И. Т. Кигурадзе, О колеблемости решений уравнения $\frac{d^m u}{dt^m} + a(t)|u|^n \operatorname{sign} u = 0$, *Матем. сб.*, 1964, том 65(107), номер 2, 172–187

О колеблемости решений уравнения $\frac{d^m u}{dt^m} + a(t)\,|u|^n \operatorname{sign} u = 0$

И. Т. Кигурадзе (Тбилиси)

В настоящей работе рассматривается уравнение

$$\frac{d^m u}{dt^m} + a(t)\,|u|^n \operatorname{sign} u = 0, \tag{1}$$

где $n \geqslant 1$, а функция $a(t)$ суммируема на каждом конечном отрезке промежутка $(0, \infty)$.

Решение уравнения (1) называется продолжаемым, если оно абсолютно непрерывно вместе со своими производными до порядка $m-1$ включительно на некотором промежутке $[t_0, \infty)$.

Продолжаемое решение уравнения (1) называется колеблющимся, если оно имеет бесконечное число нулей, в противном случае оно называется неколеблющимся.

В § 1 выводятся асимптотические формулы для неколеблющихся решений уравнения (1). В § 2 и § 3 устанавливаются критерии колеблемости решений уравнения (1) при $n>1$ и решений уравнения

$$\frac{d^m u}{dt^m} + a(t)\,u = 0. \tag{1'}$$

Некоторые результаты настоящей работы без подробных доказательств изложены в заметке [4].

§ 1. О поведении неколеблющихся решений уравнения (1)

Теорема 1. *Пусть $1 \leqslant k \leqslant m$. Для того чтобы существовали решения $u_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ уравнения (1), имеющие при $t \to \infty$ вид*

$$u_i(t) \sim c_i t^{i-1},\ u_i'(t) \sim (i-1)\,c_i t^{i-2}, \ldots,\ u_i^{(i-1)}(t) \sim (i-1)!\ c_i \neq 0\,^*, \tag{2}$$

достаточно и, если $a(t)$—знакопостоянная, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\int^{\infty} |a(t)|\, t^{m-1+(n-1)(k-1)}\, dt < \infty. \tag{3}$$

---

* Здесь и в дальнейшем записи $f_1(t) \sim f_2(t)$, $f(t) \sim 0$, $f(t) \sim \infty$ соответственно означают, что $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{f_1(t)}{f_2(t)} = 1$, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \infty$.

Доказательство. Докажем сначала достаточность условия (3). В силу (3), можно подобрать t_0 так, чтобы

$$n\cdot 2^n\int_{t_0}^{\infty}|a(t)|\,t^{m-1+(n-1)(k-1)}\,dt<1. \tag{4}$$

Рассмотрим операторы M_i $(i=1,2,\ldots,k)$, определенные на пространстве $C_{[t_0,\infty)}$ — непрерывных и ограниченных на $[t_0,\infty)$ функций следующим образом:

$$\begin{gathered}M_1 y(t)=1+\frac{1}{(m-1)!}\int_t^{\infty}(t-\tau)^{m-1}a(\tau)\,|y(\tau)|^n \operatorname{sign} y(\tau)\,d\tau,\\ M_i y(t)=1+\frac{t^{1-i}}{(i-2)!\,(m-i)!}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{i-2}d\tau\int_{\tau}^{\infty}(\tau-\tau_1)^{m-1}\tau_1^{n(i-1)}\times\\ \times a(\tau_1)\,|y(\tau_1)|^n \operatorname{sign} y(\tau_1)\,d\tau_1\quad(i=2,\ldots,k).\end{gathered} \tag{5}$$

Пусть S — замкнутый шар $\|y\|\leqslant 2$ в пространстве $C_{[t_0,\infty)}$. Из (4) и (5) следует, что если $y(t)$, $\bar{y}(t)\in S$, то

$$\|M_i y\|<1+2^n\int_{t_0}^{\infty}|a(t)|\,t^{m-1+(n-1)(k-1)}\,dt<2,$$

$$\|M_i y-M_i\bar{y}\|<\left(n\cdot 2^{n-1}\int_{t_0}^{\infty}|a(t)|\,t^{m-1+(n-1)(k-1)}\,dt\right)\|y-\bar{y}\|<\frac{1}{2}\|y-\bar{y}\|$$
$$(i=1,2,\ldots,k).$$

Следовательно, при любом фиксированном i, $1\leqslant i\leqslant k$, оператор M_i сжато отображает шар S в себя. Поэтому, согласно известной теореме Банаха, он имеет единственную неподвижную точку $y_i(t)\in S$.

Из (4) и (5) непосредственно вытекает, что

$$y_i(t)\sim 1\qquad(i=1,2,\ldots,k).$$

Функции $u_i(t)=t^{i-1}\,y_i(t)$ являются решениями уравнения (1). Очевидно, что имеют место соотношения

$$u_i(t)\sim t^{i-1}\quad(i=1,2,\ldots,k),$$

каждое из которых, как это легко следует из равенств $u_i(t)=t^{i-1}M_i(t^{1-i}u_i(t))$, сохраняет силу и после формального дифференцирования $i-1$ раз включительно, т. е. имеют место соотношения (2).

Предполагая, что $a(t)$ — знакопостоянная функция, а уравнение (1) имеет решения вида (2), докажем, что соблюдается условие (3).

Так как решение $u_k(t)$ монотонно вместе со своими производными до $(m-1)$-го порядка включительно и справедливы формулы (2), то

$$u_k^{(j)}(t)\sim 0\quad(j=k,\ldots,m-1).$$

Отсюда и из (1) следует, что

$$u_k^{(k-1)}(t) = (k-1)!\,c_k + \frac{1}{(m-k)!}\int\limits_t^\infty (t-\tau)^{m-k} a(\tau)\,|u_k(\tau)|^n \operatorname{sign} u_k(\tau)\,d\tau.$$

Принимая во внимание, что $a(t)$ — знакопостоянная функция и $|u_k(t)| > \frac{|c_k|}{2} t^{k-1}$, начиная с некоторого t_0 получаем

$$(k-1)!\,|c_k| \geqslant \frac{2^{k-m-n}}{(m-k)!}|c_k|^n \int\limits_{2t_0}^\infty |a(\tau)|\,\tau^{m-1+(n-1)(k-1)}\,d\tau,$$

т. е. имеет место условие (3). Теорема доказана.

Теорема 1 является обобщением принадлежащего М. И. Соболю (см. [7]) следующего утверждения:

Теорема Соболя. *Для того чтобы уравнение* (1) *имело фундаментальную систему решений вида*

$$u_k(t) \sim t^{k-1},\ u_k'(t) \sim (k-1)t^{k-2},\ \ldots,\ u_k^{(k-1)}(t) \sim (k-1)!\ \ (k=1,2,\ldots,m),$$

достаточно и, если $a(t)$ — *знакопостоянная, необходимо, чтобы выполнялось условие*

$$\int^\infty |a(t)|\,t^{m-1}\,dt < \infty.$$

Следствие. *Пусть* $u(t)$ — *нетривиальное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условию*

$$u(t) = O(t^{m-1}). \tag{6}$$

Если

$$\int^\infty |a(t)|\,t^{n(m-1)}\,dt < \infty, \tag{7}$$

то

$$u(t) \sim ct^{k-1},\ u'(t) \sim (k-1)ct^{k-2},\ \ldots,\ u^{(k-1)}(t) \sim (k-1)!\,c, \tag{8}$$

где

$$c \neq 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Доказательство. Перепишем уравнение (1) следующим образом:

$$\frac{d^m u}{dt^m} + a_1(t)\,u = 0,$$

где $a_1(t) = a(t)\,|u(t)|^{n-1}$. Согласно (6) и (7) ясно, что

$$\int^\infty a_1(t)\,t^{m-1}\,dt < \infty.$$

Поэтому из теоремы Соболя следует, что $u(t)$ имеет вид (8).

Как мы уже показали, если выполняется неравенство (7), то уравнение (1) имеет семейство решений вида (8). Но при $n > 1$ уравнение (1) помимо этих решений может иметь также решения совершенно иного вида. Оказывается, что семейство решений вида (8) обладает некоторым свойством устойчивости, т. е. справедлива

Теорема 2. *Если* $n > 1$,

$$\int^{\infty} |a(t)|\, t^{n(m-1)}\, dt < \infty$$

и $u(t)$ *принадлежит семейству решений вида* (8), *то любое решение* $v(t)$ *принадлежит этому же семейству, если*

$$\delta = \sum_{k=0}^{m-1} |u^{(k)}(t_0) - v^{(k)}(t_0)|$$

— достаточно малое число.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится

Лемма 1. *Пусть функция* $G(t, \tau, x)$ *определена при* $t, \tau \geqslant t_0$, $-\infty \leqslant x_0 < x < x_1 \leqslant +\infty$, *не убывает по* x *и для любого конечного числа* $t > t_0$ *и любой непрерывной на* $[t_0, t]$ *функции* $y(\tau)$, $x_0 < y(\tau) < x_1$ *при* $\tau \in [t_0, t]$, *существует интеграл* $\int_{t_0}^{t} G(t, \tau, y(\tau))\, d\tau$. *Пусть, кроме того, интегральное уравнение*

$$\bar{y}(t) = f(t) + \int_{t_0}^{t} G(t, \tau, \bar{y}(\tau))\, d\tau,$$

где $f(t)$ *— определенная на* $[t_0, \infty)$ *функция, имеет решение* $\bar{y}(t)$, *непрерывное на некотором промежутке* $[t_0, \bar{t})$. *Если при* $t_0 \leqslant t < t_1$ *непрерывная функция* $y(t)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$x_0 < y(t) < x_1,\quad y(t) < f(t) + \int_{t_0}^{t} G(t, \tau, y(\tau))\, d\tau,$$

то $y(t) < \bar{y}(t)$, $t_0 \leqslant t < t_2$, *где* $t_2 = \min\{\bar{t}, t_1\}$.

Доказательство. Так как $y(t)$ и $\bar{y}(t)$ — непрерывные функции и $y(t_0) < \bar{y}(t_0)$, то на некотором промежутке $t_0 \leqslant t < t_3 \leqslant t_2$ будем иметь: $y(t) < \bar{y}(t)$.

Далее, ясно, что $t_3 = t_2$, ибо в противном случае мы имели бы $y(t_3) = \bar{y}(t_3)$, что невозможно, так как

$$\bar{y}(t_3) - y(t_3) > \int_{t_0}^{t_3} [G(t_3, \tau, \bar{y}(\tau)) - G(t_3, \tau, y(\tau))]\, d\tau \geqslant 0.$$

Примечание. Пусть выполняются все условия леммы 1 и, кроме того, решение $\bar{y}_\varepsilon(t)$ интегрального уравнения

$$\bar{y}_\varepsilon(t) = f(t) + \varepsilon + \int_{t_0}^{t} G(t, \tau, \bar{y}_\varepsilon(\tau))\, d\tau$$

при $\varepsilon \to 0$ стремится к $\bar{y}(t)$. Тогда из условия $x_0 < y(t) < x_1$, $y(t) \leqslant \leqslant f(t) + \int_{t_0}^{t} G(t, \tau, y(\tau))\, d\tau$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, следует, что $y(t) \leqslant \bar{y}(t)$, $t_0 \leqslant t < t_2$.

Действительно, в силу леммы 1, $y(t) \leqslant \bar{y}_\varepsilon(t)$. Переходя к пределу, при $\varepsilon \to 0$ получаем нужное нам неравенство.

Пусть $G(t, \tau, x) = g(\tau)\, x^n$, $n > 1$, $f(t) = c \geqslant 0$. Тогда $\bar{y}(t) = \left[c^{1-n} - (n-1) \times \times \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau\right]^{\frac{1}{1-n}}$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие. *Если при $t_0 \leqslant t < t_1$ непрерывная неотрицательная функция $y(t)$ удовлетворяет условию*

$$y(t) \leqslant c + \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, y^n(\tau)\, d\tau,$$

где $n > 1$, $g(t) \geqslant 0$ *и* $c_1 = c^{1-n} - (n-1) \int_{t_0}^{t_1} g(\tau)\, d\tau > 0$,

то

$$y(t) \leqslant c_1^{\frac{1}{1-n}}.$$

Доказательство теоремы 2. Так как $u(t) = O(t^{m-1})$ и $\int^{\infty} |a(t)|\, t^{n(m-1)}\, dt < \infty$, то найдется такое число t_1, $t_1 > t_0$, что

$$\left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{|u^{(k)}(t_1)|}{k!\, t_1^{m-k-1}}\right]^{1-n} - \frac{n-1}{(m-1)!} \int_{t_1}^{\infty} |a(t)|\, t^{n(m-1)}\, dt > 0.$$

Отсюда, в силу непрерывной зависимости решений от начальных данных, следует, что

$$c_1 = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{|v^{(k)}(t_1)|}{k!\, t_1^{m-k-1}}\right]^{1-n} - \frac{n-1}{(m-1)!} \int_{t_1}^{\infty} |a(t)|\, t^{n(m-1)}\, dt > 0,$$

если δ — достаточно малое число. С другой стороны, из уравнения (1) имеем:

$$\left|\frac{v(t)}{t^{m-1}}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|v^{(k)}(t_1)|}{k!\, t_1^{m-k-1}} + \frac{1}{(m-1)!} \int_{t_1}^{t} |a(\tau)|\, \tau^{n(m-1)} \left|\frac{v(\tau)}{\tau^{m-1}}\right|^n d\tau, \quad t \geqslant t_1.$$

Отсюда, в силу следствия леммы 1, получаем

$$|v(t)| \leqslant c_1^{\frac{1}{1-n}}\, t^{m-1}, \quad t \geqslant t_1.$$

Но это неравенство, в силу следствия теоремы 1, означает, что $v(t)$ имеет вид (8). Теорема доказана.

§ 2. Критерий колеблемости решений уравнения (1)

Лемма 2. *Пусть $u(t)$ — непрерывная, неотрицательная функция в промежутке (t_0, ∞), имеющая абсолютно непрерывные производные до $(m-1)$-го порядка включительно, которые сохраняют знак в этом промежутке. Если $u^m(t)\leqslant 0$ при $t\geqslant t_0$, то найдется такое число k, $0\leqslant k\leqslant\frac{m-1}{2}$, что при $t>t_0$ будем иметь:*

$$u^{(i)}(t)\geqslant 0 \quad (i=1, 2, \ldots, l),\ (-1)^{l+i}u^{(i)}(t)\geqslant 0 \quad (i=l+1, \ldots, m); \tag{9}$$

$$u^{(l)}(t)\leqslant\frac{i!}{(t-t_0)^i}u^{(l-i)}(t) \quad (i=1,2,\ldots,l), \tag{10}$$

где $l=2k+\frac{1+(-1)^m}{2}$.

Доказательство. Легко видеть, что если дважды дифференцируемая функция $w(t)$ удовлетворяет условию $w''(t)w(t)\leqslant 0$, $t\geqslant t_0$, то $w'(t)w(t)\geqslant 0$, $t\geqslant t_0$.

Покажем сначала, что если выполняются условия леммы, то $u^{(m-1)}(t)\geqslant 0$ при $t\geqslant t_0$.

В самом деле, в противном случае функция $w(t)=u^{(m-2)}(t)$, в силу сделанного выше замечания, окажется отрицательной. По этой же причине из условий $u^{(m-1)}(t)\leqslant 0$, $u^{(m-2)}(t)\leqslant 0$ следует, что $u^{(m-3)}(t)\leqslant 0$, и т. д. Наконец, получим $u(t)\leqslant 0$, что противоречит предположению. Этим доказан что $u^{(m-1)}(t)\geqslant 0$.

Теперь возможны два случая: либо $u^{(m-2)}(t)\geqslant 0$, либо $u^{(m-2)}(t)\leqslant 0$. Если $u^{(m-2)}(t)\geqslant 0$, то легко находим, что $u^{(m-3)}(t)\geqslant 0, \ldots, u'(t)\geqslant 0$. Следовательно, $k=\left[\frac{m-1}{2}\right]$. Если же $u^{(m-2)}(t)\leqslant 0$, то, рассуждая точно так же, как и выше, находим, что $u^{(m-3)}(t)\geqslant 0$, $u^{(m-4)}(t)\leqslant 0$, и т. д. пока, наконец, не дойдем до такого l, для которого справедливы неравенства (9).

Согласно (9) функция $u^{(l)}(t)$ неотрицательна и не возрастает. Поэтому $(t-t_0)u^{(l)}(t)\leqslant u^{(l-1)}(t)$ и из тождеств

$$(t-t_0)u^{(l-i)}(t)=(1+i)u^{(l-i-1)}(t)-(1+i)u^{(l-i-1)}(t_0)-$$
$$-\int_{t_0}^{t}[iu^{(l-i)}(\tau)-(\tau-t_0)u^{(l-i+1)}(\tau)]\,d\tau \quad (i=1,2,\ldots,l-1)$$

по индукции получаем:

$$(t-t_0)u^{(l-i)}(t)\leqslant(1+i)u^{(l-i-1)}(t) \quad (i=1,\ 2,\ldots,l-1), \quad t\geqslant t_0,$$

откуда следует справедливость неравенств (10). Лемма доказана.

Лемма 3. *Если $u(t)$ — непрерывная неотрицательная функция в промежутке (t_0, ∞), имеющая абсолютно непрерывные производные до порядка $m-1$ включительно, сохраняющие знак в этом промежутке, и $u^{(m)}(t)\geqslant 0$, то либо $u^{(i)}(t)\geqslant 0$ $(i=0, 1, \ldots, m)$, $t\geqslant t_0$, либо найдется та-*

кое число $k,\ 0 \leqslant k \leqslant \frac{m-2}{2}$, *что при* $t \geqslant t_0$ *выполняются условия* (9) *и* (10), *где* $l = 2k + \frac{1+(-1)^{m-1}}{2}$.

Действительно, возможны два случая: либо $u^{(m-1)}(t) \geqslant 0$, либо $u^{(m-1)}(t) \leqslant 0$. Очевидно, что если $u^{(m-1)}(t) \geqslant 0$, то $u^{(i)}(t) \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m-2)$. Если же $u^{(m-1)}(t) \leqslant 0$, то, в силу леммы 2, найдется такое k, $0 \leqslant k \leqslant \frac{m-2}{2}$, при котором выполняются условия (9) и (10), где $l = 2k + \frac{1+(-1)^{m-1}}{2}$.

Определение. Пусть $a(t)$ — знакопостоянная функция, а $u(t)$ — какое-нибудь решение уравнения (1). Если $u(t)$ или $-u(t)$ при больших t удовлетворяет неравенствам (9), где $l = 2k + \frac{1+(-1)^m \operatorname{sign} a(t)}{2}$, то будем говорить, что функция $u(t)$ принадлежит классу A_k.

Теорема 3. *Пусть m — четное число, а функция $a(t)$ неотрицательна при больших t. Тогда для колеблемости всех продолжаемых решений уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int^{\infty} t^{m-1} a(t)\, dt = \infty. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость условия (11) следует из теоремы 1. Действительно, если нарушается условие (11), т. е. $\int^{\infty} a(t)\, t^{m-1}\, dt < \infty$, то, в силу теоремы 1, уравнение (1) обладает неколеблющимся решением $u_0(t) \sim c_0 \neq 0$.

Докажем достаточность условия (11). Допустим противное, т. е. что при условии (11) уравнение (1) имеет положительное на $[t_0, \infty)$ решение $u(t)$, производные которого сохраняют знак в промежутке $[t_0, \infty)$. Согласно лемме 2, $u(t) \in A_k$, $0 \leqslant k \leqslant \frac{m-2}{2}$. Умножая обе части уравнения (1) на $u^{-n}(t)\, t^{m-1}$ и интегрируя, находим

$$w(t) + n \int_{2t_0}^{t} \frac{w(\tau)\, u'(\tau)}{u(\tau)}\, d\tau + \int_{2t_0}^{t} a(\tau)\, \tau^{m-1}\, d\tau = c + (m-1)(m-2) \ldots l \int_{2t_0}^{t} \frac{u^{(l)}(\tau)}{u^n(\tau)} \tau^{l-1}\, d\tau, \tag{12}$$

где

$$w(t) = [t^{m-1} u^{(m-1)}(t) - (m-1)\, t^{m-2} u^{m-2}(t) + \ldots$$
$$\ldots + (m-1)(m-2) \ldots (l+1)\, t^l u^{(l)}(t)]\, u^{-n}(t).$$

В силу леммы 2, убеждаемся, что если $t > t_0$, то $u'(t) \geqslant 0$, $w(t) \geqslant 0$ и удовлетворяется условие (10). Поэтому из (12) находим $(t \geqslant t_0)$:

$$\int_{2t_0}^{t} a(\tau)\, \tau^{m-1}\, d\tau \leqslant c + 2^{m-1}(m-1)! \int_{2t_0}^{t} \frac{u'(\tau)}{u^n(\tau)}\, d\tau \leqslant c + \frac{2^{m-1}(m-1)!}{n-1}\, u^{1-n}(t_0),$$

что противоречит условию (11). Теорема доказана.

При $m=2$ из доказанной теоремы получается теорема Ф. В. Аткинсона [2].

Теорема 4. *Если m — нечетное число, а функция $a(t)$ неотрицательна при больших t, то для того чтобы любое продолжаемое решение уравнения* (1) *либо колебалось, либо монотонно стремилось к нулю, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int^{\infty} t^{m-1} a(t)\, dt = \infty.$$

Доказательство. Необходимость этого условия следует из теоремы 1. Докажем его достаточность. Пусть $u(t)$ — неколеблющееся решение уравнения (1). Покажем, что $u(t) \in A_0$. Действительно, если допустить, что $u(t) \in A_k$, где $k > 0$, то из тождества (12) найдем $\int^{\infty} a(t) t^{m-1} dt < \infty$, что противоречит условию (11). Таким образом, для завершения доказательства теоремы остается показать, что все решения уравнения (1), принадлежащие классу A_0, стремятся к нулю при $t \to \infty$. Допустим противное, т. е. что уравнение (1) имеет решение $u(t) \in A_0$, такое, что $u(t) \sim c_0 > 0$.

Пусть $u(t) > \frac{c_0}{2}$ при $t \geqslant t_0$. Умножая обе части уравнения (1) на t^{m-1} и интегрируя, находим:

$$t^{m-1} u^{(m-1)}(t) - (m-1) t^{m-2} u^{(m-2)}(t) + \ldots + (m-1)!\, u(t) + \int_{t_0}^{t} a(\tau) \tau^{m-1} u^n(\tau)\, d\tau = c_1.$$

Отсюда, в силу (9), следует:

$$\left(\frac{c_0}{2}\right)^n \int_{t_0}^{t} a(\tau) \tau^{m-1} d\tau \leqslant c_1, \qquad t \geqslant t_0,$$

что противоречит условию (11). Теорема доказана.

Прежде чем перейти к рассмотрению случая, когда $a(t) \leqslant 0$, докажем справедливость следующих лемм.

Лемма 4. *Пусть $u(t)$ — решение уравнения* (1), *определенное на некотором промежутке $[t_0, t_1)$, а $v(t)$ — решение уравнения*

$$\frac{d^m v}{dt^m} + b(t)|v|^n \operatorname{sign} v = 0.$$

Если $a(t) \leqslant -|b(t)|$ и начальные значения функций $u(t)$ и $v(t)$ в точке t_0 удовлетворяют условиям $u_0 \geqslant |v_0|$, $u_0' \geqslant |v_0'|, \ldots, u_0^{(m-1)} \geqslant |v_0^{(m-1)}|$, то при $t \in [t_0, t_1)$ имеем:

$$u^{(k)}(t) - |v^{(k)}(t)| \geqslant \sum_{i=k}^{m-1} \frac{u_0^{(i)} - |v_0^{(i)}|}{(i-k)!} (t-t_0)^{i-k} \quad (k=0, 1, \ldots, m-1). \qquad (13)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$u^{(k)}(t)=\sum_{i=k}^{m-1}\frac{u_0^{(i)}}{(i-k)!}(t-t_0)^{i-k}-\frac{1}{(m-k)!}\int\limits_{t_0}^{t}(t-\tau)^{m-k}a(\tau)\,|\,u(\tau)\,|^n\operatorname{sign}u(\tau)\,d\tau,$$

$$|\,v^{(k)}(t)\,|\leqslant\sum_{i=k}^{m-1}\frac{|\,v_0^{(i)}|}{(i-k)!}(t-t_0)^{i-k}+\frac{1}{(m-k)!}\int\limits_{t_0}^{t}(t-\tau)^{m-k}\,|\,b(\tau)\,|\,|\,v(\tau)\,|^n d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=k}^{m-1}\frac{u_0^{(i)}}{(i-k)!}(t-t_0)^{i-k}-\frac{1}{(m-k)!}\int\limits_{t_0}^{t}(t-\tau)^{m-k}a(\tau)\,|\,v(\tau)\,|^n\,d\tau\quad(k=0,1,\ldots,m-1).$$

Поэтому, в силу леммы 1, $|\,v(t)\,|\leqslant u(t),\ t_0\leqslant t<t_1$.

Отсюда и из предыдущих неравенств непосредственно вытекает справедливость неравенств (13).

Лемма 5. *Если функция $a(t)$ при больших t удовлетворяет неравенству*

$$t^{1+n(m-1)}a(t)\leqslant-\delta, \tag{14}$$

где δ — положительная постоянная, то для любого продолжаемого неколеблющегося решения $u(t)$ уравнения (1) имеем

$$u(t)=O(t^{m-2}). \tag{15}$$

Доказательство. Допустим противное. Пусть уравнение (1) имеет положительное продолжаемое решение $u(t)$, для которого не имеет места оценка (15). Тогда для больших t имеем $u^{(i)}(t)>0$ $(i=0,1,\ldots,m)$. Отсюда следует, что $u(t)\geqslant c_0t^{m-1}$, $t\geqslant t_0$, где t_0 — достаточно большое число. В силу последнего неравенства и условия (14), из уравнения (1) найдем:

$$u^{(m-1)}(t)\geqslant c_0^n\int\limits_{t_0}^{t}|\,a(\tau)\,|\,\tau^{n(m-1)}d\tau\sim\infty. \tag{16}$$

Перепишем уравнение (1) следующим образом: $u^{(m)}=a_1(t)u$, где $a_1(t)=-a(t)u^{n-1}(t)$. Рассмотрим также уравнение $v^{(m)}=b(t)v$, где $b(t)=\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-m+1)t^{-m}$, $\lambda=2\dfrac{1+n(m-1)}{n-1}$.

Если $\varepsilon=\min\left\{t_0^{-\lambda}u(t_0),\ldots,\dfrac{t_0^{m-\lambda}u^{(m-1)}(t_0)}{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-m+2)},\ \delta^{-\frac{2}{n-1}}\right\}$, то для решения $v(t)=\varepsilon t^{\lambda}$ указанного уравнения имеем:

$$u(t_0)\geqslant v(t_0),\quad u'(t_0)\geqslant v'(t_0),\quad\ldots,\quad u^{(m-1)}(t_0)\geqslant v^{(m-1)}(t_0).$$

С другой стороны, согласно (14) и (16), t_0 можно считать настолько большим, что $a(t) \geqslant b(t)$ при $t \geqslant t_0$. Тогда из леммы 4 следует, что $u(t) \geqslant \varepsilon t^\lambda$, $t \geqslant t_0$. В силу этого неравенства, из уравнения (1) находим:

$$u^{(m)}(t) \geqslant u^\mu(t), \quad t \geqslant t_0, \quad \mu = \frac{n+1}{2} > 1.$$

Умножая обе части последнего неравенства на $u'(t)$ и интегрируя, получим:

$$u^{(m-1)}(t)\, u'(t) \geqslant \int_{t_0}^{t} u^{(m-1)}(\tau)\, u''(\tau)\, d\tau + \frac{1}{\mu+1}\left[u^{\mu+1}(t) - u^{\mu+1}(t_0)\right].$$

Считая, что $u^{\mu+1}(t) \geqslant 2u^{\mu+1}(t_0)$ при $t \geqslant t_1$, найдем: $u^{(m-1)}(t)\, u'(t) \geqslant$ $\geqslant \frac{1}{2(\mu+1)} u^{\mu+1}(t)$, $t \geqslant t_1$.

Повторяя этот процесс $m-2$ раз, будем иметь: $u'^{\,m}(t) \geqslant c_1^m u^{\mu+m}(t)$, $t \geqslant t_{m-1}$, где $c_1^{-m} = 2^{m-1}(\mu+1)\ldots(\mu+m-1)$.

Следовательно, $u'(t)\, u^{-1-\frac{\mu}{m}}(t) \geqslant c_1$, $t \geqslant t_{m-1}$. Но это неравенство противоречиво, так как его интегрирование дает:

$$\frac{m}{\mu} u^{-\frac{\mu}{m}}(t_{m-1}) \geqslant c_1(t - t_{m-1}), \quad t \geqslant t_{m-1}.$$

В силу полученного противоречия, лемма доказана.

Теорема 5. *Если m — четное число, а функция $a(t)$ при больших значениях t удовлетворяет неравенству*

$$t^{1+n(m-1)} a(t) \geqslant -\delta,$$

где δ — положительная постоянная, то для того чтобы каждое продолжаемое решение уравнения (1) *либо колебалось, либо монотонно стремилось к нулю, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int^{\infty} a(t)\, t^{m-1}\, dt = -\infty. \tag{17}$$

Доказательство. Необходимость условия следует из теоремы 1. Докажем его достаточность. Пусть $u(t)$ — продолжаемое решение уравнения (1), которое положительно при больших значениях t. Согласно лемме 3, имеются три возможности: $u(t) \in A_{\frac{m}{2}}$; $u(t) \in A_k$, $0 < k \leqslant \frac{m-2}{2}$; $u(t) \in A_0$. В силу неравенства (14) и леммы 5, первая возможность исключается. Покажем, что исключается и вторая возможность. Действительно, в противном случае из тождества (12) получим $\int^{\infty} a(t)\, t^{m-1}\, dt < \infty$, что противоречит условию (17).

Докажем, наконец, что $u(t) \sim 0$. Допустим противное, т. е. что $u(t) \sim c_0 > 0$. Тогда из равенства

$$t^{m-1} u^{(m-1)}(t) - (m-1)\, t^{m-2}\, u^{(m-2)}(t) + \ldots + (m-1)!\, u(t) + \\ + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, \tau^{m-1} u^n(\tau)\, d\tau = c$$

находим $\int^{\infty} t^{m-1}\, |a(t)|\, dt < \infty$, что также противоречит условию (17). Теорема доказана.

Если m — нечетное число, то, в силу тождества (12), существование решения $u(t) \in A_k$, $0 \leqslant k \leqslant \frac{m-3}{2}$, влечет за собой условие $\int^{\infty} a(t)\, t^{m-1}\, dt < \infty$. Следовательно, имеет место

Теорема 6. *Пусть m — нечетное число, а функция $a(t)$ при больших значениях t удовлетворяет неравенству $a(t)\, t^{1+n(m-1)} \leqslant -\delta$, где δ — положительная постоянная. Тогда для колеблемости всех продолжаемых решений уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $\int^{\infty} a(t)\, t^{m-1}\, dt = -\infty$.

§ 3. Критерий колеблемости решений уравнения (1′)

Согласно приведенной выше теореме И. М. Соболя, для существования колеблющегося решения уравнения (1′) необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\int^{\infty} t^{m-1}\, |a(t)|\, dt = \infty.$$

Однако это условие не является достаточным, так как дифференциальное уравнение $u^{(m)} + \frac{a_0}{t^m} u = 0$ не имеет колеблющихся решений, если алгебраическое уравнение $\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-m+1) + a_0 = 0$ не имеет комплексных корней.

Теорема 7. *Пусть m—четное число, а функция $a(t)$ неотрицательна в промежутке* $(0, \infty)$ *и*

$$\int^{\infty} a(t) \frac{t^{m-1}}{\varphi(t)}\, dt = \infty, \tag{18}$$

где $\varphi(t)$—такая абсолютно непрерывная положительная, неубывающая на $(0, \infty)$ *функция, что* $\int^{\infty} \frac{dt}{t\varphi(t)} < \infty$. *Тогда все решения уравнения* (1′) — *колеблющиеся* *.

Доказательство. Допустим противное, т. е. что уравнение (1′) имеет

* В качестве $\varphi(t)$ можно взять, например, функцию $\ln^{-\sigma} t$, где $\sigma > 1$.

неколеблющееся решение $u(t)$. В силу леммы 2, $u(t) \in A_k$, $0 \leqslant k \leqslant \frac{m-2}{2}$. Пусть $u(t) > 0$ при $t \geqslant t_0$ и все производные от функции $u(t)$ до порядка $m-1$ включительно сохраняют знак в этом промежутке. Умножая уравнение (1′) на $\frac{t^{m-1}}{\varphi(t)}u(t)$ и интегрируя, находим:

$$\frac{w(t)}{\varphi(t)\,u(t)} - \int_{2t_0}^{t} w(\tau)\,d\,(\varphi(\tau)\,u(\tau))^{-1} + \int_{2t_0}^{t} a(\tau)\,\frac{\tau^{m-1}}{\varphi(\tau)}\,d\tau =$$

$$= c + (m-1)\ldots(l+1)\,l\int_{2t_0}^{t} \frac{\tau^{l-1}u^{(l)}(\tau)}{\varphi(\tau)\,u(\tau)}\,d\tau, \tag{19}$$

где
$$w(t) = t^{m-1}u^{(m-1)}(t) - (m-1)\,t^{m-2}u^{(m-2)}(t) + \ldots + (m-1)(m-2)\ldots(l+1)\,t^l u^{(l)}(t).$$

Из (9) и (10) следует, что

$$w(t) \geqslant 0, \quad u^{(l)}(t) \leqslant \frac{l!}{(t-t_0)^l}\,u(t) \leqslant \frac{2^l\,l!}{t^l}\,u(t) \text{ при } t \geqslant 2t_0.$$

Отсюда и из (19) найдем: $\int_{2t_0}^{\infty} a(\tau)\,\frac{\tau^{m-1}}{\varphi(\tau)}\,d\tau \leqslant c + m!\,2^m\int_{2t_0}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau\varphi(\tau)} < \infty$,

что противоречит условию (18). Теорема доказана.

Лемма 6. *Пусть $(-1)^m a(t) \leqslant 0$ при $t \geqslant t_0$. Если решение $u(t)$ уравнения (1′) в некоторой точке t_1, $t_1 > t_0$, удовлетворяет условиям*

$$(-1)^i\,u^{(i)}(t_1) \geqslant 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, m-1), \tag{20}$$

то при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ имеем:

$$(-1)^i u^{(i)}(t) \geqslant 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, m-1). \tag{21}$$

Доказательство. Пусть $x = t_1 - t$, $w(x) = u(t)$, тогда из (1′) и (20) находим:

$$\frac{d^m w(x)}{dx^m} + (-1)^m a\,(t_1 - x)\,w(x) = 0, \quad w^{(i)}(0) \geqslant 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Отсюда, в силу леммы 4, следует, что

$$w^{(i)}(x) \geqslant 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, m-1), \quad 0 \leqslant x \leqslant t_1 - t_0,$$

чем и доказывается справедливость неравенств (21).

Лемма 7. *Если $(-1)^m a(t) \leqslant 0$ при $t \geqslant t_0$, то существуют решения уравнения (1′), принадлежащие классу A_0. При этом нетривиальные решения уравнения (1′), имеющие хотя бы один нуль на промежутке $[t_0, \infty)$, не принадлежат классу A_0.*

Доказательство. Пусть $v_k(t)$ — решение уравнения (1′), удовлетворяющее следующим условиям:

$$v_k(k)=v_k'(k)=\ldots=v_k^{(m-2)}(k)=0,\quad v_k^{(m-1)}(k)=(-1)^{m-1}.$$

Рассмотрим последовательность

$$u_k(t)=\left[\sum_{i=0}^{m-1}\left|v_k^{(i)}(t_0)\right|\right]^{-1}v_k(t)\quad (k=1,2,\ldots).$$

В силу леммы 6, ясно, что если $k>t_0$, то решение $u_k(t)$ при $t_0\leqslant t\leqslant k$ удовлетворяет условиям (21). Последовательность точек $(u_k(t_0), u_k'(t_0),\ldots$ $\ldots, u_k^{(m-1)}(t_0))$ m-мерного эвклидова пространства компактна, так как $\sum_{i=0}^{m-1}|u_k^{(i)}(t_0)|=1$. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что она сходится. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty}u_k^{(i)}(t_0)=u_0^{(i)}$ и $u_0(t)$ — решение уравнения (1′), удовлетворяющее начальным условиям: $u_0^{(i)}(t_0)=u_0^{(i)}$ $(i=0,1,\ldots,m-1)$.

Ясно, что $\lim\limits_{k\to\infty}u_k(t)=u_0(t)$, и так как при любом фиксированном k функция $u_k(t)$ удовлетворяет в промежутке $[t_0, k]$ условиям (21), то функция $u_0(t)$ тоже удовлетворяет условиям (21) при $t_0\leqslant t<\infty$. Следовательно, $u_0(t)\in A_0$.

Перейдем к доказательству второй части леммы. Пусть нетривиальное решение $u(t)$ равно нулю в точке t_1; покажем, что $u(t)\notin A_0$. Допустим противное. Тогда можно считать, что функция $u(t)$ положительна при $t>t_1$ и для больших значений t выполняются условия (21). Так как $u'(t_1)\geqslant 0$ и $u'(t)\leqslant 0$ при больших значениях t, то найдется такое число t_2, $t_2\geqslant t_1$, что $u'(t_2)=0$.

Точно так же получим, что $u^{(m-1)}(t_m)=0$ при $t_m\geqslant t_1$. Так как $u(t)>0$ при $t>t_m$, то из (1′) следует, что $(-1)^{m-1}u^{(m-1)}(t)\leqslant 0$, $t\geqslant t_m$. Это неравенство вместе с условиями (21) означает, что $u(t)\equiv u(t_m)>0$ при $t\geqslant t_m$. Но отсюда, в силу леммы 6, следует, что $u(t)\geqslant u(t_m)$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_m)$, что невозможно, так как мы предполагали, что $u(t_1)=0$. Получили противоречие, следовательно, лемма 7 доказана*.

Лемма 8. *Если $(-1)^m a(t)\leqslant 0$ при $t\geqslant t_0$, то для того чтобы все решения уравнения (1′), принадлежащие классу A_0, стремились к нулю при $t\to\infty$ вместе со своими производными до порядка $m-1$ включительно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int^{\infty}|a(t)|\,t^{m-1}dt=\infty. \qquad (22)$$

* Доказательство этой леммы имеет много общего с доказательствами лемм 2 и 4 из статьи [6] В. А. Кондратьева.

Доказательство. Если $\int\limits^{\infty} |a(t)| t^{m-1} dt < \infty$, то, в силу теоремы 1, уравнение (1′) имеет не стремящееся к нулю решение $u_0(t) \in A_0$. Этим необходимость условия (22) доказана. Докажем, что оно является и достаточным. В самом деле, если допустим, что $u(t) \in A_0$ и $u(t) \geqslant c_0 > 0$ при $t \geqslant t_1$, то из равенства

$$t^{m-1} u^{(m-1)}(t) - (m-1) t^{m-2} u^{(m-2)}(t) + \ldots + (-1)^{m-1} (m-1)!\, u(t) + \\ + \int\limits_{t_1}^{t} a(\tau) \tau^{m-1} u(\tau)\, d\tau = c$$

находим $\int\limits^{\infty} |a(t)| t^{m-1} dt < \infty$, что противоречит условию (22).

Итак, $u(t) \sim 0$. В силу этого, из условий (21) заключаем, что и $u^{(i)}(t) \sim 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$.

Допустим теперь, что m — нечетное число, а также что $a(t) \geqslant 0$ и удовлетворяет равенству (18). Тогда точно так же, как и выше, с помощью равенства (19) заключаем, что решения уравнения (1′), не принадлежащие классу A_0, — колеблющиеся. С другой стороны, из леммы 8 следует, что все решения уравнения (1′), принадлежащие классу A_0, стремятся к нулю вместе со своими производными до порядка $m-1$ включительно.

Пусть $u_1(t)$ — принадлежащее классу A_0 решение уравнения (1′). Согласно лемме 7, $u_1(t_0) \neq 0$. Пусть $u_i(t)$ $(i = 2, \ldots, m)$ — решение уравнения (1′) с начальными условиями $u_i^{(j-1)}(t_0) = \delta_{ij}$ $(j = 1, 2, \ldots, m;\ i = 2, 3, \ldots, m)$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Из леммы 7 следует, что решения $u_i(t)$ $(i = 2, \ldots, m)$ — колеблющиеся. С другой стороны, ясно, что $u_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ линейно независимы, так как детерминант Вронского для этих решений в точке t_0 равен $u_1(t_0)$.

Таким образом, мы доказали справедливость следующего утверждения.

Теорема 8. *Пусть m — нечетное число, а функция $a(t)$ неотрицательна и удовлетворяет условию* (18). *Тогда любое решение уравнения* (1′) *либо колеблющееся, либо монотонно стремится к нулю при $t \to \infty$ вместе со своими производными до порядка $m-1$ включительно. При этом существует фундаментальная система решений, такая, что одно из входящих в нее решений стремится к нулю, а остальные — колеблющиеся.*

Когда $\varphi(t) = t^{m-1}$ и $\varphi(t) = t$, из теорем 7 и 8 получаются соответственно теоремы А. Кнезера [5] и Г. В. Ананьевой и В. И. Балаганского [1], а когда $m = 3$, $\varphi(t) = t^{\alpha}$, где $\alpha > 0$, — теорема К. Виллари [3].

Теорема 9. *Пусть m — четное число, $a(t) \leqslant 0$ и*

$$\int\limits^{\infty} a(t) \frac{t^{m-1}}{\varphi(t)}\, dt = -\infty, \tag{23}$$

где $\varphi(t)$ абсолютно непрерывна, положительна, не убывает и $\int\limits^{\infty} \frac{dt}{t\varphi(t)} < \infty$.

Тогда любое решение уравнения $(1')$ — *либо колеблющееся, либо монотонно стремится к нулю или к бесконечности при* $t \to \infty$ *вместе со своими производными до порядка* $m-1$ *включительно. При этом существует фундаментальная система решений, такая, что одно из входящих в нее решений стремится к нулю, другое — к бесконечности, а остальные — колеблющиеся.*

Доказательство. Пусть $u(t)$ — неколеблющееся решение уравнения $(1')$. Из леммы 3 следует, что $u(t) \in A_k$, $0 \leqslant k \leqslant \frac{m}{2}$. Учитывая равенство (23), с помощью тождества (19) заключаем, что $u(t) \in A_k$ при $k = 0, \frac{m}{2}$. Если $u(t) \in A_0$, то, в силу леммы 8, $u^{(i)}(t) \sim 0$ $(i = 0, 1, \dots m-1)$. Если же $u(t) \in A_{\frac{m}{2}}$, то $u^{(i)}(t) \geqslant 0$ $(i = 0, 1, \dots, m)$ при $t \geqslant t_1$. Следовательно, $u^{(i)}(t) \geqslant \frac{u^{(m-1)}(t_1)}{(m-1-i)!}(t-t_1)^{m-1-i} \sim \infty$ $(i = 0, 1, \dots, m-2)$. В силу этого, из $(1')$ легко находим, что $u^{(m-1)}(t) \sim \infty$.

Следуя В. А. Кондратьеву [6], построим фундаментальную систему решений. Пусть $v_i(t)$ — решение уравнения $(1')$ с начальными условиями $v_i^{(j-1)}(t_0) = \delta_{ij}$ $(j = 1, 2, \dots, m)$. В силу леммы 4, имеем $v_i(t) \in A_{\frac{m}{2}}$ $(i = 1, 2, \dots, m)$. Рассмотрим последовательность

$$v_{ik}(t) = \frac{v_m(k)\, v_i(t) - v_i(k)\, v_m(t)}{|v_i(k)| + |v_m(k)|} \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{24}$$

Так как $\sum_{j=0}^{m-1} |v_{ik}^{(j)}(t_0)| = 1$ $(k = 1, 2, \dots)$, то без ограничения общности можем считать, что $\lim_{k\to\infty} v_{ik}^{(j)}(t_0) = v_{i0}^{(j)}$ $(j = 0, 1, \dots, m-1)$. Пусть $u_i(t)$, $2 \leqslant i \leqslant m-1$, — решение уравнения $(1')$, удовлетворяющее начальным условиям $u_i^{(j)}(t_0) = v_{i0}^{(j)}$ $(j = 0, 1, \dots, m-1)$.

Покажем, что $u_i(t)$ — колеблющееся решение. В силу доказанного выше, для этого достаточно установить, что $u_i(t) \notin A_0$ и $u_i(t) \notin A_{\frac{m}{2}}$. Так как $u_i(t_0) = 0$, то, в силу леммы 7, $u_i(t) \notin A_0$. Если допустить, что $u_i(t) \in A_{\frac{m}{2}}$, то, изменив в случае необходимости знак у $u_i(t)$, при $t \geqslant t_1$ получим $u_i^{(j)}(t) > 0$ $(j = 0, 2, \dots, m-1)$. Поэтому, если k — достаточно большое число, то

$$v_{ik}^{(j)}(t_1) > 0 \quad (j = 0, 1, \dots, m-1).$$

Отсюда, в силу леммы 4, следует $v_{ik}(t) > 0$ при $t \geqslant t_1$, что невозможно, так как $v_{ik}(k) = 0$.

Итак мы доказали, что решение $u_i(t)$ $(i = 2, \dots, m-1)$ — колеблющееся. Из (24) следует, что $u_i(t) = \alpha_i v_i(t) + \beta_i v_m(t)$ $(i = 2, \dots, m-1)$. Так как $u_i(t)$ — колеблющееся решение, а $v_i(t)$ и $v_m(t)$ монотонны, то ясно, что $\alpha_i \neq 0$, $\beta_i \neq 0$ $(i = 2, \ldots, m-1)$.

Пусть $u_1(t)$ — решение уравнения (1′), принадлежащее классу A_0, тогда $u_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, где $u_m(t) = v_m(t)$, — искомая фундаментальная система, так как детерминант Вронского для этих решений в точке t_0 равен $\alpha_2 \ldots \alpha_{m-1} u_1(t_0) \neq 0$. Теорема доказана.

Случай, когда m нечетно и соблюдаются условия (23), рассматривается совершенно аналогично. При этом, как легко убедиться из равенства (19), в этом случае уравнение (1′) не имеет решения, принадлежащего классу A_0. Таким образом, справедлива

Теорема 10. *Пусть m — нечетное число и соблюдаются условия теоремы 9. Тогда любое решение уравнения* (1′) *либо колеблющееся, либо монотонно стремится к бесконечности при $t \to \infty$ вместе со своими производными до порядка $m - 1$ включительно. При этом существует фундаментальная система решений, такая, что одно из входящих в нее решений стремится к бесконечности, а остальные — колеблющиеся.*

Теоремы 9 и 10 для случая $\varphi(t) = t$ были доказаны В. А. Кондратьевым [6].

(Поступило в редакцию 18/IV 1963 г.)

Литература

1. Г. В. Ананьева, В. И. Балаганский, О колеблемости решений некоторых дифференциальных уравнений высшего порядка, Успехи матем. наук, т. **XIV**, вып. **1** **(95)** (1959), 135—140.
2. F. V. Atkinson, On second order non-linear oscillations, Pacific J. Math., **5** (1955), 643—647.
3. C. Villari, Contributi allo studio asintotico dell' equazione $x'''(t) + p(t)x(t) = 0$, Ann. mat. pura ed appl., **51** (1960), 301—328.
4. И. Т. Кигурадзе, О колеблемости решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений, ДАН СССР, т. **144**, № **1** (1962), 33—36.
5. A. Kneser, Untersuchungen über die reelen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen, Math. Ann., **42**, № **3** (1893), 409—435.
6. В. А. Кондратьев, О колеблемости решений уравнения $y^{(n)} + p(x)y = 0$, Труды Моск. матем. об-ва, т. **10** (1961), 419—436.
7. И. М. Соболь, Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений, ДАН СССР, т. **61**, № **2** (1948), 219—222.