ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2006, том 42, № 2, с. 153–158

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.21

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© 2006 г. С. Р. Басландзе, И. Т. Кигурадзе

Настоящая работа посвящена исследованию периодической краевой задачи

$$u''' = p_1(t)u + p_2(t)u' + p_3(t)u'' + q(t), \tag{1}$$

$$u^{(i-1)}(b) = u^{(i-1)}(a) + c_i \quad (i = 1, 2, 3), \tag{2}$$

где $-\infty < a < b < +\infty$, c_i $(i = 1, 2, 3)$ – вещественные постоянные, а $p_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ и $q : [a, b] \to \mathbb{R}$ суть интегрируемые по Лебегу функции.

Через $\widetilde{C}$ обозначим пространство абсолютно непрерывных функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}$, а через $\widetilde{C}^1$ – пространство функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}$, абсолютно непрерывных вместе со своей первой производной. Запись $x(t) \not\equiv y(t)$ будет означать, что функции x и y отличны друг от друга на множестве положительной меры.

Ниже рассмотрены случаи, когда существует число $\sigma \in \{-1, 1\}$ такое, что

$$\sigma p_1(t) \ge 0 \quad \text{при} \quad a \le t \le b, \quad p(t) \not\equiv 0 \tag{3}$$

и выполнено одно из следующих четырех условий:

$$p_2 \in \widetilde{C}, \quad p_3 \in \widetilde{C}^1, \quad \sigma(p_2(b) - p_2(a)) \ge 0, \quad p_3(b) = p_3(a), \quad \sigma(p_3'(b) - p_3'(a)) \le 0, \tag{4_1}$$

$$p_1 \in \widetilde{C}, \quad p_3 \in \widetilde{C}^1, \quad p_1(b) \ge p_1(a), \quad p_3(b) = p_3(a), \quad \sigma(p_3'(b) - p_3'(a)) \le 0, \tag{4_2}$$

$$p_1 \in \widetilde{C}^1, \quad p_2 \in \widetilde{C}, \quad p_1(b) = p_1(a), \quad \sigma(p_1'(b) - p_1'(a)) \le 0, \quad \sigma(p_2(b) - p_2(a)) \ge 0, \tag{4_3}$$

$$p_1 \in \widetilde{C}^1, \quad p_2 \in \widetilde{C}, \quad p_1(b) = p_1(a), \quad \sigma(p_1'(b) - p_1'(a)) \ge 0, \quad \sigma(p_2(b) - p_2(a)) \le 0. \tag{4_4}$$

В этих случаях найдены отличные от известных ранее (см. [1–14] и приведенную там библиографию) в определенном смысле неулучшаемые признаки однозначной разрешимости задачи (1), (2).

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим соответствующую однородную задачу

$$u''' = p_1(t)u + p_2(t)u' + p_3(t)u'', \tag{1_0}$$

$$u^{(i-1)}(b) = u^{(i-1)}(a) \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2_0}$$

Пусть эта задача имеет нетривиальное решение u. Если обе части уравнения (1_0) поочередно умножим на $\sigma u(t)$, $\sigma u''(t)$, $-u'(t)$ и проинтегрируем от a до b, то с учетом условия (3) соответственно получим

$$\int_a^b |p_1(t)| u^2(t)\, dt + \sigma \int_a^b p_2(t) u'(t) u(t)\, dt + \sigma \int_a^b p_3(t) u''(t) u(t)\, dt = 0, \tag{5}$$

$$\sigma \int_a^b p_3(t) u''^2(t)\, dt + \sigma \int_a^b p_2(t) u'(t) u''(t)\, dt + \int_a^b |p_1(t)| u(t) u''(t)\, dt = 0, \tag{6}$$

$$\int_a^b u''^2(t)\,dt + \int_a^b p_1(t)u(t)u'(t)\,dt + \int_a^b p_2(t)u'^2(t)\,dt + \int_a^b p_3(t)u''(t)u'(t)\,dt = 0. \tag{7}$$

С другой стороны, если $i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{1,2\}$ и $p_i \in \widetilde{C}$, то имеем

$$\int_a^b p_i(t)u^{(j-1)}(t)u^{(j)}(t)\,dt = \frac{1}{2}\,(p_i(b) - p_i(a))[u^{(j-1)}(a)]^2 - \frac{1}{2}\int_a^b p_i'(t)[u^{(j-1)}(t)]^2\,dt.$$

Если же $i \in \{1,3\}$, $p_i \in \widetilde{C}^1$ и $p_i(b) = p_i(a)$, то

$$\int_a^b p_i(t)u(t)u''(t)\,dt = \frac{1}{2}\,(p_i'(a) - p_i'(b))u'^2(a) + \frac{1}{2}\int_a^b p_i''(t)u^2(t)\,dt - \int_a^b p_i(t)u'^2(t)\,dt.$$

Поэтому в случае, когда выполнено условие (4_1), из равенств (5) и (6) находим

$$\int_a^b \left(|p_1(t)| - \frac{\sigma}{2}\,p_2'(t) + \frac{\sigma}{2}\,p_3''(t)\right)u^2(t)\,dt \le \sigma\int_a^b p_3(t)u'^2(t)\,dt, \tag{8_1}$$

$$\sigma\int_a^b p_3(t)u''^2(t)\,dt \le \frac{\sigma}{2}\int_a^b p_2'(t)u'^2(t)\,dt - \int_a^b |p_1(t)|u(t)u''(t)\,dt, \tag{9_1}$$

а в случае, когда выполнено условие (4_2), из равенств (5) и (7) имеем

$$\int_a^b \left(|p_1(t)| + \frac{\sigma}{2}\,p_3''(t)\right)u^2(t)\,dt \le -\sigma\int_a^b p_2(t)u'(t)u(t)\,dt + \sigma\int_a^b p_3(t)u'^2(t)\,dt, \tag{8_2}$$

$$\int_a^b u''^2(t)\,dt \le \frac{1}{2}\int_a^b p_1'(t)u^2(t)\,dt - \int_a^b \left[p_2(t) - \frac{1}{2}\,p_3'(t)\right]u'^2(t)\,dt. \tag{9_2}$$

Аналогично если выполнено условие (4_3), то из равенств (5) и (6) вытекает, что

$$\int_a^b \left(|p_1(t)| - \frac{\sigma}{2}\,p_2'(t)\right)u^2(t)\,dt \le -\sigma\int_a^b p_3(t)u''(t)u(t)\,dt, \tag{8_3}$$

$$\sigma\int_a^b p_3(t)u''^2(t)\,dt \le \int_a^b \left(|p_1(t)| + \frac{\sigma}{2}\,p_2'(t)\right)u'^2(t)\,dt - \frac{\sigma}{2}\int_a^b p_1''(t)u^2(t)\,dt. \tag{9_3}$$

Если же выполнено условие (4_4), то из равенства (6) получаем неравенство

$$\int_a^b \left(|p_1(t)| + \frac{\sigma}{2}\,p_2'(t)\right)u'^2(t)\,dt - \frac{\sigma}{2}\int_a^b p_1''(t)u^2(t)\,dt - \sigma\int_a^b p_3(t)u''^2(t)\,dt \le 0. \tag{9_4}$$

Покажем теперь, что

$$\int_a^b u''^2(t)\,dt > 0. \tag{10}$$

В самом деле, в противном случае, согласно условию (2_0), имели бы $u(t) \equiv c_0 = \text{const} \neq 0$ и, следовательно, $p_1(t)c_0 \equiv 0$. Но это противоречит условию (3).

Тем самым мы доказали, что справедлива

Лемма 1. *Пусть функция p_1 удовлетворяет условию (3) и задача (1_0), (2_0) имеет нетривиальное решение u. Если, кроме того, при некотором $k \in \{1, 2, 3\}$ выполнено условие (4_k), то u удовлетворяет неравенствам (8_k), (9_k) и (10). Если же выполнено условие (4_4), то u удовлетворяет неравенствам (9_4) и (10).*

Введем используемые всюду ниже обозначения

$$d \equiv \frac{b-a}{2\pi}.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (3), (4_1) и, кроме того, либо*

$$\sigma(p_2'(t) - p_3''(t)) \leq 2|p_1(t)|, \quad \sigma p_3(t) \leq 0 \quad \text{при} \quad a < t < b, \quad p_2'(t) - p_3''(t) \not\equiv 2p_1(t), \tag{11}$$

либо существуют постоянные $\delta \in]0,1]$, $\ell_1 > 0$, $\ell_2 \geq 0$, $\ell_3 > 0$, $\ell \in]0, \ell_3]$ такие, что

$$\sigma(p_2'(t) - p_3''(t)) \leq 2(1-\delta)|p_1(t)|, \quad |p_1(t)| < \ell_1 \quad \text{при} \quad a < t < b, \tag{12}$$

$$\sigma p_2'(t) \leq 2\ell_2, \quad \ell \leq \sigma p_3(t) \leq \ell_3 \quad \text{при} \quad a < t < b, \tag{13}$$

$$d(\ell_1\ell_3/\delta)^{1/2} + d^2\ell_2 \leq \ell. \tag{14}$$

Тогда задача (1), (2) имеет одно и только одно решение.

Доказательство. Допустим противное, что теорема неверна. Тогда однородная задача (1_0), (2_0) имеет нетривиальное решение u, которое по лемме 1 удовлетворяет неравенствам (8_1), (9_1) и (10).

В случае, когда наряду с (3) и (4_1) выполнено условие (11), неравенство (8_1) приводит к противоречию:

$$0 < \int_a^b \left(|p_1(t)| - \frac{\sigma}{2}\, p_2'(t) + \frac{\sigma}{2}\, p_3''(t)\right) u^2(t)\, dt \leq 0.$$

Перейдем к рассмотрению случая, когда наряду с (3) и (4_1) выполнены условия (12)–(14). Тогда из (8_1) получаем неравенство

$$\delta \int_a^b |p_1(t)| u^2(t)\, dt \leq \ell_3 \int_a^b u'^2(t)\, dt.$$

Отсюда в силу теоремы Виртингера (см. [15, теорема 258]) вытекает, что

$$\int_a^b |p_1(t)| u^2(t)\, dt \leq \frac{\ell_3}{\delta}\, d^2 \int_a^b u''^2(t)\, dt. \tag{15}$$

Если наряду с неравенствами (10) и (12)–(15) применим неравенства Шварца и Виртингера, то из (9_1) найдем, что

$$\ell \int_a^b u''^2(t)\, dt \leq \ell_2 \int_a^b u'^2(t)\, dt + \left(\int_a^b p_1^2(t) u^2(t)\, dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b u''^2(t)\, dt\right)^{1/2} <$$

$$< \ell_2 \int_a^b u'^2(t)\, dt + \ell_1^{1/2} \left(\int_a^b |p_1(t)| u^2(t)\, dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b u''^2(t)\, dt\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left[d^2\ell_2 + d\left(\frac{\ell_1\ell_3}{\delta}\right)^{1/2}\right]\int\limits_a^b u''^2(t)\,dt \leq \ell\int\limits_a^b u''^2(t)\,dt.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

В случае, когда $p_i(t) \equiv p_i = \mathrm{const}$ $(i = 2, 3)$, т.е. когда уравнение (1) имеет вид

$$u''' = p_1(t)u + p_2u' + p_3u'' + q(t), \tag{1_1}$$

из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть выполнено условие (3) и, кроме того, либо* $\sigma p_3 \leq 0$, *либо*

$$\sigma p_3 > 0, \quad |p_1(t)| < d^{-2}|p_3| \quad \textit{при} \quad a < t < b. \tag{16}$$

Тогда задача (1_1), *(2) имеет одно и только одно решение.*

Замечание 1. Если

$$p_1(t) \equiv d^{-2}p_3, \quad p_2(t) \equiv -d^{-2}, \quad p_3(t) \equiv p_3 \neq 0, \tag{17}$$

то выполнены условия (3), (4_1), (13) и (14), где $\sigma = \operatorname{sgn} p_3$, $\delta = 1$, $\ell_1 = d^{-2}|p_3|$, $\ell_2 = 0$, $\ell = \ell_3 = |p_3|$, а вместо (12) и (16) соответственно имеем

$$\sigma(p_2'(t) - p_3''(t)) \leq 2(1-\delta)|p_1(t)|, \quad |p_1(t)| \leq \ell_1 \quad \text{при} \quad a < t < b, \tag{12$'$}$$

$$\sigma p_3 > 0, \quad |p_1(t)| \leq \ell_1 \quad \text{при} \quad a < t < b. \tag{16$'$}$$

Тем не менее однородная задача (1_0), (2_0) имеет нетривиальное решение

$$u(t) = \sin\frac{2\pi(t-a)}{b-a}.$$

Следовательно, в теореме 1 (в следствии 1) условие (12) (условие (16)) является неулучшаемым в том смысле, что его нельзя заменить условием $(12')$ (условием $(16')$).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (3),* (4_2) *и, кроме того, существуют постоянные* $\delta \in]0, 1]$, $\ell_i \geq 0$ $(i = 1, 2, 3)$, $\ell \geq 0$ *такие, что*

$$p_1'(t) \leq 2\ell_1|p_1(t)|, \quad 2p_2(t) - p_3'(t) > -2\ell \quad \textit{при} \quad a < t < b, \tag{18}$$

$$\ell_1p_2^2(t) \leq \ell_2|p_1(t)|, \quad \sigma\ell_1p_3(t) \leq \ell_3, \quad \ell p_3''(t) \geq -2(1-\delta)|p_1(t)| \quad \textit{при} \quad a < t < b, \tag{19}$$

$$\ell + (\delta^{-1}\ell_2^{1/2} + \delta^{-1/2}\ell_3^{1/2})^2 \leq d^{-2}. \tag{20}$$

Тогда задача (1), (2) имеет одно и только одно решение.

Доказательство. Допустим противное, что теорема неверна. Тогда задача (1_0), (2_0) имеет нетривиальное решение u, которое по лемме 1 удовлетворяет неравенствам (8_2), (9_2) и (10).

В силу условия (19) и неравенства Шварца, из (8_2) вытекает, что

$$\ell_1\int\limits_a^b |p_1(t)|u^2(t)\,dt \leq \delta^{-1}\ell_2^{1/2}\ell_1^{1/2}\int\limits_a^b |p_1(t)|^{1/2}\,|u(t)|\,|u'(t)|\,dt + \delta^{-1}\ell_3\int\limits_a^b u'^2(t)\,dt \leq$$

$$\leq \delta^{-1}\ell_2^{1/2}\left(\ell_1\int\limits_a^b |p_1(t)|u^2(t)\,dt\right)^{1/2}\left(\int\limits_a^b u'^2(t)\,dt\right)^{1/2} + \delta^{-1}\ell_3\int\limits_a^b u'^2(t)\,dt$$

и, следовательно,

$$\ell_1\int\limits_a^b |p_1(t)|u^2(t)\,dt \leq (\delta^{-1}\ell_2^{1/2} + \delta^{-1/2}\ell_3^{1/2})^2\int\limits_a^b u'^2(t)\,dt.$$

Если наряду с последним неравенством учтем условия (10), (18), (20) и применим теорему Виртингера, то из (9_2) найдем

$$\int\limits_a^b u''^2(t)\,dt < \ell_1 \int\limits_a^b |p_1(t)|u^2(t)\,dt + \ell \int\limits_a^b u'^2(t)\,dt \le$$

$$\le [\ell + (\delta^{-1}\ell_2^{1/2} + \delta^{-1/2}\ell_3^{1/2})^2] \int\limits_a^b u'^2(t)\,dt \le \int\limits_a^b u''^2(t)\,dt.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Из доказанной теоремы для дифференциального уравнения

$$u''' = p_1 u + p_2(t)u' + p_3 u + q(t), \tag{1_2}$$

где p_1 и p_3 постоянные, вытекает

Следствие 2. *Если* $p_1 \ne 0$ *и*

$$p_2(t) > -d^{-2} \quad \textit{при} \quad a < t < b, \tag{21}$$

то задача (1_2), *(2) имеет одно и только одно решение.*

Замечание 2. Если выполнено условие (17), то выполнены и условия (3), (4_2), (19) и (20), где $\sigma = \operatorname{sgn} p_3$, $\delta = 1$, $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 0$, $\ell = d^{-2}$, а вместо (18) и (21) соответственно имеем

$$p_1'(t) \le 2\ell_1|p_1(t)|, \quad 2p_2(t) - p_3'(t) \ge -\ell \quad \text{при} \quad a < t < b, \tag{18$'$}$$

$$p_2(t) \ge -\ell \quad \text{при} \quad a < t < b. \tag{21$'$}$$

С другой стороны, в этом случае однородная задача (1_0), (2_0) имеет нетривиальное решение $u(t) = \sin(2\pi(t-a)/(b-a))$. Следовательно, в теореме 2 (в следствии 2) условие (18) (условие (21)) является неулучшаемым в том смысле, что его нельзя заменить условием $(18')$ (условием $(21')$).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (3),* (4_3) *и, кроме того, существуют постоянные* $\delta \in]0,1]$, $\ell_i \ge 0$ $(i = 1,2,3)$, $\ell \ge 0$ *такие, что*

$$\sigma p_1''(t) \le \ell_1|p_1(t)|, \quad |p_1(t)| + \frac{\sigma}{2}p_2'(t) \le \ell_2 \quad \textit{при} \quad a < t < b, \tag{22}$$

$$\sigma p_2'(t) \ge 2(1-\delta)|p_1(t)|, \quad \ell_1 p_3^2(t) \le \ell_3|p_1(t)| \quad \textit{при} \quad a < t < b, \tag{23}$$

$$\sigma p_3(t) > \ell \quad \textit{при} \quad a < t < b, \tag{24}$$

$$d^2\ell_2 + \delta^{-2}\ell_3 \le \ell. \tag{25}$$

Тогда задача (1), (2) имеет одно и только одно решение.

Доказательство. Допустим противное, что теорема неверна. Тогда однородная задача (1_0), (2_0) имеет нетривиальное решение u, которое по лемме 1 удовлетворяет неравенствам (8_3), (9_3) и (10).

Согласно условию (23) и неравенству Шварца, из (8_3) получаем неравенство

$$\ell_1^{1/2} \int\limits_a^b |p_1(t)|u^2(t)\,dt \le \delta^{-1}\ell_3^{1/2} \Bigg(\int\limits_a^b |p_1(t)|u^2(t)\,dt\Bigg)^{1/2} \Bigg(\int\limits_a^b u''^2(t)\,dt\Bigg)^{1/2}.$$

Поэтому

$$\ell_1 \int\limits_a^b |p_1(t)|u^2(t)\,dt \le \delta^{-2}\ell_3 \int\limits_a^b u''^2(t)\,dt.$$

Если наряду с этим неравенством учтем условия (10), (22), (24), (25) и применим теорему Виртингера, то из (9_3) найдем, что

$$\ell \int_a^b u''^2(t)\,dt < \ell_2 \int_a^b u'^2(t)\,dt + \ell_1 \int_a^b |p_1(t)| u^2(t)\,dt \le [d^2\ell_2 + \delta^{-2}\ell_3] \int_a^b u''^2(t)\,dt \le \ell \int_a^b u''^2(t)\,dt.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Аналогично этой теореме доказывается и

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (3), (4_4) и, кроме того,*

$$\sigma p_1''(t) \le 0, \quad |p_1(t)| + \frac{\sigma}{2}\,p_2'(t) > 0, \quad \sigma p_3(t) \le 0 \quad \textit{при} \quad a < t < b.$$

Тогда задача (1), (2) имеет одно и только одно решение.

Для дифференциального уравнения

$$u''' = p_1 u + p_2 u' + p_3(t) u, \tag{1_3}$$

где p_1 и p_2 постоянные, из теорем 3 и 4 вытекает

Следствие 3. *Пусть* $p_1 \ne 0$ *и либо*

$$p_1 p_3(t) \le 0 \quad \textit{при} \quad a < t < b,$$

либо

$$p_3(t)\operatorname{sgn} p_1 > d^2|p_1| \quad \textit{при} \quad a < t < b. \tag{26}$$

Тогда задача (1_3), *(2) имеет одно и только одно решение.*

Замечание 3. Как отмечено выше, если выполнено условие (17), то однородная задача (1_0), (2_0) имеет нетривиальное решение. Отсюда следует, что в теореме 3 (в следствии 3) условие (24) (условие (26)) нельзя заменить условием

$$\sigma p_3(t) \ge \ell \quad \text{при} \quad a < t < b \quad (p_3(t)\operatorname{sgn} p_1 \ge d^2|p_1| \quad \text{при} \quad a < t < b).$$

Работа поддержана фондом INTAS (проект 03-51-5007).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lasota A., Opial Z.* // Ann. Polon. Math. 1964. V. 16. № 1. P. 69–94.
2. *Bernfeld S.R., Lakshmikantham V.* An introduction to nonlinear boundary value problems. New York; London, 1974.
3. *Gaines R.E., Mawhin J.L.* Coincidence degree and nonlinear differential equations. Berlin; Heidelberg; New York, 1977.
4. *Кипнис Л.А.* // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41. Вып. 2. С. 362–365.
5. *Bates F.W., Ward Y.R.* // Pacific J. Math. 1979. V. 84. № 2. P. 275–282.
6. *Кигурадзе И.Т.* // Мат. заметки. 1985. Т. 37. Вып. 1. С. 48–62.
7. *Гегелиа Г.Т.* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 3. С. 390–396.
8. *Gegelia G.T.* // Colloq. Math. Soc. János Bolyai. 53. Qual. Theory Differ. Equations. Szeged. 1986. P. 211–217.
9. *Kiguradze T.* // Mem. Differential Equations Math. Phys. 1994. V. 1. P. 1–144.
10. *Кигурадзе И.Т.* Начальная и краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I. Линейная теория. Тбилиси, 1997.
11. *Кигурадзе И.Т., Кусано Т.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 72–78.
12. *Кигурадзе И.Т., Кусано Т.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 10. С. 1301–1306.
13. *Kiguradze I.* // Nonlinear Anal. 2000. V. 40. № 1–8. P. 309–321.
14. *Kiguradze I., Puža B.* Boundary value problems for systems of linear functional differential equations. Brno, 2003.
15. *Харди Г.Г., Литтлвуд Дж.У., Полиа Г.* Неравенства. М., 1948.

Математический институт им. А. Размадзе АН Грузии,
г. Тбилиси

Поступила в редакцию
01.06.2005 г.