О. Джохадзе, Б. Мидодашвили, Пространственные гиперболические уравнения высокого порядка с доминированными младшими членами, *Изв. вузов. Матем.*, 2006, номер 6, 25–34

И З В Е С Т И Я В Ы С Ш И Х У Ч Е Б Н Ы Х З А В Е Д Е Н И Й

2006 МАТЕМАТИКА № 6 (529)

УДК 517.929

О. ДЖОХАДЗЕ, Б. МИДОДАШВИЛИ

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ДОМИНИРОВАННЫМИ МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

1. Введение

В данной работе изучается общий класс пространственных гиперболических уравнений в частных производных высокого порядка с доминированными младшими членами [1] вида

$$\frac{\partial^m u(x)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}+\sum_{\substack{|\alpha|\le m-1\\ \alpha_i\le k_i,\ i=1,\dots,n}} a^\alpha(x)\frac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}=f(x),\quad x\in D, \tag{1.1}$$

где $m=\sum\limits_{i=1}^n k_i$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $|\alpha|=\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i$, $m\in\mathbb{N}$ и k_i, α_i, $i=1,\dots,n$, — неотрицательные целые числа.

Уравнение (1.1) является гиперболическим, для которого плоскости $x_i=\text{const}$, $i=1,2,3$, являются характеристическими, а направления координатных осей — бихарактеристическими.

Дифференциальные уравнения в частных производных высокого порядка с доминированными младшими членами встречаются при изучении математических моделей некоторых природных и физических процессов [2]–[8].

Частные случаи этих уравнений для $m=3$ и $n=3$ изучены в работах [8]–[11], для $m=4$ и $n=3$ — в [8], [12], для произвольного положительного m и $n=2$ — в [7], а для $k_i=1$, $i=1,\dots,n$, и n произвольного в [8], [13], [14]. Ниже изучается случай для произвольного m и $n=3$.

Введено определение функции Римана, доказана ее корректность для вышеупомянутых уравнений и дано интегральное представление решения характеристической задачи Гурса.

2. Задача Гурса для уравнения (1.1) в случае непрерывных коэффициентов

В пространстве независимых переменных $x:=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ для $j=1,2,3$ введем обозначение

$$D_{x_j}^i=\begin{cases}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^i, & i=1,2,\dots;\\ 1, & i=0;\\ \Bigl(\int\limits_{x_j^0}^{x_j}\Bigr)^{-i}, & i=-1,-2,\dots,\end{cases}$$

где $x^0:=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)\in R^3$ — произвольная фиксированная точка. Пусть также $D^{l,m,n}:=D_{x_1}^lD_{x_2}^mD_{x_3}^n$, $l,m,n=0,1,\dots$, и символ $C^{l,m,n}$ означает класс функций, которые непрерывны вместе со своими частными производными $D_{x_1}^i$, $D_{x_2}^j$, $D_{x_3}^k$, $0\le i\le l$, $0\le j\le m$, $0\le k\le n$.

Предположим, что $l, m, n \in \mathbb{N}$ и выполнены следующие условия согласованности:

$$
\begin{gathered}
D^{0\,j\,k}\varphi^i_{011}\big|_{x_2=x_2^0,\ x_3=x_3^0} = D^{i\,0\,k}\varphi^j_{101}\big|_{x_1=x_1^0,\ x_3=x_3^0} = D^{i\,j\,0}\varphi^k_{110}\big|_{x_1=x_1^0,\ x_2=x_2^0},\\
D^{0\,j\,k}\varphi^i_{011}\big|_{x_2=x_2^0} = D^{i\,0\,k}\varphi^j_{101}\big|_{x_1=x_1^0}, \quad D^{i\,0\,k}\varphi^j_{101}\big|_{x_3=x_3^0} = D^{i\,j\,0}\varphi^k_{110}\big|_{x_2=x_2^0},\\
D^{0\,j\,k}\varphi^i_{011}\big|_{x_3=x_3^0} = D^{i\,j\,0}\varphi^k_{110}\big|_{x_1=x_1^0},\\
i = 0,1,\dots,l-1, \quad j = 0,1,\dots,m-1, \quad k = 0,1,\dots,n-1.
\end{gathered}
$$

Для уравнения

$$
\begin{gathered}
Lu := D^{l\,m\,n}u + \sum_{i+j+k<s} a^{i\,j\,k}D^{i\,j\,k}u = f, \qquad (2.1)\\
i = 0,1,\dots,l, \quad j = 0,1,\dots,m, \quad k = 0,1,\dots,n, \quad s := l+m+n,
\end{gathered}
$$

рассмотрим задачу Гурса

$$
\begin{gathered}
D^{i\,0\,0}u\big|_{x_1=x_1^0} = \varphi^i_{011}, \quad D^{0\,j\,0}u\big|_{x_2=x_2^0} = \varphi^j_{101}, \quad D^{0\,0\,k}u\big|_{x_3=x_3^0} = \varphi^k_{110},\\
i = 0,1,\dots,l-1, \quad j = 0,1,\dots,m-1, \quad k = 0,1,\dots,n-1.
\end{gathered} \qquad (2.2)
$$

Не ограничивая общность рассуждения (напр., [7]), можем рассмотреть (2.1) с однородными граничными условиями, т. е. предположить, что $\varphi^i_{011} = \varphi^j_{101} = \varphi^k_{110} = 0$, $i = 0,1,\dots,l-1$, $j = 0,1,\dots,m-1$, $k = 0,1,\dots,n-1$, вместо (2.2). После подстановки $u = D^{-l\,-m\,-n}w$, $w \in C$, в (2.1) приведем задачу Гурса (2.1), (2.2) к интегральному уравнению Вольтерра

$$
w + \sum_{i,j,k} a^{i\,j\,k}D^{i-l\,j-m\,k-n}w = f. \qquad (2.3)
$$

Это уравнение можно переписать в виде $w + Kw = f$, где K — сумма известных операторов Вольтерра.

Спектральный радиус оператора Вольтерра K равен нулю, поэтому уравнение (2.3) однозначно разрешимо, его решение задается формулой $w = \sum\limits_{n\ge 0}(-1)^n K^n f$ и, следовательно, однозначная разрешимость задачи Гурса (2.1), (2.2) доказана.

Замечание 2.1. Если функции φ^i_{011}, φ^j_{101}, φ^k_{110}, $i = 0,1,\dots,l-1$, $j = 0,1,\dots,m-1$, $k = 0,1,\dots,n-1$, непрерывно дифференцируемы по параметру τ до порядка p, то решение задачи Гурса (2.1), (2.2) также p раз непрерывно дифференцируемо относительно того же параметра.

3. Функция Римана и интегральное представление решения задачи Гурса

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$
L^* := (-1)^{l+m+n}D^{l\,m\,n} + \sum_{i+j+k<s}(-1)^{i+j+k}D^{i\,j\,k}(a^{i\,j\,k}\ \cdot),
$$

который является сопряженным к оператору L (см. уравнение (2.1)) в смысле Лагранжа.

Лемма 3.1. *Для операторов L и L^* выполнено тождество*

$$
vLu - uL^*v = \sum_{i=1}^{3} D_{x_i}P_i,
$$

где

$$P_1 := Q_1 + \sum_{i+j+k<s} \sum_{p<i} (-1)^{p+j+k} D^{i-p-1\,0\,0} u D^{p\,j\,k}(a^{i\,j\,k}v),$$
$$P_2 := Q_2 + \sum_{i+j+k<s} \sum_{p<j} (-1)^{p+k} D^{i\,j-p-1\,0} u D^{0\,p\,k}(a^{i\,j\,k}v),$$
$$P_3 := Q_3 + \sum_{i+j+k<s} \sum_{p<k} (-1)^{p} D^{i\,j\,k-p-1} u D^{0\,0\,p}(a^{i\,j\,k}v),$$

и

$$Q_1 := \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{i+m+n} D^{l-i-1\,0\,0} u D^{i\,m\,n} v, \quad Q_2 := \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{i+n} D^{l\,m-i-1\,0} u D^{0\,i\,n} v,$$
$$Q_3 := \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i} D^{l\,m\,n-i-1} u D^{0\,0\,i} v.$$

Доказательство. Сначала покажем, что имеет место равенство

$$vD^{l\,m\,n}u - (-1)^{l+m+n} uD^{l\,m\,n}v = \sum_{i=1}^{3} D_{x_i} Q_i. \tag{3.1}$$

Рассмотрим билинейную форму

$$\Lambda(u,v) := \sum_{|\alpha|=|\beta|} D^{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3} u D^{\beta_1\,\beta_2\,\beta_3} v,$$

где сумма конечна. Взаимно однозначное соответствие

$$D^{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3} u D^{\beta_1\,\beta_2\,\beta_3} v \longleftrightarrow \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\xi_3^{\alpha_3}\eta_1^{\beta_1}\eta_2^{\beta_2}\eta_3^{\beta_3} \tag{3.2}$$

устанавливает также взаимно однозначное соответствие между формой $\Lambda(u,v)$ и многочленом

$$F(\xi,\eta) := \sum_{|\alpha|=|\beta|} \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\xi_3^{\alpha_3}\eta_1^{\beta_1}\eta_2^{\beta_2}\eta_3^{\beta_3}.$$

Теперь, принимая во внимание, что (3.2) переводит

$$D_{x_1}(D^{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3} u D^{\beta_1\,\beta_2\,\beta_3} v) = D^{\alpha_1+1\,\alpha_2\,\alpha_3} u D^{\beta_1\,\beta_2\,\beta_3} v + D^{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3} u D^{\beta_1+1\,\beta_2\,\beta_3} v$$

в

$$\xi_1^{\alpha_1+1}\xi_2^{\alpha_2}\xi_3^{\alpha_3}\eta_1^{\beta_1}\eta_2^{\beta_2}\eta_3^{\beta_3} + \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\xi_3^{\alpha_3}\eta_1^{\beta_1+1}\eta_2^{\beta_2}\eta_3^{\beta_3} = (\xi_1+\eta_1)\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\xi_3^{\alpha_3}\eta_1^{\beta_1}\eta_2^{\beta_2}\eta_3^{\beta_3},$$

заключаем, что $\Lambda(u,v)$ можно представить в форме дивергенции, если только многочлен $F(\xi,\eta)$ допускает представление

$$F(\xi,\eta) = \sum_{k=1}^{3} (\xi_k+\eta_k) F_k(\xi,\eta).$$

В этом случае

$$\Lambda(u,v) = \sum_{k=1}^{3} D_{x_k}[\Lambda_k(u,v)],$$

где связь билинейной формы $\Lambda_k(u,v)$ и многочлена $F_k(\xi,\eta)$ учитывает вышеупомянутое соответствие.

Далее, простым вычислением имеем

$$\xi_1^l\xi_2^m\xi_3^n-(-1)^{l+m+n}\eta_1^l\eta_2^m\eta_3^n=(\xi_1+\eta_1)\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^{i+m+n}\xi_1^{l-i-1}\eta_1^i\eta_2^m\eta_3^n+$$
$$+(\xi_2+\eta_2)\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{i+n}\xi_1^l\xi_2^{m-i-1}\eta_2^i\eta_3^n+(\xi_3+\eta_3)\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i}\xi_1^l\xi_2^m\xi_3^{n-i-1}\eta_3^i,$$

откуда истинность (3.1) очевидна.

Применяя (3.1) для младших членов $a^{i\,j\,k}vD^{i\,j\,k}u-(-1)^{i+j+k}uD^{i\,j\,k}(a^{i\,j\,k}v)$ и суммируя их по i, j, k, видим, что лемма 2.1 доказана. $\square$

Используя эту лемму, для $x_1^0\le y_1\le x_1$, $x_2^0\le y_2\le x_2$, $x_3^0\le y_3\le x_3$ получим равенство

$$\int_{x^0}^{x}(vLu-uL^*v)dy=\int_{x_2^0}^{x_2}\int_{x_3^0}^{x_3}P_1\Big|_{y_1=x_1^0}^{y_1=x_1}dy_2dy_3+$$
$$+\int_{x_1^0}^{x_1}\int_{x_3^0}^{x_3}P_2\Big|_{y_2=x_2^0}^{y_2=x_2}dy_1dy_3+\int_{x_1^0}^{x_1}\int_{x_2^0}^{x_2}P_3\Big|_{y_3=x_3^0}^{y_3=x_3}dy_1dy_2. \quad (3.3)$$

Пусть

$$L_{100}:=D^{l\,0\,0}+\sum_{i<l}a^{i\,m\,n}D^{i\,0\,0},\quad L_{010}:=D^{0\,m\,0}+\sum_{j<m}a^{l\,j\,n}D^{0\,j\,0},$$
$$L_{001}:=D^{0\,0\,n}+\sum_{k<n}a^{l\,m\,k}D^{0\,0\,k}$$

и L_{100}^*, L_{010}^*, L_{001}^* — соответствующие сопряженные операторы. Предположим, что функции $\omega_{100}:=\omega_{100}(x_1;y)$, $\omega_{010}:=\omega_{010}(x_2;y)$, $\omega_{001}:=\omega_{001}(x_3;y)$ являются соответствующими решениями следующих задач Коши:

$$\begin{aligned}
&L_{100}^*\big|_{x_2=y_2,\,x_3=y_3}\omega_{100}=0,\quad \left(\frac{d}{dx_1}\right)^i\omega_{100}\big|_{x_1=y_1}=\delta_{l-1\,i},\quad i=0,1,\dots,l-1;\\
&L_{010}^*\big|_{x_1=y_1,\,x_3=y_3}\omega_{010}=0,\quad \left(\frac{d}{dx_2}\right)^j\omega_{010}\big|_{x_2=y_2}=\delta_{m-1\,j},\quad j=0,1,\dots,m-1;\\
&L_{001}^*\big|_{x_1=y_1,\,x_2=y_2}\omega_{001}=0,\quad \left(\frac{d}{dx_3}\right)^k\omega_{001}\big|_{x_3=y_3}=\delta_{n-1\,k},\quad k=0,1,\dots,n-1,
\end{aligned}\quad (3.4)$$

где

$$\delta_{i\,j}=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & i\ne j,\end{cases}$$

— символ Кронекера.

Пусть также

$$L_{011}:=D^{0\,m\,n}+\sum_{j+k<m+n}a^{l\,j\,k}D^{0\,j\,k},\quad L_{101}:=D^{l\,0\,n}+\sum_{i+k<l+n}a^{i\,m\,k}D^{i\,0\,k},$$
$$L_{110}:=D^{l\,m\,0}+\sum_{i+j<l+m}a^{i\,j\,n}D^{i\,j\,0}$$

и L^*_{011}, L^*_{101}, L^*_{110} — соответствующие сопряженные операторы, а функции $\theta_{011} := \theta_{011}(x_2, x_3; y)$, $\theta_{101} := \theta_{101}(x_1, x_3; y)$, $\theta_{110} := \theta_{110}(x_1, x_2; y)$ — решения следующих задач Гурса:

$$\begin{gathered}
L^*_{011}\big|_{x_1=y_1}\theta_{011} = 0, \quad D^j_{x_2}\theta_{011}\big|_{x_2=y_2} = \delta_{m-1\,j}\,\omega_{001}, \quad D^k_{x_3}\theta_{011}\big|_{x_3=y_3} = \delta_{n-1\,k}\,\omega_{010};\\
L^*_{101}\big|_{x_2=y_2}\theta_{101} = 0, \quad D^i_{x_1}\theta_{101}\big|_{x_1=y_1} = \delta_{l-1\,i}\,\omega_{001}, \quad D^k_{x_3}\theta_{101}\big|_{x_3=y_3} = \delta_{n-1\,k}\,\omega_{100};\\
L^*_{110}\big|_{x_3=y_3}\theta_{110} = 0, \quad D^i_{x_1}\theta_{110}\big|_{x_1=y_1} = \delta_{l-1\,i}\,\omega_{010}, \quad D^j_{x_2}\theta_{110}\big|_{x_2=y_2} = \delta_{m-1\,j}\,\omega_{100};\\
i = 0, 1, \ldots, l-1, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.
\end{gathered} \tag{3.5}$$

Вопрос разрешимости двумерной задачи Гурса высокого порядка легко сводится к разрешимости задачи (2.1), (2.2).

Определение. Определим функцию Римана $v := v(x; y)$ для уравнения (2.1) как решение следующей задачи Гурса:

$$L^* v = 0, \tag{3.6}$$

$$\begin{gathered}
D^i_{x_1}v\big|_{x_1=y_1} = \delta_{l-1\,i}\,\theta_{011}, \quad D^j_{x_2}v\big|_{x_2=y_2} = \delta_{m-1\,j}\,\theta_{101}, \quad D^k_{x_3}v\big|_{x_3=y_3} = \delta_{n-1\,k}\,\theta_{110},\\
i = 0, 1, \ldots, l-1, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.
\end{gathered} \tag{3.7}$$

Существование и единственность этой функции Римана следуют из эквивалентности задач (2.1), (2.2) и (3.6), (3.7).

Замечание 3.1. Так как решения θ_{ijk}, $i, j, k = 0, 1$, $i + j + k = 2$, задач Гурса являются гладкими функциями, т. е. $\theta_{110} \in C^{l\,m,\,l\,m\,n}$, $\theta_{011} \in C^{m\,n,\,l\,m\,n}$, $\theta_{101} \in C^{l\,n,\,l\,m\,n}$, а также принимая во внимание замечание 2.1, для функции Римана имеем $v \in C^{l\,m\,n,\,l\,m\,n}$.

Перепишем подинтегральные выражения правой части (3.3). Легко видеть, что согласно (2.2)

$$\begin{aligned}
P_1\big|_{y_1=x_1^0} &= \sum_{i=0}^{l-1}(-1)^{i+m+n}\varphi_{011}^{l-i-1}D^{i\,m\,n}v\big|_{y_1=x_1^0} + \sum_{i+j+k<s}\ \sum_{p<i}(-1)^{p+j+k}\varphi_{011}^{i-p-1}D^{p\,j\,k}(a^{i\,j\,k}v)\big|_{y_1=x_1^0},\\
P_2\big|_{y_2=x_2^0} &= \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{i+n}D^{l\,0\,0}\varphi_{101}^{m-i-1}D^{0\,i\,n}v\big|_{y_2=x_2^0} + \sum_{i+j+k<s}\ \sum_{p<j}(-1)^{p+k}D^{i\,0\,0}\varphi_{101}^{j-p-1}D^{0\,p\,k}(a^{i\,j\,k}v)\big|_{y_2=x_2^0},\\
P_3\big|_{y_3=x_3^0} &= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i}D^{l\,m\,0}\varphi_{110}^{n-i-1}D^{0\,0\,i}v\big|_{y_3=x_3^0} + \sum_{i+j+k<s}\ \sum_{p<k}(-1)^{p}D^{i\,j\,0}\varphi_{110}^{k-p-1}D^{0\,0\,p}(a^{i\,j\,k}v)\big|_{y_3=x_3^0}.
\end{aligned}$$

Кроме того, предполагая, что $v(x; y)$ является функцией Римана, согласно (3.7) имеем

$$\begin{aligned}
P_1\big|_{y_1=x_1} = (-1)^{l+m+n-1}u\big|_{y_1=x_1}D^{0\,m\,n}\theta_{011} + \sum_{j+k<m+n}(-1)^{l-1+j+k}u\big|_{y_1=x_1}D^{0\,j\,k}\big(a^{l\,j\,k}\big|_{y_1=x_1}\theta_{011}\big) =\\
= (-1)^{l-1}u\big|_{y_1=x_1}L^*_{011}\big|_{y_1=x_1}\theta_{011} = 0.
\end{aligned}$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned}
P_2\big|_{y_2=x_2} &= (-1)^{m-1}\Big\{(-1)^n D^{l\,0\,0}u\big|_{y_2=x_2}D^{0\,0\,n}\theta_{101} +\\
&\qquad + \sum_{i+k<l+n}(-1)^k D^{i\,0\,0}u\big|_{y_2=x_2}D^{0\,0\,k}\big(a^{i\,m\,k}\big|_{y_2=x_2}\theta_{101}\big)\Big\},\\
P_3\big|_{y_3=x_3} &= (-1)^{n-1}\Big\{D^{l\,m\,0}u\big|_{y_3=x_3}\theta_{110} + \sum_{i+j<l+m}D^{i\,j\,0}u\big|_{y_3=x_3}a^{i\,j\,n}\big|_{y_3=x_3}\theta_{110}\Big\}.
\end{aligned}$$

Лемма 3.2. *Для любых функций $u, v \in C^m$, $m \in \mathbb{N}$, имеет место равенство*

$$vD^m u = (-1)^m u D^m v + D\Big\{ \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i D^{m-i-1} u D^i v \Big\}.$$

Доказательство. Предположим, что лемма 3.2 справедлива для $m \in \mathbb{N}$, и покажем ее справедливость для $m+1$. Действительно, т. к.

$$vD^{m+1}u = (-1)^m DuD^m v + D\Big\{ \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i D^{m-i} u D^i v \Big\} = (-1)^m DuD^m v +$$
$$+ D\Big\{ \sum_{i=0}^{m} (-1)^i D^{m-i} u D^i v - (-1)^m u D^m v \Big\} = (-1)^m DuD^m v + D\Big\{ \sum_{i=0}^{m} (-1)^i D^{m-i} u D^i v \Big\} -$$
$$- (-1)^m DuD^m v - (-1)^m u D^{m+1} v = (-1)^{m+1} u D^{m+1} v + D\Big\{ \sum_{i=0}^{m} (-1)^i D^{m-i} u D^i v \Big\}$$

и $vDu = -uDv + D(uv)$ для $m = 1$, то справедливость леммы 3.2 очевидна. $\square$

С использованием этой леммы и формулы Ньютона–Лейбница находим

$$I_{101}(x) := \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_3^0}^{x_3} P_2\big|_{y_2=x_2} dy_1 dy_3 = (-1)^{m-1} \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_3^0}^{x_3} \Big\{ (-1)^{n+l} u\big|_{y_2=x_2} D^{l\,0\,n}\theta_{101} +$$
$$+ D^{1\,0\,0}\Big(\sum_{p=0}^{l-1} (-1)^{n+p} D^{l-p-1\,0\,0} u\big|_{y_2=x_2} D^{p\,0\,n}\theta_{101} \Big) + \sum_{i+k<l+n} (-1)^{k+i} u\big|_{y_2=x_2} D^{i\,0\,k}\big(a^{i\,m\,k}\big|_{y_2=x_2}\theta_{101}\big) +$$
$$+ D^{1\,0\,0}\Big(\sum_{p=0}^{i-1} (-1)^{k+p} D^{i-p-1\,0\,0} u\big|_{y_2=x_2} D^{p\,0\,k}\big(a^{i\,m\,k}\big|_{y_2=x_2}\theta_{101}\big) \Big) \Big\} dy_1 dy_3 =$$
$$= (-1)^{m-1} \int_{x_3^0}^{x_3} \Big\{ \sum_{p=0}^{l-1} (-1)^{n+p} D^{l-p-1\,0\,0} u\big|_{y_2=x_2} D^{p\,0\,n}\theta_{101} +$$
$$+ \sum_{i+k<l+n} \sum_{p<i} (-1)^{n+p+k} D^{i-p-1\,0\,0} u\big|_{y_2=x_2} D^{p\,0\,k}\big(a^{i\,m\,k}\big|_{y_2=x_2}\theta_{101}\big) \Big\}\Big|_{x_1^0}^{x_1} dy_3 +$$
$$+ (-1)^{m-1} \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_3^0}^{x_3} u\big|_{y_2=x_2} L^*_{101}\big|_{y_2=x_2} \theta_{101} dy_1 dy_3.$$

Поэтому в силу (2.2), (3.4) и (3.5) имеем

$$I_{101}(x) = (-1)^{m-1} \int_{x_3^0}^{x_3} \Big\{ (-1)^{l-1} u\big|_{y_1=x_1,\, y_2=x_2} L^*_{001}\big|_{y_1=x_1,\, y_2=x_2} \omega_{001} -$$
$$- \sum_{p=0}^{l-1} (-1)^{n+p} \varphi_{011}^{l-p-1}\big|_{y_2=x_2} D^{p\,0\,n}\theta_{101}\big|_{y_1=x_1^0} -$$
$$- \sum_{i+k<l+n} \sum_{p<i} (-1)^{k+p} \varphi_{011}^{i-p-1}\big|_{y_2=x_2} D^{p\,0\,k}\big(a^{i\,m\,k}\big|_{y_2=x_2}\theta_{101}\big)\big|_{y_1=x_1^0} \Big\} dy_3 =$$
$$= (-1)^m \int_{x_3^0}^{x_3} \Big\{ \sum_{p=0}^{l-1} (-1)^{n+p} \varphi_{011}^{l-p-1}\big|_{y_2=x_2} D^{p\,0\,n}\theta_{101}\big|_{y_1=x_1^0} +$$
$$+ \sum_{i+k<l+n} \sum_{p<i} (-1)^{k+p} \varphi_{011}^{i-p-1}\big|_{y_2=x_2} D^{p\,0\,k}\big(a^{i\,m\,k}\big|_{y_2=x_2}\theta_{101}\big)\big|_{y_1=x_1^0} \Big\} dy_3.$$

Согласно лемме 3.2 и использованным выше процедурам получим

$$I_{110}(x) := \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} P_3\big|_{y_3=x_3} dy_1 dy_2 = I_1(x) + I_2(x) + I_3(x),$$

где $I_1(x) := I_0(x) - I_0(x_1, x_2^0, x_3) - I_0(x_1^0, x_2, x_3) + I_0(x_1^0, x_2^0, x_3)$,

$$I_0(y_1, y_2, x_3) := (-1)^{n-1}\Big\{ \sum_{p=0}^{l-1} \sum_{q=0}^{m-1} (-1)^{p+q} D^{l-p-1\, m-q-1\, 0} u\big|_{y_3=x_3} D^{p\, q\, 0}\theta_{110} +$$

$$+ \sum_{i+j<l+m} \sum_{p<i} \sum_{q<j} (-1)^{p+q} D^{i-p-1\, j-q-1\, 0} u\big|_{y_3=x_3} D^{p\, q\, 0}\big(a^{i\, j\, n}\big|_{y_3=x_3}\theta_{110}\big)\Big\}$$

и

$$I_2(x) := (-1)^{n-1} \int_{x_2^0}^{x_2} \Big\{ \sum_{p=0}^{l-1} (-1)^{p+m} D^{l-p-1\, 0\, 0} u\big|_{y_3=x_3} D^{p\, m\, 0}\theta_{110} +$$

$$+ \sum_{i+j<l+m} \sum_{p<i} (-1)^{p+j} D^{i-p-1\, 0\, 0} u\big|_{y_3=x_3} D^{p\, j\, 0}\big(a^{i\, j\, n}\big|_{y_3=x_3}\theta_{110}\big)\Big\}\Big|_{x_1^0}^{x_1} dy_2,$$

$$I_3(x) := (-1)^{n-1} \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} \Big\{ (-1)^l D^{0\, m\, 0} u\big|_{y_3=x_3} D^{l\, 0\, 0}\theta_{110} +$$

$$+ \sum_{i+j<l+m} (-1)^i D^{0\, j\, 0} u\big|_{y_3=x_3} D^{i\, 0\, 0}\big(a^{i\, j\, n}\big|_{y_3=x_3}\theta_{110}\big)\Big\} dy_1 dy_2.$$

Теперь, принимая во внимание (3.5) и первое из условий (3.4), находим

$$I_0(x) = (-1)^{n+m}\Big\{ \sum_{p=0}^{l-1} (-1)^p D^{l-p-1\, 0\, 0} u\big|_{y_2=x_2,\ y_3=x_3} D^{p\, 0\, 0}\omega_{100} +$$

$$+ \sum_{i<l} \sum_{p<i} (-1)^p D^{i-p-1\, 0\, 0} u\big|_{y_2=x_2,\ y_3=x_3} D^{p\, 0\, 0}\big(a^{i\, m\, n}\big|_{y_2=x_2,\ y_3=x_3}\omega_{100}\big)\Big\}\Big|_{y_1=x_1} = (-1)^{s-1} u\big|_{y=x}.$$

Аналогично

$$I_0(x_1, x_2^0, x_3) = (-1)^{l+n}\Big\{ \sum_{q=0}^{m-1} (-1)^q \varphi_{101}^{m-q-1}(x_1, x_3) D^{0\, q\, 0}\omega_{010}\big|_{y_2=x_2^0} +$$

$$+ \sum_{j<m} \sum_{q<j} (-1)^q \varphi_{101}^{j-q-1}(x_1, x_3) D^{0\, q\, 0}\big(a^{l\, j\, n}\big|_{y_1=x_1,\ y_3=x_3}\omega_{010}\big)\big|_{y_2=x_2^0}\Big\},$$

$$I_0(x_1^0, x_2, x_3) = (-1)^{m+n}\Big\{ \sum_{p=0}^{l-1} (-1)^p \varphi_{011}^{l-p-1}(x_2, x_3) D^{p\, 0\, 0}\omega_{100}\big|_{y_1=x_1^0} +$$

$$+ \sum_{i<l} \sum_{p<i} (-1)^p \varphi_{011}^{i-p-1}(x_2, x_3) D^{p\, 0\, 0}\big(a^{i\, m\, n}\big|_{y_2=x_2,\ y_3=x_3}\omega_{100}\big)\big|_{y_1=x_1^0}\Big\}$$

и

$$I_0(x_1^0, x_2^0, x_3) = (-1)^{n-1}\Big\{ \sum_{p=0}^{l-1} \Big(\sum_{q=0}^{m-1} (-1)^{p+q} D^{0\, m-q-1\, 0} \varphi_{011}^{l-p-1}(x_2, x_3) D^{p\, q\, 0}\theta_{110}\Big) +$$

$$+ \sum_{i+j<l+m} \sum_{p<i} \sum_{q<j} (-1)^{p+q} D^{0\, j-q-1\, 0} \varphi_{011}^{i-p-1}(x_2, x_3) D^{p\, q\, 0}\big(a^{i\, j\, n}\big|_{y_3=x_3}\theta_{100}\big)\Big\}\Big|_{y_1=x_1^0,\ y_2=x_2^0}.$$

Тем же самым методом вычислений будем иметь

$$I_2(x) = (-1)^n \int_{x_2^0}^{x_2} \Big\{ \sum_{p=0}^{l-1} (-1)^{m+p} \varphi_{011}^{l-p-1}(y_2, x_3) D^{p\,m\,0}\theta_{110} +$$
$$+ \sum_{i+j<l+m} \sum_{p<i} (-1)^{j+p} \varphi_{011}^{i-p-1}(y_2, x_3) D^{p\,j\,0}\big(a^{i\,j\,n}\big|_{y_3=x_3}\theta_{110}\big)\Big\}\Big|_{y_1=x_1^0} dy_2$$

и

$$I_3(x) = (-1)^{n-1} \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} \Big\{ (-1)^{l+m} u\big|_{y_3=x_3} D^{l\,m\,0}\theta_{110} +$$
$$+ D^{0\,1\,0}\Big(\sum_{p=0}^{m-1} (-1)^{l+p} D^{0\,m-p-1\,0} u\big|_{y_3=x_3} D^{l\,p\,0}\theta_{110}\Big) +$$
$$+ \sum_{i+j<l+m} (-1)^{i+j} u\big|_{y_3=x_3} D^{i\,j\,0}\big(a^{i\,j\,n}\big|_{y_3=x_3}\theta_{110}\big) +$$
$$+ D^{0\,1\,0}\Big(\sum_{p<j} (-1)^{i+p} D^{0\,j-p-1\,0} u\big|_{y_3=x_3} D^{i\,p\,0}\big(a^{i\,j\,n}\big|_{y_3=x_3}\theta_{110}\big)\Big)\Big\} dy_1 dy_2 =$$
$$= (-1)^{n-1} \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} u\big|_{y_3=x_3} L_{110}^*\big|_{y_3=x_3}\theta_{110} dy_1 dy_2 +$$
$$+ (-1)^{n-1} \int_{x_1^0}^{x_1} \Big\{ \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^{l+p} D^{0\,m-p-1\,0} u\big|_{y_3=x_3} D^{l\,p\,0}\theta_{110} +$$
$$+ \sum_{i+j<l+m} \sum_{p<j} (-1)^{i+p} D^{0\,j-p-1\,0} u\big|_{y_3=x_3} D^{i\,p\,0}\big(a^{i\,j\,n}\big|_{y_3=x_3}\theta_{110}\big)\Big\}\Big|_{x_2^0}^{x_2} dy_1 =$$
$$= (-1)^{n+m} \int_{x_1^0}^{x_1} u\big|_{y_2=x_2, y_3=x_3} L_{100}^*\big|_{y_2=x_2, y_3=x_3}\omega_{100} dy_1 dy_3 +$$
$$+ (-1)^n \int_{x_1^0}^{x_1} \Big\{ \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^{l+p} \varphi_{101}^{m-p-1}(y_1, x_3) D^{l\,p\,0}\theta_{110} +$$
$$+ \sum_{i+j<l+m} \sum_{p<j} (-1)^{i+p} \varphi_{101}^{j-p-1}(y_1, x_3) D^{i\,p\,0}\big(a^{i\,j\,n}\big|_{y_3=x_3}\theta_{110}\big)\Big\}\Big|_{y_2=x_2^0} dy_1 =$$
$$= (-1)^n \int_{x_1^0}^{x_1} \Big\{ \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^{l+p} \varphi_{101}^{m-p-1}(y_1, x_3) D^{l\,p\,0}\theta_{110} +$$
$$+ \sum_{i+j<l+m} \sum_{p<j} (-1)^{i+p} \varphi_{101}^{j-p-1}(y_1, x_3) D^{i\,p\,0}\big(a^{i\,j\,n}\big|_{y_3=x_3}\theta_{110}\big)\Big\}\Big|_{y_2=x_2^0} dy_1.$$

Наконец, принимая во внимание выражения для I_{101} и I_{110}, из (3.3) получим интегральное представление решения задачи Гурса (2.1), (2.2) в виде

$$(-1)^s u(x) = I_{101}(x) - I_0(x_1, x_2^0, x_3) - I_0(x_1^0, x_2, x_3) + I_0(x_1^0, x_2^0, x_3) +$$
$$+ I_2(x) + I_3(x) - \int_{x_2^0}^{x_2} \int_{x_3^0}^{x_3} P_1\big|_{y_1=x_1^0} dy_2 dy_3 -$$
$$- \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_3^0}^{x_3} P_2\big|_{y_2=x_2^0} dy_1 dy_3 - \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} P_3\big|_{y_3=x_3^0} dy_1 dy_2 - \int_{x^0}^{x} v(y; x) f(y) dy. \quad (3.8)$$

Равенство (3.8) успешно может быть использовано в изучении широкого класса локальных и нелокальных граничных задач для уравнения (2.1). Например, для уравнения (2.1) при $l \geq 2$

рассмотрим начально-краевую задачу

$$D^{i\,0\,0}u\big|_{x_1=0}=\varphi^i_{011},\quad u\big|_{x_1=x_1^0}=\psi,\quad D^{0\,j\,0}u\big|_{x_2=0}=\varphi^j_{101},\quad D^{0\,0\,k}u\big|_{x_3=0}=\varphi^k_{110},\tag{3.9}$$
$$i=0,1,\dots,l-2,\quad j=0,1,\dots,m-1,\quad k=0,1,\dots,n-1.$$

Путем введения неизвестной функции $\tau := D^{l-1\,0\,0}u\big|_{x_1=0}$ и использования интегрального представления (3.8), задача (2.1), (3.9) эквивалентно сводится к следующему интегральному уравнению Вольтерра третьего рода:

$$\omega_{100}(0;x_1^0,x_2,x_3)\tau(x_2,x_3)+\int_0^{x_2}K_2(0,y_2,x_3;x_1^0,x_2,x_3)\tau(y_2,x_3)dy_2+$$
$$+\int_0^{x_3}K_3(0,x_2,y_3;x_1^0,x_2,x_3)\tau(x_2,y_3)dy_3+$$
$$+\int_0^{x_2}\int_0^{x_3}K_{23}(0,y_2,y_3;x_1^0,x_2,x_3)\tau(y_2,y_3)dy_2dy_3=\chi(x_2,x_3),\tag{3.10}$$

где K_2, K_3, K_{23} и χ — известные функции, а ω_{100} — решение первой задачи Коши в (3.4). Как известно, если

$$\omega_{100}(0;x_1^0,x_2,x_3)\neq 0\tag{3.11}$$

всюду, то (3.10) сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, в силу которого изучаемая задача безусловно разрешима. Некоторые достаточные условия выполнимости (3.11) получены в работах [7], [15], [12].

Литература

1. Hörmander L. *Linear partial differential operators.* – Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer-Verlag, 1963. – 285 S.
2. Bailey N.T.J. *The mathematical approach to biology and medicine.* – New York: Wiley, 1967. – 296 p.
3. Bullough R.K., Caudrey P.J. (Eds.) *Solitons* (Springer Topics in Current Physics, V. 17). – Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1980. – 389 p.
4. Showalter R.E. *Hilbert space methods for partial differential equations* // Electron. J. Diff. Eqns., Monograph 01, 1994.
5. Coleman B.D., Duffin R.J., Mizel V.J. *Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation $u_t=u_{xx}-u_{xtx}$ on a strip* // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1965. – V. 19. – P. 100–116.
6. Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии.* – М.: Высш. школа, 1995. – 301 с.
7. Солдатов А.П., Шхануков М.Х. *Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка* // ДАН СССР. – 1987. – Т. 297. – № 3. – С. 547–552.
8. Жегалов В.И., Миронов А.Н. *Дифференциальные уравнения с частными производными.* – Казань: Казанск. матем. о-во, 2001. – 226 с.
9. Di Vincenzo R., Villani A. *Sopra un problema ai limiti per un'equazione lineare del terzo ordine di tipo iperbolico. Esistenza, unicitá e rappresentazione della soluzione* // Le Matematiche. – 1977. – V. XXXII. – P. 211–238.
10. Джохадзе О. *Функция Римана для гиперболических уравнений и систем высокого порядка с доминированными младшими членами* // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39. – № 10. – С. 1366–1378.
11. Джохадзе О. *Об инвариантах Лапласа для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений в частных производных* // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40. – № 1. – С. 58–68.
12. Midodashvili B. *A nonlocal problem for fourth order hyperbolic equations with multiple characteristics* // Electron. J. Diff. Eqns. – 2002. – № 85. – P. 1–7.

13. David A. *The estimation for approximate solution of the initial value problem for the partial differential equation* // Acta F. R. N. Univ. Comen. – Mathematica. – 1970. – V. XXIV. – P. 1–18.
14. Durikovic V. *Some remarks on the existence of solutions of hyperbolic partial differential equations* // Acta F. R. N. Univ. Comen. – Mathematica. – 1970. – V. XXIV. – P. 19–35.
15. Jokhadze O. *The first mixed problem for pseudoparabolic equations on a plane* // Bulletin of the Academy of sciences of Georgia. – 1996. – V. 154. – № 2. – P. 177–180.

Институт математики им. А.М. Размадзе
академии наук Грузии

Грузинский технический университет

Поступила
12.07.2004