме того, на множестве (8.49) соблюдаются неравенства (8.50) и

$$\begin{aligned} &f_2(t, x_1, x_2)\operatorname{sign}[(t-c)x_2]\leqslant\\ &\leqslant[h_0(t)+h_1|f_1(t, x_1, x_2)|]\omega(x_2), \end{aligned} \tag{8.54}$$

где $c\in[a, b]$, $h_0\in L([a, b];\ \mathbf{R}_+)$, $h_1\in\mathbf{R}_+$, а ω — функция Нагумо. Тогда задача (8.1), (8.2) имеет решение (x_1, x_2), удовлетворяющее условию (8.25).

В заключение этого пункта рассмотрим случай, когда краевые условия (8.2) имеют один из следующих трех видов

$$x_1(a)=\varphi_1(x_2(a)),\quad x_1(b)=\varphi_2(x_2(b)), \tag{8.55}$$

$$x_2(a)=\varphi_1(x_1(a)),\quad x_1(b)=\varphi_2(x_2(b)) \tag{8.56}$$

и

$$x_2(a)=\varphi_1(x_1(a)),\ x_2(b)=\varphi_2(x_1(b)). \qquad (8.57)$$

Из теорем 8.1_k, 8.2_k, $(k=1,2)$ и 8.3 непосредственно вытекают следующие предложения.

Следствие 8.1_1. Пусть $(\alpha_1,\alpha_2)\in A_*(f_1,f_2)$, $(\beta_1,\beta_2)\in A^*(f_1,f_2)$,

$$\begin{aligned} &\varphi_1(u)\geqslant\alpha_1(a) \text{ при } u>\alpha_2(a), \quad \varphi_1(u)\leqslant\beta_1(a) \text{ при } u<\beta_2(a),\\ &\varphi_2(u)\geqslant\alpha_1(b) \text{ при } u<\alpha_2(b), \quad \varphi_2(u)\leqslant\beta_1(b) \text{ при } u>\beta_2(b) \end{aligned} \qquad (8.58)$$

и выполнены неравенства (8.18) и (8.21)—(8.23), где $a\leqslant a_0<<b_0\leqslant b$, $h_0\in L([a,b];\ \mathbf{R}_+)$, $h_1\in\mathbf{R}_+$, ω — функция Нагумо, а $\delta\in\in K([a,b]\times\mathbf{R}_+;\ \mathbf{R}_+)$ — не убывающая по второму аргументу функция, удовлетворяющая условию (8.24). Тогда задача (8.1), (8.55) имеет решение (x_1,x_2), допускающее оценку (8.25).

Следствие 8.1_2. Пусть

$$\sup\{|\varphi_i(u)|:u\in\mathbf{R}\}<+\infty\quad (i=1,2) \qquad (8.59)$$

и на $[a,b]\times R^2$ соблюдаются неравенства (8.38) и (8.39), где $h_0\in L([a,b];\ R_+)$, $h_1\in L(R;\ R_+)$, ω_0 и ω — функции Нагумо, g и $\delta\in K([a,b]\times R_+;\ R_+)$, причем δ не убывает по второму аргументу и

$$\lim_{\rho\to+\infty}\int_a^b\delta(t,\rho)\,dt=+\infty.$$

Тогда задача (8.1), (8.55) разрешима.

Следствие 8.2_1. Пусть $(\alpha_1,\alpha_2)\in A_*(f_1,f_2)$, $(\beta_1,\beta_2)\in A^*(f_1,f_2)$,

$$\varphi_1[\alpha_1(a)]\leqslant\alpha_2(a),\ \varphi_1[\beta_1(a)]\geqslant\beta_2(a) \qquad (8.60)$$

и выполнены условия (8.18) и (8.58). Пусть, кроме того, на множестве (8.49) соблюдаются неравенства (8.50) и (8.51), где $h_0\in L([a,b];\ \mathbf{R}_+)$, $h_1\in\mathbf{R}_+$, а ω — функция Нагумо. Тогда задача (8.1), (8.56) имеет решение (x_1,x_2) —, удовлетворяющее условию (8.25).

Следствие 8.2_2. Пусть

$$\sup\{|\varphi_1(u)|:u\in\mathbf{R}\}|<+\infty$$

и на $[a,b]\times\mathbf{R}^2$ соблюдаются неравенства (8.52) и (8.53), где $g\in K([a,b]\times\mathbf{R}_+;\ \mathbf{R}_+)$, $h_0\in L([a,b];\ \mathbf{R}_+)$, $h_1\in L(\mathbf{R};\ \mathbf{R}_+)$, а ω_0 и ω — функции Нагумо. Тогда задача (8.1), (8.56) разрешима.

Следствие 8.3. Пусть $(\alpha_1,\alpha_2)\in A_*(f_1,f_2)$, $(\beta_1,\beta_2)\in A^*(f_1,f_2)$,

$$\varphi_2[\alpha_1(b)]\leqslant\alpha_2(b),\ \varphi_2[\beta_1(b)]\leqslant\beta_2(b)$$

и выполнены условия (8.18) и (8.60). Пусть, кроме того, на множестве (8.49) соблюдаются неравенства (8.50) и (8.54), где $c\in[a,b]$, $h_0\in L([a,b];\ \mathbf{R}_+)$, $h_1\in R_+$, а ω — функция Нагумо. Тогда задача (8.1), (8.57) имеет решение (x_1,x_2), удовлетворяющее условию (8.25).

8.4. Теоремы единственности.

Теорема 8.4. Пусть f_1 и f_2 имеют частные производные по фазовым переменным, принадлежащие классу $K([a, b]\times\mathbf{R}^2;\ \mathbf{R})$, причем существуют $\sigma\in\{-1, 1\}$ и множество положительной меры $I\subset[a, b]$ такие, что

$$\sigma\frac{\partial f_k(t, x_1, x_2)}{\partial x_{3-k}}\geqslant 0 \text{ при } a<t<b, \quad (x_1, x_2)\in\mathrm{R}^2 \ (k=1, 2) \tag{8.61}$$

и

$$\frac{\partial f_k(t, x_1, x_2)}{\partial x_{3-k}}\neq 0 \text{ при } t\in I, \quad (x_1, x_2)\in\mathrm{R}^2 \quad (k=1, 2). \tag{8.62}$$

Пусть, кроме того, для каждого $i\in\{1, 2\}$ произвольные точки (x_1, x_2) и (y_1, y_2) множества S_i удовлетворяют неравенству

$$(-1)^{i-1}\sigma(x_1-y_1)(x_2-y_2)\geqslant 0.$$

Тогда задача (8.1), (8.2) имеет не более одного решения.

Доказательство. Допустим, что задача (8.1), (8.2) имеет два различных решения (x_1, x_2) и (y_1, y_2). Тогда либо $x_1(a)\neq y_1(a)$, либо $x_2(a)\neq y_2(a)$. Для определенности будем считать, что

$$x_1(a)>y_1(a). \tag{8.63}$$

Положим

$$u_1(t)=x_1(t)-y_1(t),\ u_2(t)=\sigma[x_2(t)-y_2(t)].$$

Ввиду (8.61) и (8.62)

$$u_i'(t)=g_{i1}(t)u_1(t)+g_{i2}(t)u_2(t) \quad (i=1, 2), \tag{8.64}$$

где $g_{ik}\in L([a, b];\ \mathrm{R})$ $(i, k=1, 2)$ и

$$g_{k3-k}(t)\geqslant 0 \text{ при } a<t<b,\ g_{k3-k}(t)>0 \text{ при } t\in I \ (k=1, 2). \tag{8.65}$$

С другой стороны, согласно ограничениям, наложенным на S_i $(i=1, 2)$, и неравенству (8.63)

$$u_1(a)>0,\ u_2(a)\geqslant 0 \tag{8.66}$$

и

$$u_1(b)u_2(b)\leqslant 0. \tag{8.67}$$

В силу (8.65) и (8.66) из (8.64) вытекает, что

$$u_1(t)>0,\ u_2(t)\geqslant 0 \text{ при } a\leqslant t\leqslant b \text{ и } u_2(b)>0,$$

но это противоречит неравенству (8.67). Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие 8.4. Пусть f_1 и f_2 удовлетворяют условиям теоремы 8.4, а функции $(-1)^{i-1}\sigma\varphi_i$ $(i=1, 2)$ не убывают. Тогда каждая из задач (8.1), (8.55); (8.1), (8.56) и (8.1), (8.57) имеет не более одного решения.

Аналогично теореме 8.4 доказывается

Теорема 8.5. Пусть f_1 и f_2 имеют частные производные по фазовым переменным, принадлежащие классу $K([a, b]\times\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$, причем для некоторого $\sigma\in\{-1, 1\}$ соблюдается неравенство (8.61). Пусть, кроме того, существует $i\in\{1, 2\}$ такое, что произвольные не совпадающие точки (x_1, x_2) и (y_1, y_2) множества S_i удовлетворяют неравенству

$$(-1)^{i-1}\sigma(x_1-y_1)(x_2-y_2)>0,$$

а произвольные точки (x_1, x_2) и (y_1, y_2) множества S_{3-i} — неравенству

$$(-1)^{i}\sigma(x_1-y_1)(x_2-y_2)\geqslant 0.$$

Тогда задача (8.1), (8.2) имеет не более одного решения.

Следствие 8.5. Пусть f_1 и f_2 удовлетворяют условиям теоремы 8.5. Пусть, кроме того, существует $i\in\{1, 2\}$ такое, что $(-1)^{i-1}\sigma\varphi_i$ возрастает, а $(-1)^{i}\sigma\varphi_{3-i}$ не убывает. Тогда каждая из задач (8.1), (8.55); (8.1), (8.56) и (8.1), (8.57) имеет не более одного решения.

Глава 4

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

§ 9. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В настоящем параграфе установлены признаки существования и единственности ω — периодического решения дифференциальной системы

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i=1, \ldots, n) \tag{9.1}$$

и указан способ его построения.

Предполагается, что $\omega>0$, функции $f_i: R\times R^n\to R$ $(i=1, \ldots, n)$ периодичны по первому аргументу с периодом ω, т. е.

$$f_i(t+\omega, x_1, \ldots, x_n)\equiv f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i=1, \ldots, n), \tag{9.2}$$

и их сужения на $[0, \omega]\times\mathbf{R}^n$ принадлежат классу $K([0, \omega]\times\mathbf{R}^n; \mathbf{R})$.

Под L_ω ниже подразумевается множество ω — периодических функций $p: R\to R$, сужения которых на $[0, \omega]$ принадлежат пространству $L([0, \omega]; R)$.

Если $p\in L_\omega$ и $\int\limits_0^\omega p(t)\,dt\neq 0$, то положим

$$g(p)(t,\tau)=$$

$$=\begin{cases}\left|1-\exp\left(\int\limits_0^\omega p(s)\,ds\right)\right|^{-1}\exp\left(\int\limits_\tau^t p(s)\,ds\right) \text{ при } 0\leqslant\tau\leqslant t\\ \left|1-\exp\left(\int\limits_0^\omega p(s)\,ds\right)\right|^{-1}\exp\left(\int\limits_\tau^t p(s)\,ds+\int\limits_0^\omega p(s)\,ds\right)\\ \text{при } t<\tau\leqslant\omega.\end{cases} \tag{9.3}$$

9.1. О множестве $U_\omega^{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}$.

Определение 9.1. Пусть $\sigma_i\in\{-1, 1\}$ $(i=1, \ldots, n)$. Скажем, что матричная функция $(p_{ik})_{i,k=1}^n$ принадлежит множеству $U_\omega^{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}$, если $p_{ik}\in L_\omega$ $(i, k=1, \ldots, n)$, $p_{ik}(t)\geqslant 0$ при $t\in\mathbb{R}$, $i\neq k$, и система дифференциальных неравенств

$$\sigma_i y_i'(t)\leqslant\sum_{k=1}^n p_{ik}(t)\,y_k(t)\quad (i=1, \ldots, n) \tag{9.4}$$

не имеет ненулевого неотрицательного ω—периодического решения.

Лемма 9.1. Если

$$(p_{ik})_{i,k=1}^n\in U_\omega^{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}, \tag{9.5}$$

то

$$\int\limits_0^\omega p_{ii}(t)\,dt<0\quad (i=1, \ldots, n). \tag{9.6}$$

Доказательство. Предположим, что для некоторого $j\in\{1, \ldots, n\}$

$$\int\limits_0^\omega p_{jj}(t)\,dt\geqslant 0.$$

Подберем функцию $p\in L_\omega$ таким образом, чтобы

$$p(t)\leqslant p_{jj}(t) \text{ при } t\in\mathbb{R} \text{ и } \int\limits_0^\omega p(t)\,dt=0.$$

Тогда вектор-функция $(y_i)_{i=1}^n$, где

$$y_i(t)\equiv 0 \text{ при } i\neq j,\quad y_j(t)=\exp\left(\sigma_j\int\limits_0^t p(\tau)\,d\tau\right),$$

является ненулевым неотрицательным ω — периодическим решением системы (9.4). Но это противоречит условию (9.5). Тем самым справедливость неравенств (9.6) доказана.

Лемма 9.2. Для выполнения условия (9.5) необходимо и достаточно, чтобы

$$(P;\ (\varphi_{0i})_{i=1}^{n}) \in U(t_1, \ldots, t_n)^{1)}, \tag{9.7}$$

где

$$t_i = \frac{1-\sigma_i}{2}\,\omega \quad (i=1, \ldots, n), \tag{9.8}$$

$$\varphi_{0i}(y_1, \ldots, y_n) = y_i(\omega - t_i) \quad (i=1, \ldots, n), \tag{9.9}$$

а P — сужение матричной функции $(p_{ik})_{i,k=1}^{n}$ на $[0, \omega]$.

Доказательство. Пусть соблюдается условие (9.5). Тогда по лемме 9.1 выполнены неравенства (9.6). Поэтому для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ периодическая задача

$$\frac{du}{dt} = \sigma_i p_{ii}(t)\,u, \quad u(0) = u(\omega) \tag{9.10}$$

имеет только нулевое решение и ее функция Грина g_i допускает представление

$$g_i(t, \tau) = \sigma_i g(\sigma_i p_{ii})(t, \tau) \quad (i=1, \ldots, n), \tag{9.11}$$

где g — оператор, заданный равенством (9.3). Допустим теперь, что нарушено условие (9.7), т. е. задача

$$x_i'(t)\,\mathrm{sign}(t - t_i) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)\,x_k(t) \ \text{при}\ 0 < t < \omega \quad (i=1, \ldots, n), \tag{9.12}$$

$$x_i(t_i) \leqslant x_i(\omega - t_i) \quad (i=1, \ldots, n) \tag{9.13}$$

имеет ненулевое неотрицательное решение $(x_i)_{i=1}^{n}$. Ввиду (9.8) найдутся

$$\alpha_i \in \mathbf{R}_+, \quad q_i \in L([0, \omega]; \mathrm{R}_+) \quad (i=1, \ldots, n) \tag{9.14}$$

такие, что

$$x_i'(t) = \sigma_i \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)\,x_k(t) - \sigma_i q_i(t) \quad (i=1, \ldots, n),$$

$$x_i(\omega) = x_i(0) + \sigma_i \alpha_i \quad (i=1, \ldots, n).$$

Отсюда с учетом (9.6), (9.11) и (9.14) находим

$$x_i(t) = -\alpha_i g(\sigma_i p_{ii})(t, 0) - \int_0^{\omega} g(\sigma_i p_{ii})(t, \tau)\,q_i(\tau)\,d\tau + y_i(t) \leqslant y_i(t)$$

$$\text{при}\ 0 \leqslant t \leqslant \omega \quad (i=1, \ldots, n),$$

---

1) См. определение 4.1.

где

$$y_i(t)=\sigma_i\int_0^\omega g_i(t,\tau)\left[\sum_{k\neq i,k=1}^n p_{ik}(\tau)x_k(\tau)\,d\tau\right]\quad (i=1,\ldots,n).$$

Ясно, что

$$y_i(0)=y_i(\omega)\quad (i=1,\ldots,n)$$

и

$$\sigma_i y_i'(t)=p_{ii}(t)y_i(t)+\sum_{k\neq i,k=1}^n p_{ik}(t)x_k(t)\leqslant\sum_{k=1}^n p_{ik}(t)y_k(t)$$
$$\text{при } 0<t<\omega\quad (i=1,\ldots,n).$$

Следовательно периодическое продолжение $(y_i)_{i=1}^n$ на $\mathbf{R}$ является ненулевым неотрицательным ω — периодическим решением системы (9.4). Но это противоречит условию (9.5). Полученное противоречие доказывает, что из (9.5) вытекает (9.7).

То, что из (9.7) следует (9.5), очевидно, ибо сужение на $[0,\omega]$ *произвольного* ω — *периодического решения системы* (9.4) является решением задачи (9.12), (9.13). Лемма доказана.

Лемма 9.3. Пусть $p_{ik}\in L_\omega$ $(i,k=1,\ldots,n)$, $p_{ik}(t)\geqslant 0$ при $t\in R$, $i\neq k$, и выполнены неравенства (9.6). Пусть, кроме того, собственные значения матрицы $S=(s_{ik})_{i,k=1}^n$, где

$$s_{ii}=0,\quad s_{ik}=\max\left\{\int_0^\omega g(\sigma_i p_{ii})(t,\tau)\,p_{ik}(\tau)\,d\tau:\ 0\leqslant t\leqslant\omega\right\}\quad\text{при } i\neq k$$

по модулю меньше единицы. Тогда соблюдается условие (9.5).

Доказательство. Пусть $(y_i)_{i=1}^n$ — произвольное неотрицательное ω — периодическое решение системы (9.4). Ввиду (9.6) и (9.11)

$$y_i(t)\leqslant\sum_{k\neq i,k=1}^n\int_0^\omega g(\sigma_i p_{ii})(t,\tau)\,p_{ik}(\tau)\,y_k(\tau)\,d\tau$$
$$\text{при } 0\leqslant t\leqslant\omega\ (i=1,\ldots,n).$$

Поэтому

$$(\|y_i\|_C)_{i=1}^n\leqslant S\,(\|y_i\|_C)_{i=1}^n.$$

Отсюда следует, что $\|y_i\|_C=0$ $(i=1,\ldots,n)$, так как собственные значения матрицы S по модулю меньше единицы. Следовательно, соблюдается условие (9.5). Лемма доказана.

Лемма 9.4. Пусть $P=(p_{ik})_{i,k=1}^n$ — постоянная матрица и $p_{ik}\geqslant 0$ при $i\neq k$. Тогда для выполнения (9.5) необходимо и достаточно, чтобы действительная часть каждого собственного значения P была отрицательной.

Доказательство. Пусть соблюдается условие (9.5). Тогда согласно лемме 9.1

$$p_{ii}<0 \quad (i=1,\ldots,n). \tag{9.15}$$

Положим

$$s_{ii}=0, \quad s_{ik}=-p_{ik}/p_{ii} \text{ при } i\neq k, \quad S=(s_{ik})_{i,k=1}^{n}.$$

Для отрицательности действительных частей собственных значений P необходимо и достаточно, чтобы

$$r(S)<1, \tag{9.16}$$

где $r(S)$ — спектральный радиус матрицы S. Следовательно, нам надо доказать, что выполнено (9.16). Допустим противное, что

$$r=r(S)\geqslant 1.$$

Ввиду неотрицательности S существует ее неотрицательный собственный вектор $(y_i)_{i=1}^{n}$, соответствующий собственному значению r. Ясно, что

$$0=p_{ii}y_i+r^{-1}\sum_{k\neq i,k=1}^{n} p_{ik}y_k\leqslant\sum_{k=1}^{n} p_{ik}y_k \quad (i=1,\ldots,n).$$

Следовательно, $(y_i)_{i=1}^{n}$ является ненулевым неотрицательным ω-периодическим решением системы (9.4). Но это противоречит условию (9.5). Тем самым установлена справедливость (9.16).

Предположим теперь, что действительные части собственных значений матрицы P отрицательны. Тогда выполнены неравенства (9.15) и (9.16). С другой стороны,

$$\int_0^{\omega} g(\sigma_i p_{ii})(t,\tau)p_{ik}d\tau=-p_{ik}/p_{ii}=s_{ik} \text{ при } i\neq k.$$

Поэтому согласно лемме 9.3 выполнено условие (9.5). Лемма доказана.

Лемма 9.5. Пусть $\sigma_1=\sigma_2=\cdots=\sigma_n$, $p_{ik}\in L_\omega$ $(i, k=1,\ldots,n)$ и $p_{ik}(t)\geqslant 0$ при $t\in\mathbf{R}$, $i\neq k$. Тогда для выполнения (9.5) необходимо и достаточно, чтобы дифференциальная система

$$\frac{dy_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)\,y_k \quad (i=1,\ldots,n) \tag{9.17}$$

была асимптотически устойчивой вправо.

Доказательство. Для определенности будем считать, что

$$\sigma_i=1 \quad (i=1,\ldots,n). \tag{9.18}$$

Случай, когда $\sigma_i=-1$ $(i=1,\ldots,n)$, рассматривается аналогично.

Пусть

$$p_{ik}(t, \gamma)=\begin{cases}\gamma p_{ik}(t) \text{ при } i\neq k,\\ p_{ii}(t) \text{ при } i=k,\end{cases}$$

Y_γ — фундаментальная матрица дифференциальной системы

$$\frac{dy_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t;\gamma)\, y_k \quad (i=1,\ldots,n), \tag{9.19}$$

удовлетворяющая условию

$$Y_\gamma(0)=E,$$

E — единичная матрица, а $r(\gamma)$ — спектральный радиус матрицы монодромии $Y_\gamma(\omega)$. Тогда

$$Y_\gamma(t)\geqslant 0 \text{ при } t\geqslant 0,\ \gamma\geqslant 0 \tag{9.20}$$

и $r\in C(R_+;\,]0,+\infty[)$.

Предположим теперь, что система (9.17) является асимптотически устойчивой вправо. Тогда

$$r(1)<1. \tag{9.21}$$

Рассмотрим произвольное неотрицательное ω — периодическое решение $y=(y_i)_{i=1}^{n}$ системы (9.4). С учетом (9.18) и (9.20) находим $y(t)\leqslant Y_1(t)y(0)$ при $0\leqslant t\leqslant\omega$ и $y(0)\leqslant Y_1(\omega)y(0)$. Отсюда в силу (9.21) вытекает, что $y(t)\equiv 0$. Следовательно, соблюдается условие (9.5).

Нам остается доказать, что из (9.5) вытекает неравенство (9.21), ибо оно равносильно асимптотической устойчивости вправо системы (9.18). Допустим противное, что выполнено (9.5), но

$$r(1)\geqslant 1.$$

По лемме 9.1 имеют место неравенства (9.6), согласно которым

$$r(0)<1.$$

Поэтому существует $\gamma\in]0,1]$ такое, что

$$r(\gamma)=1.$$

Пусть $c\in R_+^n$ — собственный вектор матрицы $Y_\gamma(\omega)$, соответствующий собственному значению, равному единице. Тогда

$$(y_i(t))_{i=1}^{n}=Y_\gamma(t)\,c$$

является ненулевым неотрицательным решением системы (9.19). Очевидно, что оно удовлетворяет и системе (9.4). Но это невозможно ввиду условия (9.5). Полученное противоречие доказывает лемму.

9.2. Линейные системы. Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\,x_k+b_i(t) \quad (i=1,\ldots,n), \tag{9.22}$$

где

$$a_{ik}\in L_\omega,\ b_i\in L_\omega\ \ (i,\ k=1,\ \ldots,\ n). \tag{9.23}$$

Теорема 9.1. Пусть существуют натуральные числа m и n_j $(j=1,\ldots,m)$ такие, что $0=n_0<n_1<\cdots<n_m=n$,

$$a_{ik}(t)\equiv 0\ \ (i=n_{j-1}+1,\ \ldots,\ n_j;\ k=n_j+1,\ \ldots,\ n;\ j=1,\ \ldots,\ m-1) \tag{9.24}$$

и при всех $(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)\in R\times R^n$ соблюдаются неравенства

$$\sigma_j \sum_{i,k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_{ik}(t)\,x_i x_k \geqslant a(t) \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} x_i^2 \quad (j=1,\ldots,m), \tag{9.25}$$

где $\sigma_j\in\{-1,\ 1\}$ $(j=1,\ldots,m)$, а $a\in L_\omega$ и

$$\int_0^\omega a(t)\,dt>0. \tag{9.26}$$

Тогда система (9.22) имеет одно и только одно ω — периодическое решение.

Доказательство. В силу теоремы 1.1 и условия (9.23) для доказательства теоремы 9.1 достаточно установить, что однородная периодическая краевая задача

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \quad (i=1,\ldots,n), \tag{9.27}$$

$$x_i(0)=x_i(\omega) \quad (i=1,\ldots,n) \tag{9.28}$$

имеет только нулевое решение. Пусть $(x_i)_{i=1}^n$ — произвольное решение этой задачи. Положим

$$u_j(t)=\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} x_i^2(t) \quad (j=1,\ldots,m).$$

Ввиду (9.24) и (9.25)

$$\sigma_1 u_1'(t)=2\sigma_1 \sum_{i=n_0+1}^{n_1} x_i(t)\,x_i'(t)=2\sigma_1 \sum_{i,k=n_0+1}^{n_1} a_{ik}(t)\,x_i x_k \geqslant 2a(t)\,u_1(t)$$

$$\text{при } 0<t<\omega.$$

Поэтому в случае $\sigma_1=1$ имеем

$$u_1(t)\exp\left(2\int_t^\omega a(\tau)\,d\tau\right)\leqslant u_1(\omega)=u_1(0) \text{ при } 0\leqslant t\leqslant\omega,$$

а в случае $\sigma_1=-1$ —

$$u_1(t)\exp\left(2\int_0^t a(\tau)\,d\tau\right)\leqslant u_1(0)=u_1(\omega) \text{ при } 0\leqslant t\leqslant\omega.$$

Отсюда согласно (9.26) вытекает, что

$$u_1(t)\equiv 0.$$

Исходя из этого тождества, с учетом условий (9.24)—(9.26) по индукции докажем, что $u_j(t)\equiv 0$ $(j=1,\ldots,n)$. Следовательно, $x_i(t)\equiv 0$ $(i=1,\ldots,n)$. Теорема доказана.

Теорема 9.2. Пусть

$$\sigma_i a_{ii}(t)\leqslant p_{ii}(t),\quad |a_{ik}(t)|\leqslant p_{ik}(t) \text{ при } t\in\mathrm{R}$$
$$(i\neq k;\ i,\ k=1,\ldots,n), \tag{9.29}$$

$\sigma_i\in\{-1,\ 1\}$ и соблюдается условие (9.5). Тогда система (9.22) имеет единственное ω-периодическое решение $(x_i)_{i=1}^n$ и

$$\sum_{l=1}^n |x_l(t)-x_{lm}(t)|\leqslant r_0\delta^m \text{ при } 0\leqslant t\leqslant\omega\ (m=1,\ 2,\ldots),$$

где $(x_{l0})_{l=1}^n\in C([0,\ \omega];\ \mathrm{R}^n)$ — произвольная вектор-функция,

$$x_{lm}(t)=\exp\left(\int_{t_l}^t p_{ll}(s)\,ds\right)x_{lm-1}(\omega-t_l)+$$
$$+\int_{t_l}^t\exp\left(\int_\tau^t p_{ll}(s)\,ds\right)\left[\sum_{k\neq l,k=1}^n p_{lk}(\tau)\,x_{km-1}(\tau)+b_l(\tau)\right]d\tau$$
$$(m=1,\ 2,\ldots),$$

$t_l=\frac{1-\sigma_l}{2}\omega$ $(i=1,\ldots,n)$, а $r_0>0$ и $\delta\in]0,\ 1[$ — не зависящие от m числа.

Доказательство. Пусть t_l и φ_{0l} $(i=1,\ldots,n)$ — числа и функционалы, заданные равенствами (9.8) и (9,9),

$$f_l(t,\ x_1,\ldots,x_n)=\sum_{k=1}^n a_{lk}(t)\,x_k+b_l(t)\quad (i=1,\ldots,n),$$
$$a=0,\quad b=\omega$$

и

$$\varphi_l(t,\ x_1,\ldots,x_n)=x_l(\omega-t_l)\quad (i=1,\ldots,n).$$

Ввиду (9.23) периодическое продолжение решения задачи (4.1), (4.2) на R является ω-периодическим решением системы (9.22), и, наоборот, сужение на $[0, \omega]$ ω-периодического решения системы (9.22) является решением задачи (4.1), (4.2). С другой стороны, в силу неравенств (9.29) и леммы 9.2 выполнены условия (4.12), (4.13) и (9.7). Если теперь применить теорему 4.5, справедливость теоремы 9.2 станет очевидной.

Замечание 9.1. В теореме 9.2 условие (9.5) является существенным и его ослабить нельзя, ибо, как это будет показано ниже, если $p_{ik}\in L_\omega$ $(i, k=1, \ldots, n)$, $p_{ik}(t)\geqslant 0$ при $t\in\mathbf{R}$, $i\neq k$ и

$$(p_{ik})_{i,k=1}^{n}\notin U_\omega^{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}, \tag{9.30}$$

то существуют $b_i\in L_\omega$ $(i=1, \ldots, n)$ и удовлетворяющие неравенствам (9.29) функции $a_{ik}\in L_\omega$ $(i, k=1, \ldots, n)$ такие, что система (9.22) не имеет ω-периодического решения.

Ввиду (9.30) система (9.4) имеет ненулевое неотрицательное решение $(y_i)_{i=1}^{n}$. Положим

$$p_i(t) = -1 - |p_{ii}(t)|,$$

$$h_{0i}(t) = -p_i(t)\, y_i(t) + \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)\, y_k(t) \quad (i=1, \ldots, n).$$

Тогда при любом $i\in\{1, \ldots, n\}$ дифференциальное уравнение

$$x_i'(t) = \sigma_i p_i(t)\, x_i(t) + \sigma_i h_{0i}(t)$$

имеет единственное ω-периодическое решение x_i и

$$y_i(t) \leqslant x_i(t) \text{ при } t\in\mathbf{R}.$$

Поэтому

$$0 \leqslant h_{0i}(t) = \sigma_i x_i'(t) - p_i(t) x_i(t) \leqslant h_i(t) \quad (i=1, \ldots, n),$$

где

$$h_i(t) = -p_i(t)\, x_i(t) + \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t) x_k(t).$$

Следовательно, $(x_i)_{i=1}^{n}$ является ненулевым ω-периодическим решением дифференциальной системы (9.27), где

$$a_{ii}(t) = \sigma_i p_i(t) + \sigma_i \eta_i(t)\,[p_{ii}(t) - p_i(t)],$$

$$a_{ik}(t) = \sigma_i \eta_i(t) p_{ik}(t) \quad \text{при } i\neq k,$$

$$\eta_i(t) = \begin{cases} h_{0i}(t)/h_i(t) \text{ при } h_i(t) > 0 \\ 0 \text{ при } h_i(t) = 0 \end{cases}$$

и $0\leqslant r_i(t)\leqslant 1$ при $t\in\mathrm{R}$

Согласно замечанию 1.2 существуют $b_i\in L_\omega$ $(i=1, \ldots, n)$ такие, что система (9.22) не имеет ω-периодического решения. С другой стороны, очевидно, что функции a_{ik} удовлетворяют неравенствам (9.29).

В силу лемм 9.3—9.5 из теоремы 9.2 вытекает

Следствие 9.1. Пусть выполнены неравенства (9.29), где $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ и $p_{ik} \in L_\omega$ $(i, k=1, \ldots, n)$. Пусть, кроме того, соблюдается одно из следующих трех условий:

1) собственные значения матрицы $(s_{ik})_{i,k=1}^n$, где $s_{ii}=0$, $s_{ik}=\max\left\{\int\limits_0^\omega g(\sigma_i p_{ii})(t, \tau)p_{ik}(\tau)d\tau\colon 0\leqslant t\leqslant\omega\right\}$ при $i\neq k$, по модулю меньше единицы;

2) $p_{ik}(t)\equiv p_{ik}=\mathrm{const}$ $(i, k=1, \ldots, n)$ и действительная часть каждого собственного значения матрицы $(p_{ik})_{i,k=1}^n$ отрицательна;

3) $\sigma_1=\sigma_2=\cdots=\sigma_n$ и дифференциальная система (9.17) асимптотически устойчива вправо.

Тогда справедливо заключение теоремы 9.2.

Теорема 9.3. Пусть

$$\sigma_i a_{ii}(t)\leqslant p_{ii}(t),\quad 0\leqslant\sigma_i a_{ik}(t)\leqslant p_{ik}(t) \text{ при } t\in R$$
$$(i\neq k;\ i, k=1, \ldots, n), \tag{9.31}$$

$\sigma_i \in \{-1, 1\}$ и соблюдается условие (9.5). Тогда компоненты матрицы Грина $(g_{ik})_{i,k=1}^n$ периодической задачи (9.27), (9.28) допускают оценки

$$\sigma_i g_{ii}(t, \tau)\geqslant g(a_{ii})(t, \tau)>0,\quad \sigma_k g_{ik}(t, \tau)\geqslant 0 \text{ при } i\neq k, \tag{9.32}$$

где g — оператор, заданный равенством (9.3).

Доказательство. Пусть $b_i \in L_\omega$ и

$$\sigma_i b_i(t)\geqslant 0 \text{ при } t\in R\quad (i=1, \ldots, n). \tag{9.33}$$

В силу лемм 5.1 и 9.2 найдется положительное число r такое, что любое неотрицательное решение $(x_i)_{i=1}^n$ системы дифференциальных неравенств

$$\sigma_i x_i'(t)\leqslant\sum_{k=1}^n p_{ik}(t)x_k(t)+\sigma_i b_i(t)$$
$$\text{при } 0<t<\omega\quad (i=1, \ldots, n), \tag{9.34}$$

удовлетворяющее краевым условиям (9.28), допускает оценку

$$x_i(t)<r \text{ при } 0\leqslant t\leqslant\omega\quad (i=1, \ldots, n). \tag{9.35}$$

Положим

$$\chi_0(s)=\begin{cases}0 \text{ при } s<0\\ s \text{ при } 0\leqslant s\leqslant r\\ r \text{ при } s>r\end{cases} \tag{9.36}$$

и рассмотрим дифференциальную систему

$$\frac{dx_i}{dt}=a_{ii}(t)x_i+\sum_{k\neq i,k=1}^{n}a_{ik}(t)\chi_0(x_k)+b_i(t)\quad(i=1,\ \ldots,\ n).\qquad(9.37)$$

В силу условий (9.5), (9.31) и леммы 9.1

$$(\sigma_i a_{ik})_{i,k=1}^{n}\in U_{\omega}^{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}$$

и

$$\sigma_i\int_0^{\omega}a_{ii}(t)\,dt<0\quad(i=1,\ \ldots,\ n).\qquad(9.38)$$

Следовательно, однородная задача

$$\frac{dx_i}{dt}=a_{ii}(t)x_i,\quad x_i(0)=x_i(\omega)\quad(i=1,\ \ldots,\ n)$$

имеет только нулевое решение. Поэтому согласно следствию 2.1 задача (9.37), (9.28) имеет решения $(x_i)_{i=1}^{n}$.

Ввиду (9.3), (9.33) и (9.38)

$$x_i(t)=\sigma_i\int_0^{\omega}g(a_{ii})(t,\tau)\left[\sum_{k\neq i,k=1}^{n}a_{ik}(\tau)\chi_0(x_k(\tau))+b_i(\tau)\right]d\tau\geqslant 0$$

$$\text{при } 0\leqslant t\leqslant\omega\quad(i=1,\ \ldots,\ n).\qquad(9.39)$$

Ввиду неравенств (9.31) и неотрицательности вектор-функции $(x_i)_{i=1}^{n}$ ясно, что она удовлетворяет системе (9.34). Поэтому в силу выбора r справедливы оценки (9.35). С учетом этих оценок и равенства (9.36) убедимся, что $(x_i)_{i=1}^{n}$ является решением задачи (9.22), (9.28) и, следовательно,

$$x_i(t)=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\omega}g_{ik}(t,\tau)\,b_k(\tau)\,d\tau\quad(i=1,\ \ldots,\ n).\qquad(9.40)$$

Из (9.39) и (9.40) имеем

$$\int_0^{\omega}\left[\sum_{k=1}^{n}g_{ik}(t,\tau)\,b_k(\tau)-g(a_{ii})(t,\tau)\,\sigma_i b_i(\tau)\right]d\tau\geqslant 0\quad(i=1,\ \ldots,\ n).$$

Поскольку эти неравенства соблюдаются для произвольных функций $b_i\in L_\omega$ $(i=1,\ldots,n)$, удовлетворяющих условиям (9.33), g_{ik} $(i,\ k=1,\ldots,n)$ допускают оценки (9.32). Теорема доказана.

Следствие 9.2. Если соблюдаются условия (9.5), (9.31) и (9.33), то система (9.22) имеет единственное ω-периодическое решение и оно неотрицательно.

9.3. Нелинейные системы.

Теорема 9.4. Пусть при всех $t\in[0, \omega]$, $(x_i)_{i=1}^n\in\mathbf{R}^n$, $(y_i)_{i=1}^n\in\mathbf{R}^n$ соблюдаются неравенства

$$\left|f_i(t, x_1, \ldots, x_n)-\sum_{k=1}^n p_{ik}(t, x_1, \ldots, x_n)\,x_k\right|\leqslant$$

$$\leqslant q\left(t, \sum_{k=1}^n |x_k|\right)\quad (i=1, \ldots, n),$$

$$\sigma_j \sum_{i,k=1}^{n_j} p_{ik}(t, x_1, \ldots, x_n)\,y_i y_k \geqslant a(t) \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} y_i^2 \quad (j=1, \ldots, m)$$

и

$$\sum_{i,k=1}^n |p_{ik}(t, x_1, \ldots, x_n)|\leqslant b(t),$$

где $0=n_0<n_1<\ldots<n_m=n$, $\sigma_j\in\{-1, 1\}$, $p_{ik}\in K([0, \omega]\times\mathbf{R}^n; \mathbf{R})$ $(i, k=1, \ldots, n)$, a и $b\in L_\omega$,

$$p_{ik}(t, x_1, \ldots, x_n)\equiv 0$$

$$(i=n_{j-1}+1, \ldots, n_j;\ k=n_j+1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, m-1),$$

$$\int_0^\omega a(t)\,dt>0,$$

а функция $q\in K([0, \omega]\times\mathbf{R}_+; \mathbf{R}_+)$ не убывает по второму аргументу и

$$\lim_{\rho\to+\infty}\frac{1}{\rho}\int_0^\omega q(t, \rho)\,dt=0.$$

Тогда система (9.1) имеет хотя бы одно ω-периодическое решение.

Доказательство. Обозначим через S множество всех матричных функций $(a_{ik})_{i,k=1}^n\in L([0, \omega]; R^{n\times n})$, удовлетворяющих условиям (9.24)—(9.26) и

$$\sum_{i,k=1}^n |a_{ik}(t)|\leqslant b(t) \text{ при } 0<t<\omega.$$

Как было показано выше[1], для любой $(a_{ik})_{i,k=1}^n\in S$ задача (9.27), (9.28) не имеет ненулевого решения. С другой стороны,

$$(p_{ik}(\cdot, x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)))_{i,k=1}^n\in S,$$

[1] См. доказательство теоремы 9.1.

если только $(x_i)_{i=1}^n \in C([0, \omega]; \mathbf{R}^n)$. Легко видеть также, что если

$$(a_{ik}^{(j)})_{i,k=1}^n \in S \quad (j=1, 2, \ldots)$$

и

$$\lim_{l\to+\infty} \int_0^t a_{ik}^{(j)}(\tau)\,d\tau = \int_0^t a_{ik}(\tau)\,d\tau \text{ равномерно на } [0, \omega] \ (i, k=1, \ldots, n),$$

то $(a_{ik})_{i,k=1}^n \in S$.

Из вышесказанного следует, что матричная функция $(p_{ik})_{i,k=1}^n$ удовлетворяет условию Опяля относительно пары (l, l_0), где $l(x_1, \ldots, x_n)=(x_i(\omega)-x_i(0))_{i=1}^n$ и $l_0(x_1, \ldots, x_n)\equiv 0$. Поэтому согласно теореме 2.1 задача (9.1), (9.28) имеет хотя бы одно решение $(x_i)_{i=1}^n$. Ввиду (9.2) периодическое продолжение $(x_i)_{i=1}^n$ на $\mathbf{R}$ является ω-периодическим решением системы (9.1). Теорема доказана.

Учитывая (9.2), легко убедимся, что из теоремы 4.1 вытекает

Теорема 9.5. Система (9.1) имеет хотя бы одно ω-периодическое решение тогда и только тогда, когда существуют $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ $(i=1, \ldots, n)$ и $(\alpha_{kj})_{j=1}^n \in \tilde{C}([0, \omega]; \mathbf{R}^n)$ такие, что

$$\alpha_{1i}(t) \leqslant \alpha_{2i}(t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \omega \quad (i=1, \ldots, n),$$

$$(-1)^k \sigma_i[\alpha_{ki}(0)-\alpha_{ki}(\omega)] \geqslant 0 \quad (k=1, 2;\ i=1, \ldots, n)$$

и на множестве $\{(t, x_1, \ldots, x_n): 0 \leqslant t \leqslant \omega,\ \alpha_{1i}(t) \leqslant x_i \leqslant \alpha_{2i}(t)\ (i=1, \ldots, n)\}$ соблюдаются неравенства

$$(-1)^k \sigma_i[f_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha_{ki}(t), x_{i+1}, \ldots, x_n)-\alpha_{ki}'(t)] \leqslant$$
$$\leqslant 0 \quad (k=1, 2;\ i=1, \ldots, n).$$

В силу леммы 9.2 из теорем 4.2 и 4.5 получаются следующие предложения.

Теорема 9.6. Пусть на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ соблюдаются неравенства

$$\sigma_i f_i(t, x_1, \ldots, x_n)\operatorname{sign} x_i \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^n p_{ik}(t)|x_k| + q(t) \quad (i=1, \ldots, n), \tag{9.41}$$

где $\sigma_i \in \{-1, 1\}$, $q \in L_\omega$, а $(p_{ik})_{i,k=1}^n$ удовлетворяет условию (9.5). Тогда система (9.1) имеет хотя бы одно ω-периодическое решение.

Теорема 9.7. Пусть на $R\times R^n$ соблюдаются неравенства

$$\sigma_i[f_i(t, x_1, \ldots, x_n)-f_i(t, y_1, \ldots, y_n)]\operatorname{sign}(x_i-y_i) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^n p_{ik}(t)|x_k-y_k| \quad (i=1, \ldots, n), \tag{9.42}$$

где $\sigma_i \in \{-1, 1\}$, а $(p_{ik})_{i,k=1}^n$ удовлетворяет условию (9.5). Тогда: а) система (9.1) имеет единственное ω—периодическое решение $(x_i)_{i=1}^n$; б) для любой $(x_{0i})_{i=1}^n \in C([0, \omega]; R^n)$ существует единственная последовательность $(x_{im})_{i=1}^n \in \tilde{C}([0, \omega]; R^n)$ $(m=1, 2, \ldots)$ такая, что при каждом натуральном m и $i \in \{1, \ldots, n\}$ функция x_{im} является решением задачи Коши

$$\frac{dx_{im}(t)}{dt} = f_i(t, x_{1m-1}(t), \ldots, x_{i-1m-1}(t), x_{im}(t), x_{i+1m-1}(t), \ldots, x_{nm-1}(t)),$$

$$x_{im}\left(\frac{1-\sigma_i}{2}\omega\right) = x_{im-1}\left(\frac{1+\sigma_i}{2}\omega\right)$$

и

$$\sum_{i=1}^n |x_i(t) - x_{im}(t)| \leqslant r_0 \delta^m \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \omega \quad (m=1, 2, \ldots),$$

где $r_0 > 0$ и $\delta \in]0, 1[$ — не зависящие от m числа.

В силу лемм 9.3—9.5 из теорем 9.6 и 9.7 вытекает

Следствие 9.2. Пусть на $R \times R^n$ соблюдаются неравенства (9.41) (неравенства (9.42)), где $\sigma_i \in \{-1, 1\}$, $q \in L_\omega$, а $p_{ik} \in L_\omega$ $(i, k=1, \ldots, n)$ удовлетворяют одному из условий 1) — 3) следствия 9.1. Тогда справедливо заключение теоремы 9.6 (теоремы 9.7).

Следствие 9.3. Пусть на $R \times R_+^n$ соблюдаются неравенства

$$\sigma_i f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant \sum_{k=1}^n p_{ik}(t) x_k + q(t) \quad (i=1, \ldots, n) \tag{9.43}$$

и

$$\sigma_i f_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \geqslant 0 \quad (i=1, \ldots, n), \tag{9.44}$$

где $\sigma_i \in \{-1, 1\}$, $q \in L_\omega$, а $(p_{ik})_{i,k=1}^n$ удовлетворяет условию (9.5). Тогда система (9.1) имеет хотя бы одно неотрицательное ω-периодическое решение.

Доказательство. Пусть

$$\chi(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } s < 0 \\ s & \text{при } s \geqslant 0. \end{cases}$$

Согласно теореме 9.6 и условиям (9.5), (9.43) и (9.44) система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = -\sigma_i (1 + |p_{ii}(t)|) [x_i - \chi(x_i)] + f_i(t, \chi(x_1), \ldots, \chi(x_n))$$

$$(i=1, \ldots, n)$$

имеет ω—периодическое решение $(x_i)_{i=1}^n$. Нам остается показать, что $(x_i)_{i=1}^n$ неотрицательно, ибо каждое неотрицательное решение последней системы является и решением системы (9.1). Допустим противное. Тогда найдутся числа $i \in \{1, \ldots, n\}$, $t_1 \in [0, \omega[$ и $t_2 \in]t_1, \omega]$ такие, что

$$x_i(t_1) = x_i(t_2) \text{ и } x_i(t) < 0 \text{ при } t_1 < t < t_2.$$

Но это невозможно, так как ввиду (9.44) имеем

$$\sigma_i x_i'(t) = -(1 + |p_{ii}(t)|) x_i(t) +$$
$$+ \sigma_i f_i(t, \chi(x_1(t)), \ldots, \chi(x_{i-1}(t)), 0, \chi(x_{i+1}(t)), \ldots, \chi(x_n(t))) >$$
$$> 0 \text{ при } t_1 < t < t_2.$$

Полученное противоречие доказывает следствие.

Следствие 9.4. Пусть на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ соблюдаются неравенства (9.42) и (9.44), где $\sigma_i \in \{-1, 1\}$, а $(p_{ik})_{i,k=1}^n$ удовлетворяет условию (9.5). Тогда система (9.1) имеет одно и только одно ω-периодическое решение, и оно неотрицательно.

§ 10. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2) \quad (i = 1, 2), \tag{10.1}$$

где функции $f_i : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ $(i = 1, 2)$ периодичны по первому аргументу с периодом $\omega > 0$ и их сужения на $[0, \omega] \times \mathbf{R}^2$ принадлежат классу $K([0, \omega] \times \mathbf{R}^2; \mathbf{R})$.

Прежде всего, введем множества $P^*(f_1, f_2; \omega)$ и $P_*(f_1, f_2; \omega)$, в терминах которых формулируется доказанная ниже теорема существования периодического решения.

Определение 10.1. Скажем, что вектор-функция $(\gamma_1, \gamma_2) \in \tilde{C}([0, \omega]; R^2)$ принадлежит множеству $P^*(f_1, f_2; \omega)$ (множеству $P_*(f_1, f_2; \omega)$), если

$$\gamma_1(0) = \gamma_1(\omega), \ \gamma_2(0) \leqslant \gamma_2(\omega) \ (\gamma_2(0) \geqslant \gamma_2(\omega))$$

и почти всюду на $[0, \omega]$ соблюдаются условия

$$\gamma_1'(t) = f_1(t, \gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

и

$$\gamma_2'(t) \leqslant f_2(t, \gamma_1(t), \gamma_2(t)) \quad (\gamma_2'(t) \geqslant f_2(t, \gamma_1(t), \gamma_2(t))).$$

Теорема 10.1. Пусть f_1 не убывает по третьему аргументу и существуют $(\alpha_1, \alpha_2) \in P_*(f_1, f_2; \omega)$ и $(\beta_1, \beta_2) \in P^*(f_1, f_2; \omega)$ такие, что

$$\alpha_1(t) \leqslant \beta_1(t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \omega.$$

Пусть, кроме того,

$$f_1(t, x_1, x_2)\operatorname{sign} x_2 \geqslant \delta(t, |x_2|) \text{ при } 0<t<\omega,$$
$$\alpha_1(t)\leqslant x_1\leqslant\beta_1(t),\ x_2\in R, \tag{10.2}$$
$$f_2(t, x_1, x_2)\operatorname{sign} x_2 \geqslant -[h_0(t)+h_1|f_1(t, x_1, x_2)|]\,\varphi(x_2)$$
$$\text{при } 0<t<b_0,\ \alpha_1(t)\leqslant x_1\leqslant\beta_1(t),\ x_2\in R \tag{10.3}$$

и

$$f_2(t, x_1, x_2)\operatorname{sign} x_2 \leqslant [h_0(t)+h_1|f_1(t, x_1, x_2)|]\,\varphi(x_2) \text{ при}$$
$$a_0<t<\omega,\ \alpha_1(t)\leqslant x_1\leqslant\beta_1(t),\ x_2\in R, \tag{10.4}$$

где $0\leqslant a_0<b_0\leqslant\omega$, $h_0\in L([0, \omega];\ R_+)$, $h_1\in R_+$, φ — функция Нагумо, а $\delta\in K([0, \omega]\times R_+;\ R_+)$ — не убывающая по второму аргументу функция, причем

$$\lim_{\rho\to+\infty}\int_{a_0}^{b_0}\delta(t, \rho)\,dt=+\infty.$$

Тогда система (10.1) имеет хотя бы одно ω-периодическое решение.

Следствие 10.1. Пусть f_1 не убывает по третьему аргументу и существуют постоянные $c_1\in R$ и $c_2\in[c_1, +\infty[$ такие, что

$$f_1(t, c_i, 0)=0,\ (-1)^i f_2(t, c_i, 0)\geqslant 0 \text{ при } 0<t<\omega \quad (i=1, 2),$$
$$f_1(t, x_1, x_2)\operatorname{sign} x_2\geqslant\delta_0|x_2|^\lambda \text{ при } 0<t<\omega,\ c_1\leqslant x_1\leqslant c_2,\ x_2\in\mathbf{R},$$
$$f_2(t, x_1, x_2)\operatorname{sign} x_2\geqslant-[h_0(t)+h_1|x_2|^\lambda]\,(1+|x_2|) \text{ при}$$
$$0<t<b_0,\ c_1\leqslant x_1\leqslant c_2,\ x_2\in\mathbf{R}$$

и

$$f_2(t, x_1, x_2)\operatorname{sign} x_2\leqslant[h_0(t)+h_1|x_2|^\lambda]\,(1+|x_2|) \text{ при}$$
$$a_0<t<\omega,\ c_1\leqslant x_1\leqslant c_2,\ x_2\in\mathbf{R},$$

где $0\leqslant a_0<b_0\leqslant\omega$, $h_0\in L([0, \omega];\ \mathbf{R}_+)$, $\delta_0>0$ и $\lambda>0$. Тогда система (10.1) имеет хотя бы одно ω-периодическое решение.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$(x_1, x_2)\in W, \tag{10.5}$$
$$x_1(0)=x_1(\omega),\ x_2(0)=x_2(\omega), \tag{10.6}$$

где $W\subset C([0, \omega];\ \mathbf{R}^2)$ — замкнутое, компактное множество.

Для доказательства теоремы 10.1 нам понадобится следующая

Лемма 10.1. Для разрешимости задачи (10.5), (10.6) достаточно, чтобы множество W обладало следующими свойствами:

1) $x_1(0)=x_1(\omega)$ для любой $(x_1, x_2)\in W$;

2) существуют (x_{*1}, x_{*2}) и $(x_1^*, x_2^*)\in W$ такие, что

$$x_{*1}(t)\leqslant x_1^*(t) \text{ при } 0\leqslant t\leqslant\omega,\quad x_{*2}(0)\geqslant x_{*2}(\omega),\quad x_2^*(0)\leqslant x_2^*(\omega);$$

3) если (x_1, x_2) и $(y_1, y_2)\in W$, $x_1(0)=y_1(0)$ и $x_1(t)\leqslant y_1(t)$ при $0\leqslant t\leqslant\omega$, то $x_2(0)\leqslant y_2(0)$ и $x_2(\omega)\geqslant y_2(\omega)$;

4) если (x_1, x_2) и $(y_1, y_2)\in W$; $x_1(t)\leqslant y_1(t)$ при $0\leqslant t\leqslant\omega$ и $c\in[x_1(0), y_1(0)]$, то существует $(z_1, z_2)\in W$ такая, что $z_1(a)=c$ и $x_1(t)\leqslant z_1(t)\leqslant y_1(t)$ при $0\leqslant t\leqslant\omega$.

Доказательство. Случай $x_{*1}(0)=x_1^*(0)$ является тривиальным, так как тогда из 2) и 3) имеем

$$x_{*2}(\omega)\leqslant x_{*2}(0)\leqslant x_2^*(0)\leqslant x_2^*(\omega)\leqslant x_{*2}(\omega),$$

т. е. $x_2^*(0)=x_2^*(\omega)$ и (x_1^*, x_2^*) есть решение задачи (10.5), (10.6).

Итак, без ограничения общности можем считать, что $x_{*1}(0)<x_1^*(0)$,

$$x_{*2}(0)>x_{*2}(\omega) \tag{10.7}$$

$$x_2^*(0)<x_2^*(\omega). \tag{10.8}$$

Пусть

$$W^0=\{(x_1, x_2)\in W: x_{*1}(t)\leqslant x_1(t)\leqslant x_1^*(t) \text{ при } 0\leqslant t\leqslant\omega\}.$$

Докажем существование $\eta\in]x_{*1}(0), x_1^*(0)[$, для которого

$$x_2(0)>x_2(\omega) \text{ при } (x_1, x_2)\in W^0 \text{ и } x_{*1}(0)\leqslant x_1(0)\leqslant\eta. \tag{10.9}$$

В самом деле, в противном случае в силу компактности W^0 и свойства 4) найдется равномерно сходящаяся последовательность $(y_{1k}, y_{2k})\in W^0$ $(k=1, 2,\ldots)$ такая, что

$$y_{2k}(0)\leqslant y_{2k}(\omega)\quad (k=1, 2,\ldots),$$

$$\lim_{k\to\infty}(y_{1k}, y_{2k})=(y_1, y_2)\in W^0 \text{ и } y_1(0)=x_{*1}(0).$$

Отсюда в силу свойства 3) получим

$$x_{*2}(0)\leqslant y_2(0)\leqslant y_2(\omega)\leqslant x_{*2}(\omega),$$

что противоречит неравенству (10.7).

Пусть η^* — точная верхняя грань множества всех $\eta\in]x_{*1}(0), x_1^*(0)[$, для которых соблюдается условие (10.9). Ввиду свойств 3), 4) и неравенства (10.8) существуют равномерно сходящиеся последовательности

$$(x_{1k}, x_{2k}) \text{ и } (y_{1k}, y_{2k})\in W^0\ (k=1, 2,\ldots)$$

такие, что

$$x_{1k}(0)<\eta^*\leqslant y_{1k}(0),\quad x_{1k}(t)\leqslant y_{1k}(t) \text{ при } 0\leqslant t\leqslant\omega,$$

$$x_{2k}(0)>x_{2k}(\omega),\quad y_{2k}(0)\leqslant y_{2k}(\omega)\ (k=1, 2,\ldots)$$

и

$$\lim_{k\to+\infty}x_{1k}(0)=\lim_{k\to+\infty}y_{1k}(0)=\eta^*.$$

Полагая

$$x_i(t)=\lim_{k\to+\infty} x_{ik}(t), \quad y_i(t)=\lim_{k\to+\infty} y_{ik}(t) \ (i=1, 2),$$

согласно 3) будем иметь

$$x_2(\omega)\leqslant x_2(0)\leqslant y_2(0)\leqslant x_2(\omega).$$

Следовательно, (x_1, x_2) удовлетворяет краевым условиям (10.6). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 10.1. Докажем теорему при дополнительных предположениях, что

$$f_1(t, x_1, \bar{x}_2)>f_1(t, x_1, x_2) \text{ при } \bar{x}_2>x_2 \tag{10.10}$$

и функция f_1 имеет частную производную по второму аргументу, сужение которой на $[0,\omega]\times\mathbf{R}^2$ принадлежит классу $K([0,\omega]\times\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$. Отметим, что от этих ограничений легко можно освободиться с применением техники доказательства теоремы 7.1.

Согласно лемме 8.2 найдется положительное число r такое, что любая вектор-функция $(x_1, x_2)\in\tilde{C}([0,\omega]\times R^2; R)$, удовлетворяющая неравенствам

$$\alpha_1(t)\leqslant x_1(t)\leqslant\beta_1(t) \text{ при } 0\leqslant t\leqslant\omega, \tag{10.11}$$

$$x_1'(t)\operatorname{sign} x_2(t)\geqslant\delta(t, |x_2(t)|) \text{ при } 0<t<\omega, \tag{10.12}$$

$$x_2'(t)\operatorname{sign} x_2(t)\geqslant-[h_0(t)+h_1|x_1'(t)|]\,\varphi(x_2(t)) \tag{10.13}$$

$$\text{при } 0<t<b_0$$

и

$$x_2'(t)\operatorname{sign} x_2(t)\leqslant[h_0(t)+h_1|x_1'(t)|]\,\varphi(x_2(t)) \tag{10.14}$$

$$\text{при } a_0<t<\omega,$$

допускает оценку

$$|x_2(t)|\leqslant r \text{ при } 0\leqslant t\leqslant\omega. \tag{10.15}$$

Для любого $c\in[\alpha_1(0), \beta_1(0)]$ через W_c обозначим множество всех решений системы (10.1), удовлетворяющих краевым условиям

$$x_1(0)=x_1(\omega)=c$$

и неравенству (10.11). Согласно следствию 8.1_1

$$W_c\neq\varnothing,$$

ибо $(\alpha_1, \alpha_2)\in A_*(f_1, f_2)$ и $(\beta_1, \beta_2)\in A^*(f_1, f_2)$.

Положим

$$W=\bigcup_{c\in[\alpha_1(0),\beta_1(0)]} W_c.$$

В силу (10.2)—(10.4) любая вектор-функция $(x_1, x_2) \in W$ удовлетворяет неравенствам (10.11)—(10.13). Следовательно, она допускает оценку (10.15). Поэтому очевидно, что W является замкнутым и компактным множеством пространства $C([0, \omega]; \mathbf{R}^2)$.

Докажем разрешимость задачи (10.5), (10.6). Для этого достаточно установить, что W обладает свойствами, перечисленными в лемме 10.1.

Пусть

$$(x_1^*, x_2^*) \in W_{\beta_1(0)}.$$

Покажем прежде всего, что

$$x_2^*(0) \leqslant \beta_2(0). \tag{10.16}$$

Допустим противное, что на некотором отрезке $[0, t_0[\subset [0, \omega]$ соблюдается неравенство

$$x_2^*(t) > \beta_2(t).$$

Тогда согласно условию (10.10) и дифференцируемости f_1 по второму аргументу будем иметь

$$[x_1^*(t) - \beta_1(t)]' = f_1(t, x_1^*(t), x_2^*(t)) - f_1(t, \beta_1(t), \beta_2(t)) >$$

$$> f_1(t, x_1^*(t), \beta_2(t)) - f_1(t, \beta_1(t), \beta_2(t)) \geqslant g(t)[x_1(t) - \beta_1(t)]$$

$$\text{при } 0 < t < t_0,$$

где $g \in L([a, b]; \mathbf{R})$. Ввиду того, что $x_1(0) = \beta_1(0)$, из последнего неравенства находим

$$x_1^*(t) > \beta_1(t) \text{ при } 0 < t < t_0.$$

Но это невозможно, так как $(x_1^*, x_2^*) \in W$. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (10.16). Точно так же доказывается, что

$$x_2^*(\omega) \geqslant \beta_2(\omega)$$

и

$$x_{*2}(0) \geqslant \alpha_2(0), \quad x_{*2}(\omega) \leqslant \alpha_2(\omega),$$

если только

$$(x_{*1}, x_{*2}) \in W_{\alpha_1(0)}.$$

Поэтому

$$x_2^*(0) \leqslant \beta_2(0) \leqslant \beta_2(\omega) \leqslant x_2^*(\omega)$$

и

$$x_{*2}(0) \geqslant \alpha_2(0) \geqslant \alpha_2(\omega) \geqslant x_{*2}(\omega).$$

Следовательно, W обладает свойствами 1) и 2). Аналогично доказывается, что оно обладает и свойством 3). Что же касается наличия у W свойства 4), оно непосредственно вытекает из следствия 8.1_1, ибо ввиду (10.10) каждое решение системы (10.1), определенное на отрезке $[0, \omega]$, одновременно принадлежит множествам $A^*(f_1, f_2)$ и $A_*(f_1, f_2)$. Тем самым мы доказали существование решения (x_1, x_2) задачи (10.5), (10.6). Ясно, что периодическое продолжение (x_1, x_2) на R является ω-периодическим решением системы (10.1). Теорема доказана.

Теорема 10.2. Пусть f_1 и f_2 имеют частные производные по фазовым переменным, сужения которых на $[0, \omega] \times \mathbf{R}^2$ принадлежат классу $K([0, \omega] \times R^2; R)$. Пусть, кроме того, на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ соблюдаются неравенства

$$\frac{\partial f_1(t, x_1, x_2)}{\partial x_1} \geqslant 0, \quad \frac{\partial f_1(t, x_1, x_2)}{\partial x_2} > 0, \quad \frac{\partial f_2(t, x_1, x_2)}{\partial x_1} > 0, \quad (10.17)$$

причем либо

$$\frac{\partial f_1(t, x_1, x_2)}{\partial x_1} \equiv 0,$$

либо наряду с (10.17) выполняется условие

$$\frac{\partial f_2(t, x_1, x_2)}{\partial x_2} \leqslant 0.$$

Тогда система (10.1) имеет не более одного ω-периодического решения.

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда найдутся ω-периодческие решения (x_1, x_2) и (y_1, y_2) системы (10.1) такие, что функции

$$u_i(t) = x_i(t) - y_i(t) \quad (i = 1, 2)$$

либо для некоторого $t_0 \in [0, \omega[$ удовлетворяют неравенствам

$$u_1(t_0) \geqslant 0, \; u_2(t_0) \geqslant 0, \; u_1(t_0) + u_2(t_0) > 0, \quad (10.18)$$

либо

$$u_1(t) > 0, \; u_2(t) < 0 \text{ при } 0 \leqslant t < \omega. \quad (10.19)$$

Ввиду ограничений, наложенных на $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ $(i, k = 1, 2)$,

$$u_i'(t) = g_{i1}(t) u_1(t) + g_{i2}(t) u_2(t) \quad (i = 1, 2), \quad (10.20)$$

где $g_{ik} \in L_\omega$ $(i, k = 1, 2)$ и на $\mathbf{R}$ соблюдаются неравенства

$$g_{11}(t) \geqslant 0, \; g_{12}(t) > 0, \; g_{21}(t) > 0, \quad (10.21)$$

причем либо

$$g_{11}(t) \equiv 0, \quad (10.22)$$

либо наряду с (10.21) имеем

$$g_{22}(t) \leqslant 0. \quad (10.23)$$

Если соблюдаются неравенства (10.18), то из (10.20) и (10.21) находим

$$u_i(t) > 0 \text{ при } t_0 < t \leqslant \omega \; (i = 1, 2).$$

Отсюда в силу равенств

$$u_i(0)=u_i(\omega) \quad (i=1, 2) \tag{10.24}$$

следует, что

$$u_i(0)>0 \quad (i=1, 2).$$

С учетом этих неравенств из (10.20) и (10.21) получим

$$u_1(t)>u_1(0), \; u_2(t)>0 \text{ при } 0\leqslant t\leqslant\omega,$$

что невозможно ввиду (10.24). Тем самым мы доказали, что неравенства (10.18) не могут иметь места.

Неравенства (10.19) также не могут иметь места, ибо в противном случае в зависимости от того, выполняется условие (10.22) или (10.23), из (10.20) и (10.21) получили бы

$$u_1'(t)=g_{12}(t)u_2(t)<0 \text{ при } 0<t<\omega$$

или

$$u_2'(t)>g_{22}(t)u_2(t)\geqslant 0 \text{ при } 0<t<\omega.$$

Но каждое из этих неравенств противоречит условиям (10.24). Теорема доказана.

§ 11. ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

В этом параграфе исследуются вопросы существования, единственности и т. н. σ — устойчивости решений дифференциальной системы

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i=1, \ldots, n), \tag{11.1}$$

удовлетворяющих одному из двух условий

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|:\ t\in\mathbf{R}\right\}<+\infty \tag{11.2}$$

или

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i\{t\}|:\ t\in\mathbf{R}_+\right\}<+\infty. \tag{11.3}$$

Всюду предполагается, что функции f_i $(i=1, \ldots, n)$ заданы на $R\times\mathbf{R}^n$ и их сужения на $[a, b]\times\mathbf{R}^n$ принадлежат классу $K([a, b]\times\mathbf{R}^n;\ \mathbf{R})$, каковы бы ни были $a\in R$ и $b\in]a, +\infty[$.

Если $\sigma=(\sigma_i)_{i=1}^n$, где $\sigma_i\in\{-1, 1\}$, то через $N_+(\sigma)$ (через $N_-(\sigma)$) обозначается множество тех $i\in\{1, \ldots, n\}$, для которых $\sigma_i=1$ $(\sigma_i=-1)$.

11.1. Теоремы существования и единственности.

Теорема 11.1$_1$. Пусть существуют числа $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ ($i = 1, \ldots, n$) и абсолютно непрерывные на каждом конечном отрезке вектор-функции $(\alpha_{ki})_{i=1}^n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ ($k = 1, 2$) такие, что

$$\sup\{|\alpha_{ki}(t)| : t \in \mathbf{R}\} < +\infty \quad (i = 1, \ldots, n;\ k = 1, 2), \tag{11.4}$$

$$\alpha_{1i}(t) \leqslant \alpha_{2i}(t) \text{ при } t \in \mathbf{R} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{11.5}$$

и на множестве

$$\{(t, x_1, \ldots, x_n) : t \in \mathbf{R},\ \alpha_{1i}(t) \leqslant x_i \leqslant \alpha_{2i}(t) \ (i = 1, \ldots, n)\}$$

соблюдаются неравенства

$$(-1)^k \sigma_i [f_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha_{ki}(t), x_{i+1}, \ldots, x_n) - \alpha'_{ki}(t)] \leqslant 0$$
$$(i = 1, \ldots, n;\ k = 1, 2). \tag{11.6}$$

Тогда задача (11.1), (11.2) разрешима.

Доказательство. В силу условий (11.5) и (11.6) при любом натуральном m дифференциальная система (11.1) имеет определенное на $[-m, m]$ решение $(x_{im})_{i=1}^n$, удовлетворяющее условиям[1)]

$$x_{im}(-m) = \frac{1}{2}[\alpha_{1i}(-m) + \alpha_{2i}(-m)] \text{ при } i \in N_+(\sigma),$$

$$x_{jm}(m) = \frac{1}{2}[\alpha_{1j}(m) + \alpha_{2j}(m)] \text{ при } j \in N_+(\sigma)$$

и

$$\alpha_{1i}(t) \leqslant x_{im}(t) \leqslant \alpha_{2i}(t)$$
$$\text{при } -m \leqslant t \leqslant m \quad (i = 1, \ldots, n;\ m = 1, 2, \ldots). \tag{11.7}$$

Продолжим каждое x_{im} на все $\mathbf{R}$ с помощью равенств

$$x_{im}(t) = \begin{cases} x_{im}(-m) \text{ при } t < -m \\ x_{im}(m) \text{ при } t > m \end{cases}.$$

Очевидно, что последовательность $(x_{im})_{i=1}^n$ ($m = 1, 2, \ldots$) равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на каждом конечном отрезке. Поэтому из нее можно выделить последовательность $(x_{im_\nu})_{i=1}^n$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), равномерно сходящуюся на каждом конечном отрезке. Согласно (11.4) и (11.7)

$$(x_i)_{i=1}^n = \lim_{\nu \to +\infty} (x_{im_\nu})_{i=1}^n$$

является определенным на $\mathbf{R}$ решением системы (11.1), удовлетворяющим условию (11.2). Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 11.1$_2$. Пусть существуют числа $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ ($i = 1, \ldots, n$) и абсолютно непрерывные на каждом конечном

---

1) См. теорему 4.1 и ее доказательство.

отрезке вектор-функции $(\alpha_{ki})_{i=1}^{n}:\mathrm{R}\to\mathrm{R}^n\ (k=1,2)$ такие, что

$$\sup\{|\alpha_{ki}(t)|:t\in R_+\}<+\infty\quad (i=1,\ldots,n;\ k=1,2),$$

$$\alpha_{1i}(t)\leqslant\alpha_{2i}(t)\ \text{при}\ t\in R_+\quad (i=1,\ldots,n),$$

и на множестве

$$\{(t,x_1,\ldots,x_n):t\in R_+,\ \alpha_{1i}(t)\leqslant x_i\leqslant\alpha_{2i}(t)\ (i=1,\ldots,n)\}$$

соблюдаются неравенства (11.6). Тогда для любых $c_i\in[\alpha_{1i}(0),\alpha_{2i}(0)]$ $(i\in N_+(\sigma))$, где $\sigma=(\sigma_i)_{i=1}^{n}$ существует хотя бы одно решение системы (11.1), удовлетворяющее наряду с (11.3) условиям

$$x_i(0)=c_i\ \text{при}\ i\in N_+(\sigma).\text{[1]}\tag{11.8}$$

Теорема 11. 2₁. Пусть на $R\times R^n$ соблюдаются неравенства

$$\sigma_i f_i(t,x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{sign}\,x_i\leqslant\sum_{k=1}^{n}p_{ik}|x_k|+q(t)\quad (i=1,\ldots,n),\tag{11.9}$$

где $\sigma_i\in\{-1,1\}$, $p_{ik}=\mathrm{const}$, $p_{ii}<0$, $p_{ik}\geqslant 0$ при $i\neq k$ и действительные части собственных значений матрицы $(p_{ik})_{i,k=1}^{n}$ отрицательны, а функция $q:R\to R_+$ суммируема на каждом конечном отрезке и

$$\sup\left\{\int_t^{t+1}q(\tau)\,d\tau:t\in R\right\}<+\infty.\tag{11.10}$$

Тогда задача (11.1), (11.2) разрешима.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая

Лемма 11. 1. Пусть $p_{ik}\geqslant 0$ при $i\neq k$, $p_{ii}<0$ и действительные части собственных значений матрицы $P=(p_{ik})_{i,k=1}^{n}$ отрицательны. Тогда существует положительное число r такое, что, каковы бы ни были $a\in\mathrm{R}$, $b\in[a+1,+\infty[$, $q\in L([a,b];\mathrm{R}_+)$ и $\sigma_i\in\{-1,1\}$ $(i=1,\ldots,n)$, произвольное неотрицательное решение $(u_i)_{i=1}^{n}$ системы дифференциальных неравенств

$$\sigma_i u_i'(t)\leqslant\sum_{k=1}^{n}p_{ik}u_k(t)+q(t)\ \text{при}\ a<t<b\quad (i=1,\ldots,n)\tag{11.11}$$

допускает оценки

$$\sum_{i=1}^{n}u_i(t)\leqslant r(\rho_0+\rho_1)\ \text{при}\ a\leqslant t\leqslant b\tag{11.12}$$

---

[1] Если $N_+(\sigma)=\varnothing$, то условия (11.8) отпадают.

и

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{a}^{b} u_i(t)\,dt \leqslant r\left(\rho_0+\int_{a}^{b} q(t)\,dt\right), \qquad (11.13)$$

где

$$\rho_0=\sum_{i\in N_+(\sigma)} u_i(a)+\sum_{i\in N_-(\sigma)} u_i(b),$$

$$\sigma=(\sigma_i)_{i=1}^{n},\quad \delta=\min\{1,\, b-a\}\ \text{ и }\ \rho_1=\max\left\{\int_{t}^{t+\delta} q(\tau)\,d\tau : a\leqslant t\leqslant b-\delta\right\}.$$

Доказательство. Полагая

$$t_i=\begin{cases} a \text{ при } i\in N_+(\sigma)\\ b \text{ при } i\in N_-(\sigma),\end{cases}\quad s_{ik}=\begin{cases}\dfrac{p_{ik}}{|p_{ii}|} \text{ при } i\neq k,\\ 0 \text{ при } i=k\end{cases}$$

и

$$\gamma_i=\max\{u_i(t): a\leqslant t\leqslant b\}\ (i=1,\,\ldots,\,n),$$

из (11.11) находим

$$u_i(t)\leqslant \exp(p_{ii}\,|t-t_i|)\,u_i(t_i)+$$

$$+\sum_{k\neq i,\,k=1}^{n} p_{ik}\left|\int_{t_i}^{t}\exp(-p_{ii}\,|t-\tau|)\,u_k(\tau)\,d\tau\right|+v_i(t)\leqslant u_i(t_i)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n} s_{ik}\gamma_k+v_i(t) \text{ при } a\leqslant t\leqslant b\ (i=1,\,\ldots,\,n), \qquad (11.14)$$

где $v_i(t)=\left|\int_{t_i}^{t}\exp(p_{ii}\,|t-\tau|)\,q(\tau)\,d\tau\right|$.

Пусть $i\in N_+(\sigma)$, $t\in[a,\,b]$, а m — целая часть числа $t-a$. Тогда

$$v_i(t)=\exp(p_{ii}(t-a))\left[\sum_{k=1}^{m}\int_{a+k-1}^{a+k}\exp(-p_{ii}(\tau-a))\,q(\tau)\,d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_{a+m}^{t}\exp(-p_{ii}(\tau-a))\,q(\tau)\,d\tau\right]\leqslant \exp(p_{ii}(t-a))\times$$

$$\times\left[\sum_{k=1}^{m}\exp(-p_{ii}k)+\exp(-p_{ii}(t-a))\right]\rho_1\leqslant\eta_i\rho_1,$$

где $\eta_i=[\exp(|p_{ii}|)-1]^{-1}\exp(|p_{ii}|)+1$. Аналогично покажем, что

$$v_i(t)\leqslant\eta_i\rho_1 \text{ при } a\leqslant t\leqslant b$$

и в случае $i\in N_-(\sigma)$.

С учетом этих оценок из (11.14) получим

$$(E-S)\,(\gamma_i)_{i=1}^{n}\leqslant(u_i(t_i)+\rho_1\eta_i)_{i=1}^{n},$$

где $S=(s_{ik})_{i,k=1}^n$, а E — единичная матрица. С другой стороны, спектральный радиус матрицы S меньше единицы, так как действительные части собственных значений матрицы P отрицательны. Поэтому из последнего неравенства следует, что

$$(\gamma_i)_{i=1}^n \leqslant (E-S)^{-1}(u_i(t_i)+\rho_1\eta_i)_{i=1}^n. \tag{11.15}$$

Ввиду (11.11)

$$u_i(t) \leqslant -\sigma_i |p_{ii}|^{-1} u_i'(t) + |p_{ii}|^{-1} q(t) + \\ + \sum_{k=1}^n s_{ik} u_k(t) \text{ при } a<t<b \quad (i=1, \ldots, n).$$

Интегрированием этих неравенств от a до b получим

$$\int_a^b u_i(t)\,dt \leqslant \sigma_i |p_{ii}|^{-1}(u_i(a)-u_i(b)) + |p_{ii}|^{-1}\int_a^b q(t)\,dt + \\ + \sum_{k=1}^n s_{ik} \int_a^b u_k(t)\,dt \quad (i=1, \ldots, n)$$

и

$$\left(\int_a^b u_i(t)\,dt\right)_{i=1}^n \leqslant \left(\eta_0 u_i(t_i) + \eta_0 \int_a^b q(t)\,dt\right)_{i=1}^n + S\left(\int_a^b u_i(t)\,dt\right)_{i=1}^n,$$

где $\eta_0=\max\{|p_{ii}|^{-1}: i=1, \ldots, n\}$. Поэтому

$$\left(\int_a^b u_i(t)\,dt\right)_{i=1}^n \leqslant (E-S)^{-1}\left(\eta_0 u_i(t) + \eta_0 \int_a^b q(t)\,dt\right)_{i=1}^n. \tag{11.16}$$

Из (11.15) и (11.16) вытекают оценки (11.12) и (11.13), где $r=\|(E-S)^{-1}\|\left(\sum_{i=1}^n \eta_i + n\eta_0\right)$ — число, зависящее лишь от p_{ik} $(i, k=1, \ldots, n)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 11. 2_1. Пусть $\sigma=(\sigma_i)_{i=1}^n$, а $r>0$ — число, фигурирующее в лемме 11.1. Согласно следствию 4.2 при любом натуральном m система 11.1 имеет решение $(x_{im})_{i=1}^n$, удовлетворяющее краевым условиям

$$x_{im}(-m)=0 \text{ при } i\in N_+(\sigma), \quad x_{jm}(m)=0 \text{ при } j\in N_-(\sigma). \tag{11.17}$$

Ввиду (11.9) при каждом m вектор-функция $(u_i)_{i=1}^n = (|x_{im}|)_{i=1}^n$ является неотрицательным решением системы дифференциальных неравенств (11.11), где $a=-m$, $b=m$. Поэтому по лемме 11.1 и условиям (11.10) и (11.17)

$$\sum_{i=1}^n |x_{im}(t)| \leqslant r_0 \text{ при } -m \leqslant t \leqslant m, \tag{11.18}$$

где $r_0 = r \sup\left\{\int\limits_t^{t+1} q(\tau)\,d\tau : t \in R\right\}$. Будем считать, что $x_{im}(t) = x_{im}(-m)$ при $t < -m$ и $x_{im}(t) = x_{im}(m)$ при $t > m$.

Поскольку $(x_{im})_{i=1}^n$ $(m = 1, 2, \ldots)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на каждом конечном отрезке, она содержит подпоследовательность $(x_{im_\nu})_{i=1}^n$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, равномерно сходящуюся на каждом таком отрезке. Ввиду (11.18)

$$(x_i(t))_{i=1}^n = \lim_{\nu \to +\infty} (x_{im_\nu}(t))_{i=1}^n \text{ при } t \in \mathbf{R}$$

является решением задачи (11.1), (11.2). Теорема доказана.

Теорема 11. 3_1. Пусть на $R \times R^n$ соблюдаются неравенства

$$\sigma_i [f_i(t, x_1, \ldots, x_n) - f_i(t, y_1, \ldots, y_n)] \operatorname{sign}(x_i - y_i) \leqslant \leqslant \sum_{k=1}^n p_{ik} |x_k - y_k|, \tag{11.19}$$

где $\sigma_i \in \{-1, 1\}$, $p_{ik} = \text{const}$, $p_{ii} < 0$, $p_{ik} \geqslant 0$ при $i \neq k$ и действительные части собственных значений матрицы $(p_{ik})_{i,k=1}^n$ отрицательны. Пусть, кроме того,

$$\sup\left\{\int\limits_t^{t+1} |f_i(\tau, 0, \ldots, 0)|\,d\tau : t \in \mathbf{R}\right\} < +\infty \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{11.20}$$

Тогда задача (11.1), (11.2) имеет единственное решение.

Доказательство. Из (11.19) и (11.20) вытекают неравенства (11.9) и (11.10), где

$$q(t) = \sum_{i=1}^n |f_i(t, 0, \ldots, 0)|.$$

Следовательно, выполнены все условия теоремы 11.2_1, что и гарантирует разрешимость рассматриваемой задачи. Нам остается доказать, что она имеет не более одного решения.

Пусть r — число, фигурирующее в лемме 11.1, $(x_i)_{i=1}^n$ и $(y_i)_{i=1}^n$ — произвольные решения задачи (11.1), (11.2),

$$u_i(t) = |x_i(t) - y_i(t)| \ (i = 1, \ldots, n) \quad \text{и} \quad r_1 = \sup\left\{\sum_{i=1}^n u_i(t) : t \in \mathbf{R}\right\}.$$

Ввиду (11.19)

$$\sigma_i u_i'(t) \leqslant \sum_{k=1}^n p_{ik} u_k(t) \text{ при } t \in R \ (i = 1, \ldots, n).$$

Поэтому согласно лемме 11.1 имеем

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_i(t)\,dt \leqslant r r_1 < +\infty.$$

Отсюда вытекает существование последовательностей $t_{1m}\in]-\infty, -1[$ и $t_{2m}\in]1, +\infty[$ $(m=1, 2, \ldots)$ таких, что

$$\lim_{m\to+\infty} t_{1m}=-\infty, \quad \lim_{m\to+\infty} t_{2m}=+\infty \quad \text{и} \quad \lim_{m\to+\infty} \varepsilon_m=0, \tag{11.21}$$

где

$$\varepsilon_m=\sum_{i=1}^{n}[u(t_{1m})+u(t_{2m})].$$

Применяя опять лемму 11.1, находим

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(t)\leqslant r\varepsilon_m \text{ при } t_{1m}\leqslant t\leqslant t_{2m} \quad (m=1, 2, \ldots).$$

Из этих оценок в силу (11.21) следует, что $u_i(t)\equiv 0$ $(i=1, \ldots, n)$. Теорема доказана.

Из следствия 9.1 и теоремы 11.3_1 вытекает

Следствие 11.1. Пусть соблюдаются условия теоремы 11.3_1 и, кроме того,

$$f_i(t+\omega, x_1, \ldots, x_n)\equiv f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i=1, \ldots, n),$$

где $\omega>0$. Тогда задача (11.1), (11.2) имеет единственное решение, и оно является ω — периодическим.

Аналогично теоремам 11.2_1 и 11.3_1 доказываются следующие предложения.

Теорема 11.2_2. Пусть $\sigma_i\in\{-1, 1\}$, $\sigma=(\sigma_i)_{i=1}^n$, на $R_+\times R^n$ соблюдаются неравенства (11.9), где $p_{ik}=\text{const}$, $p_{ii}<0$, $p_{ik}\geqslant 0$ при $i\neq k$, действительные части собственных значений матрицы $(p_{ik})_{i,k=1}^n$ отрицательны, функция $q:R_+\to R_+$ суммируема на каждом конечном отрезке и

$$\sup\left\{\int_t^{t+1} q(\tau)\,d\tau : t\in R_+\right\}<+\infty.$$

Тогда для любых $c_i\in R$ $(i\in N_+(\sigma))$ система (11.1) имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям (11.3) и (11.8).

Теорема 11.3_2. Пусть $\sigma_i\in\{-1, 1\}$, $\sigma=(\sigma_i)_{i=1}^n$ и на $R_+\times R^n$ соблюдаются неравенства (11.19), где $p_{ik}=\text{const}$, $p_{ii}<0$, $p_{ik}\geqslant 0$ при $i\neq k$ и действительные части собственных значений матрицы $(p_{ik})_{i,k=1}^n$ отрицательны. Пусть, кроме того,

$$\sup\left\{\int_t^{t+1} |f_i(\tau, 0, \ldots, 0)|\,d\tau : t\in R_+\right\}<+\infty \quad (i=1, \ldots, n).$$

Тогда для любых $c_i\in R$ $(i\in N_+(\sigma))$ система (11.1) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (11.3) и (11.8).

11.2. σ-устойчивость.

Определение 11.1. Пусть $\sigma_i \in \{-1, 1\}$, $\sigma = (\sigma_i)_{i=1}^n$, а $(x_i^0)_{i=1}^n$ — решение системы (11.1), определенное в промежутке I. $(x_i^0)_{i=1}^n$ называется σ-устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что каковы бы ни были сегмент $[a, b] \subset I$ и числа

$$c_i \in [x_i^0(t_i) - \delta, x_i^0(t_i) + \delta] \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{11.22}$$

где $t_i = a + \frac{1-\sigma_i}{2}(b-a)$, система (11.1) имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее краевым условиям

$$x_i(t_i) = c_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{11.23}$$

и для каждого такого решения выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^n |x_i - x_i^0(t)| < \varepsilon \text{ при } a \leqslant t \leqslant b. \tag{11.24}$$

Отметим, что если $I = R$ и $\sigma_1 = \ldots = \sigma_n = 1$ ($\sigma_1 = \ldots = \sigma_n = -1$), то σ-устойчивость равносильна равномерной *устойчивости по Ляпунову вправо (влево). В общем случае из* σ-устойчивости не следует равномерная устойчивость. Например, нулевое решение системы

$$\frac{dx_i}{dt} = -\sigma_i x_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

является σ-устойчивым, в то время как оно неустойчиво по Ляпунову как вправо, так и влево, если только $\sigma_i \neq \sigma_k$ для некоторых i и $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Теорема 11.4. Пусть $\sigma_i \in \{-1, 1\}$, $\sigma = (\sigma_i)_{i=1}^n$, $I \subset R$ — промежуток и на $I \times \mathbf{R}^n$ соблюдаются неравенства (11.19), где $p_{ik} = \mathrm{const}$, $p_{ii} < 0$, $p_{ik} \geqslant 0$ при $i \neq k$, и действительные части собственных значений матрицы $(p_{ik})_{i,k=1}^n$ отрицательны. Тогда произвольное определенное на I решение системы (11.1) является σ-устойчивым.

Доказательство. Пусть r — положительное число, фигурирующее в лемме 11.1, а $(x_i^0)_{i=1}^n$ — некоторое решение системы (11.1), определенное на I. Для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ положим

$$\delta = \frac{\varepsilon}{nr+1}. \tag{11.25}$$

Пусть $[a, b] \subset I$, а c_i $(i = 1, \ldots, n)$ — числа, удовлетворяющие условиям (11.22). Согласно следствию 4.4 задача (11.1), (11.23) имеет единственное решение $(x_i)_{i=1}^n$, определенное на $[a, b]$.

Ввиду (11.19) и (11.22) вектор-функция

$$(u_i)_{i=1}^n = (|x_i - x_i^0|)_{i=1}^n$$

является решением системы дифференциальных неравенств

$$\sigma_i u_i'(t) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_{ik} u_k(t) \text{ при } a < t < b \quad (i < 1, \ldots, n)$$

и

$$\sum_{i \in N_+(\sigma)} u_i(a) + \sum_{i \in N_-(\sigma)} u_i(b) \leqslant n\delta.$$

По лемме 11.1

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(t) \leqslant rn\delta \text{ при } a \leqslant t \leqslant b.$$

Отсюда в силу (11.25) вытекает оценка (11.24). Следовательно $(x_i^0)_{i=1}^n$ является σ-устойчивым. Теорема доказана.

Следствие 11.2$_1$. Пусть соблюдаются условия теоремы 11.3. Тогда задача (11.1), (11.2) имеет единственное решение, и оно является σ-устойчивым,

Следствие 11.2$_2$. Пусть соблюдаются условия теоремы 11.3$_1$. Тогда для любых $c_i \in \mathbf{R}$ $(i \in N_+(\sigma))$ система (11.1) имеет единственное определенное на R_+ решение, удовлетворяющее условиям (11.3) и (11.8), и оно является σ-устойчивым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н. В.*, О некоторых тенденциях в обобщениях дифференциального уравнения. Дифференц. уравнения, 1985, *21*, № 8, 1291—1304 (РЖМат, 1986, 1Б998)
2. —, *Максимов В. П.* Априорные оценки решений задачи Коши и разрешимость краевых задач для уравнений с запаздывающим аргументом. Дифференц. уравнения, 1979, *15*, № 10, 1731—1747 (РЖМат, 1980, 1Б318)
3. —, —, Уравнения с запаздывающим аргументом. Дифференц. уравнения, 1982, *18*, № 12, 2027—2050 (РЖМат, 1983, 4Б327)
4. —, *Рахматуллина Л. Ф.*, Функционально-дифференциальные уравнения. Дифференц. уравнения, 1978, *14*, № 5, 771—797 (РЖМат, 1978, 10Б289)
5. *Ашордия М. Т.*, Об одной многоточечной краевой задаче для системы обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнений. Сообщ. АН ГССР, 1984, *115*, № 1, 17—20 (РЖМат, 1985, 4Б404)
6. —, Об одной нелинейной краевой задаче для системы обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнений. Сообщ. АН ГССР, 1985, *118* № 2, 261—264 (РЖМат, 1986, 2Б319)
7. —, О структуре множества решений задачи Коши для системы обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнений. Тр. Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа Тбил. гос. ун-та, 1986, *17*, 5—16 (РЖМат, 1986, 10Б228)
8. *Бицадзе Д. Г., Кигурадзе И. Т.*, О корректности краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Сообщ. АН ГССР, 1983, *111*, № 2, 241—244 (РЖМат, 1984, 3Б323)
9. —, —, Об устойчивости множества решений нелинейных краевых задач. Дифференц. уравнения, 1984, *20*, № 9, 1495—1501 (РЖМат, 1985, 2Б1127)

10. *Васильев Н. И.*, Некоторые краевые задачи для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка, I. Латв. мат. ежегодник, 1969, *5*, 11—24 (РЖМат, 1969, 12Б308)
11. —, Некоторые краевые задачи для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка, II. Латв. мат. ежегодник, 1969, *6*, 31—39 (РЖМат, 1970, 1Б290)
12. —, *Клоков Ю. А.*, Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига, Зинатне, 1978, 183 с.
13. *Гамкрелидзе Р. В., Харатишвили Г. Л.*, Экстремальные задачи в линейных топологических пространствах. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1969, *33*, № 4, 781—839 (РЖМат, 1970, 2Б590)
14. *Гелашвили Ш. М.*, Об одной краевой задаче для систем функционально-дифференциальных уравнений. Arch. math., 1984, *20*, № 4, 157—168 (РЖМат, 1985, 10Б410)
15. —, *Кигурадзе И. Т.*, Об одном методе численного решения краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Сообщ. АН ГССР, 1984, *115*, № 3, 469—472 (РЖМат, 1985, 7Б1283)
16. *Жевлаков Г. Н., Комленко Ю. В., Тонков Е. Л.*, О существовании решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с линейными краевыми условиями. Дифференц. уравнения, 1968, *4*, № 10, 1814—1820 (РЖМат, 1969, 3Б223)
17. *Какабадзе М. А.*, Об одной задаче с интегральными условиями для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Mat. čas., 1974. *24*, № 3, 225—237 (РЖМат, 1975, 1Б380)
18. —, Об одной сингулярной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1974, *217*, № 6, 1259—1262 (РЖМат, 1975, 1Б379)
19. —, *Кигуразде И. Т.*, Об одной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференц. уравнения, 1971, *7*, № 9, 1611—1616 (РЖМат, 1972, 1Б337)
20. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.*, Функциональный анализ. М., Наука, 1984, 752 с. (РЖМат, 1985, 8Б763 К)
21. *Кведарас Б. В., Кибенко А. В., Перов А. И.*, О некоторых краевых задачах. Лит. мат. сб., 1965, *5*, № 1, 69—84 (РЖМат, 1967, 4Б207)
22. *Кигуразде И. Т.*, О сингулярной задаче Николетти. Докл. АН СССР, 1969, *86*, № 4, 769—772
23. —, О некоторых нелинейных краевых задачах (I). Bul. Inst. politehn. Iasi, 1970, *16*, № 3—4, 57—65 (РЖМат, 1971, 12Б364)
24. —, Об одной краевой задаче для системы двух дифференциальных уравнений. Тр. Тбилисск. ун-та, 1971, *1 (137) А*, 77—87 (РЖМат, 1971, 12Б363)
25. —, О периодических решениях системы обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностями. Докл. АН СССР, 1971, *198*, № 2, 286—289 (РЖМат, 1971, 10Б177)
26. —, О некоторых нелинейных краевых задачах (II). Bul. Inst. politehn. Iasi, 1972, *18*, № 3—4, 95—107 (РЖМат, 1974, 4Б269)
27. —, Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси, Изд-во Тбилисск. ун-та, 1975, 352 с. (РЖМат, 1975, 6Б395 К)
28. —, О периодической краевой задаче для двумерной дифференциальной системы. Дифференц. уравнения, 1977, *13*, № 6, 996—1007 (РЖМат, 1977, 11Б289)
29. —, О периодических решениях системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи мат. наук, 1984, *39*, № 4, 137—138
30. —, О двухточечных краевых задачах для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В сб. «IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Т. 1» Киев, Наук. думка, 1984, 168—173 (РЖМат, 1985, 7Б299)
31. —, О многоточечных краевых задачах для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Докл. расшир. заседаний семинара Ин-та прикл.

мат. им. И. Н. Векуа Тбил. гос. ун-та, 1985, *1*, № 3, 54—60 (РЖМат, 1986, 6Б357)
32. — О периодических решениях систем неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Мат. заметки, 1986, *39*, № 4, 562—575 (РЖМат, 1986, 8Б254)
33. —, *Лежава Н. Р.*, О некоторых нелинейных двухточечных краевых задачах. Дифференц. уравнения, 1974, *10*, № 12, 2147—2161 (РЖМат, 1975, 4Б297)
34. —, *Пужа Б.*, О некоторых краевых задачах для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференц. уравнения, 1976, *12*, № 12, 2139—2148 (РЖМат, 1977, 5Б153)
35. *Клоков Ю. А.*, Единственность решения краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка, Дифференц. уравнения, 1972, *8*, № 8, 1377—1385 (РЖМат, 1972, 11Б326)
36. *Комленко Ю. В.*, Двусторонний метод построения периодического решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В сб. «Пробл. соврем. теории периодич. движений», Ижевск, 1981, 29—38
37. *Красносельский М. А.*, Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., Наука, 1966, 331 с. (РЖМат, 1967, 4Б218К)
38. —, *Крейн С. Г.*, О принципе усреднения в нелинейной механике. Успехи мат. наук, 1955, *10*, № 3, 147—152 (РЖМат, 1956, 4493)
39. *Курцвейль Я., Ворел З.*, О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра. Чехосл. мат. ж., 1957, *7*, № 4, 568—583 (РЖМат, 1959, 316)
40. *Левин А. Ю.*, Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X}=A_n(t)X$. Докл. АН СССР, 1967, *176*, № 4, 774—775 (РЖМат, 1968, 4Б225)
41. *Лежава Н. Р.*, О разрешимости одной нелинейной задачи для системы двух дифференциальных уравнений. Сообщ. АН ГССР, 1972, *68*, № 3, 545—547 (РЖМат, 1973, 5Б239)
42. *Лепин А. Я.*, Применение топологических методов к нелинейным краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференц. уравнения, 1969, *5*, № 8, 1390—1397 (РЖМат, 1970, 1Б296)
43. —, *Мышкис А. Д.*, Об одном подходе к нелинейным краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференц. уравнения, 1967, *3*, № 11, 1882—1888 (РЖМат, 1968, 7Б200)
44. —, *Пономарев В. Д.*, Непрерывная зависимость решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференц. уравнения, 1973, *9*, № 4, 626—629 (РЖМат, 1973, 8Б254)
45. *Мильштейн Г. Н.*, О краевой задаче для системы двух дифференциальных уравнений. Дифференц. уравнения, 1965, *1*, № 12, 1628—1639 (РЖМат, 1966, 5Б171)
46. *Перов А. И.*, Периодические, почти-периодические и ограниченные решения дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt}=f(t, x)$. Докл. АН СССР, 1960, *132*, № 3, 531—534 (РЖМат, 1961, 2Б150)
47. —, О краевой задаче для системы двух дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1962, *144*, № 3, 493—496 (РЖМат, 1962, 12Б177)
48. —, *Кибенко А. В.*, Об одном общем методе исследования краевых задач. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1966, *30*, № 2, 249—264 (РЖМат, 12Б181)
49. *Петров Н. Н.*, Некоторые достаточные условия непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от параметра. Вестн. ЛГУ Мат. Мех. Астрон., 1962, № 19, 26—40 (РЖМат, 1963, 10Б194)
50. —, О непрерывности решений дифференциальных уравнений по параметру. Вестн. ЛГУ Мат. Мех. Астрон., 1964, № 7, 29—36 (РЖМат, 1965, 4Б155)
51. —, Необходимые условия непрерывности по параметру для некоторых классов уравнений. Вестн. ЛГУ Мат. Мех. Астрон., 1965, № 1, 47—53 (РЖМат, 1965, 10Б113)

52. *Плисс В. А.*, Нелокальные проблемы теории колебаний. М.-Л., Наука, 1964, 367 с. (РЖМат, 1965, 1Б214 К)
53. *Пономарев В. Д.*, Существование решения краевой задачи с функциональным граничным условием. Дифференц. уравнения, 1973, *9*, № 12, 2162—2165 (РЖМат, 1974, 4Б268)
54. —, О локальной единственности решения краевых задач. Мат. заметки, 1974, *15*, № 6, 891—895 (РЖМат, 1974, 11Б296)
55. *Пужа Б.*, Об одной сингулярной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Arch. math., 1977, *13*, № 4, 207—226 (РЖМат, 1978, 12Б497)
56. —, О разрешимости некоторых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Scr. Fac. sci. natur. UJEP brun., 1980, № 8, 411—426, (РЖМат, 1981, 2Б266)
57. *Садырбаев Ф. Ж.*, О двухточечной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Латв. мат. ежегодник, 1979, *23*, 131—136 (РЖМат, 1980, 4Б276)
58. —, О нелинейных краевых задачах для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В сб. «Функциональные методы в уравнениях мат. физики», М., 1980, 59—62 (РЖМат, 1981, 8Б307)
59. *Самойленко А. М.*, Исследование ДУ с «нерегулярной» правой частью. Abhandl. Dtsh. Akad. Wiss. Berlin. Kl. Math., Phys. und Tech., 1965, № 1, 106—113 (РЖМат, 1966, 8Б223)
60. —, *Ронто Н. И.*, Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев, Наук. думка, 1986, 222 с. (РЖМат, 1986, 5Б1376)
61. *Трубников Ю. В.*, *Перов А. И.*, Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. Минск, Наука и техн., 1986, 199 с. (РЖМат, 1986, 7Б1279)
62. *Хартман Ф.*, Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Мир, 1970, 720 с. (РЖМат, 1971, 3Б141 К)
63. *Хохряков А. Я.*, О существовании и об оценке решения периодической краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференц. уравнения, 1966, *2*, № 10, 1300—1306 (РЖМат, 1967, 4Б205)
64. *Чечик В. А.*, Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью. Тр. Моск. мат. о-ва, 1959, *8*, 155—198 (РЖМат, 1960, 7553)
65. *Шехтер Б. Л.*, Об одной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Сообщ. АН ГССР, 1975, *80*, № 3, 541—544 (РЖМат, 1976, 6Б249)
66. —, Об одной краевой задаче для двумерных разрывных дифференциальных систем. Тр. Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа Тбил. гос. ун-та, 1980, *8*, 79—161 (РЖМат, 1981, 3Б233)
67. *Шиндяпин А. И.*, О краевой задаче для одного сингулярного уравнения. Дифференц. уравнения, 1984, *20*, № 3, 450—455 (РЖМат, 1984, 9Б270)
68. *Artstein Z.*, Continuous dependence of parameters: on the best possible results. J. Different. Equations, 1975, *19*, № 2, 214—225 (РЖМат, 1977, 2Б179)
69. *Conti R.*, Equazioni differenziali oridinarie quasilineari con condizioni lineari. Ann. mat. pura ed appl., 1962, *57*, 49—61 (РЖМат, 1963, 2Б178)
70. —, Recent trends in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations. Boll. Unione mat. ital., 1967, *22*, № 2, 135—178 (РЖМат, 1968, 5Б279)
71. *Fukuhara M.*, Sur une généralisation d'un théorème de Kneser. Proc. Jap. Acad, 1953, *29*, 154—155 (РЖМат, 1955, 5771)
72. *Gaines R. E.*, *Mawhin J.*, Ordinary differential equations with nonlinear boundary conditions. J. Different. Equat., 1977, *26*, № 2, 200—222 (РЖМат, 1978, 7Б312)
73. *Kiguradze I. T.*, On a singular problem of Cauchy—Nicoletti. Ann. mat. pura ed appl., 1975, *104*, 151—175 (РЖМат, 1976, 3Б249)

74. —, On the modified problem of Cauchy—Nicoletti. Ann. mat. pura ed appl., 1975, *104,* 177—186 (РЖМат, 1976, 3Б250)
75. *Kneser H.,* Über die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleihunngen, das der Lipschitzschen Bedingung nicht genügt. S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl., 1923, 171—174.
76. *Kurzweil J.,* Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter. Чехосл. мат. ж., 1957, *7,* № 3, 418—449 (РЖМат, 1958, 8823)
77. —, Generalized ordinary differential equations. Чехосл. мат. ж. 1958, *8,* № 3, 360—388 (РЖМат, 1960, 317)
78. *Lasota A.,* Sur l'existence et l'unicité des solutions du problème aux limites de Nicoletti pour un système d'équations différentielles ordinaires. Zesz. nauk. Univ. Jagiell., 1966, *11,* 41—48 (РЖМат, 1968, 8Б233)
79. —, On two-point boundary value problems for systems of ordinary non-linear, first-order differential equations. Ann. pol. math., 1975, *29,* № 4, 391—396 (РЖМат, 1976, 3Б246)
80. —, *Olech C.,* An optimal solution of Nicoletti's boundary value problem. Ann. pol. math., 1966, *18,* № 2, 131—139 (РЖМат, 1967, 2Б415)
81. —, *Opial Z.,* Sur les solutions périodiques des équation différentielles ordinaires. Ann. pol. math., 1964, *16,* № 1, 69—94 (РЖМат, 1965, 11Б209)
82. *Opial Z.,* Linear problems for systems of nonlinear differential equations. J. Different. Equations., 1967, *3,* № 4, 580—594 (РЖМат, 1968, 5Б294)
83. *Schmitt K.,* Periodic solutions of nonlinear differential systems. J. Math. Anal. and Appl., 1972, *40,* № 1, 174—182 (РЖМат, 1973, 2Б243)
84. *Schwabik Š., Tvrdy M.,* Boundary value problems for generalized linear differential equations. Czechosl. Math. J., 1979, *29,* № 3, 451—477 (РЖМат., 1980, 3Б200)
85. —, —, *Veivoda O.,* Differential and integral equations: Boundary value problems and adjoints. Praha, Academia, 1979, 248 p.
86. *Sedziwy S.,* Periodic solutions of a system of nonlinear differential equations. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, *48,* № 2, 328—336 (РЖМат, 1976, 3Б217)
87. *Shekhter B. L.* On singular boundary value problems for two-dimensional differential systems. Arch. math., 1983, *19,* № 1, 19—41 (РЖМат, 1984, 1Б302)
88. *Vorel Z.,* Continuous dependence of parameters. Nonlinear. Anal., Theory Meth. and Appl., 1981, *5,* № 4, 373—380 (РЖМат, 1981, 9Б172)
89. *Waltman P.,* Existence and uniqueness of solutions of boundary value problem for two dimensional systems of nonlinear differential equations. Trans. Amer. Math. Soc., 1971, *153,* № 1, 223—234 (РЖМат, 1971, 12Б365)

41