ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტი

IV ვორქშოპი

დისკრეტულ მათემატიკაში

აბსტრაქტების კრებული

თბილისი

2019

შესავალი

მოწვეული მომხსენებლები.

1. ალექსი კირთაძე - აკადემიკოს ალექსანდრე ხარაზიშვილის მოღვაწეობა;
2. რევაზ გრიგოლია - გიოედელ-MV(C)-ალგებრების შესახებ;
3. არჩილ ყიფიანი - უსასრულო მონო-უნარული ალგებრების ავტომორფიზმები და მათი ზოგიერთი გამოყენება;
4. როლანდ ომანაძე - რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეთა sQ_1–ხარისხების სტრუქტურული თვისებები;

მომხსენებლები.

1. თენგიზ ტეტუნაშვილი - სპეციალური ტიპის წერტილოვანი სიმრავლეები და სილვესტრის ამოცანა;
2. მარიამ ბერიაშვილი - სიმრავლურ-თეორიული მოდელები ამორჩევის აქსიომის გარეშე;
3. შალვა ბერიაშვილი - სხვადასხვა ტიპის მრავალწახნაგები მრავალგანზომილებიან R^n სივრცეში;
4. მარიკა ხაჩიძე - ძლიერი ერთადერთობის თვისების შესახებ უსასრულო განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში ;
5. ნინო რუსიაშვილი - ზომის გაგრძელების ერთი მეთოდის შესახებ;

სტუდენტური მოხსენებები.

1. ჯუმბერ ოდიშელიძე - კოშის ფუნქციონალური განტოლების ამონახსნის ზომადობის შესახებ;
2. მეგი კაპანაძე - ვ. სერპინსკის ერთი ამოცანის შესახებ;
3. ოთარ ზუკაკიშვილი - მცირე სიმრავლეები ალგებრული ჯამის ოპერაციის მიმართ;
4. ჯონი სადუნიშვილი - ვიტალის თეორემის განზოგადების შესახებ;
5. ციალა ქვათაძე - ალბათურ ზომათა ნამრავლის ერთადერთობის თვისების შესახებ;
6. რუსუდან რაზმაძე - ალბათურ ზომათა ოჯახების ზოგიერთი თვისების შესახებ;

ალექსი კირთაძე

აკადემიკოსი

ალექსანდრე ხარაზიშვილი

70

ალექსანდრე ბეჟანის-ძე ხარაზიშვილი დაიბადა 1949 წლის 18 ნოემბერს. მან 1972 წელს წარჩინებით დაამთავრა ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი (სპეციალობით: მათემატიკა).

1972 წლის დეკემბრიდან დღემდე იგი მუშაობს თსუ-ს ი.ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტში. იყო აღნიშნული ინსტიტუტის უმცროს მეცნიერ-თანამშრომლი, შემდეგ დაიკავა უფროს-მეცნიერ თანამშრომლის თანამდედობა, ხოლო 1983 წლიდან არის ამავე ინსტიტუტის დისკრეტული მათემატიკის განყოფილების გამგე.

1974 წელს თსუ-ს სამეცნიერო საბჭოს სხდომაზე მან დაიცვა საკანდიდატო დისერტაცია სპეციალობით: გეომეტრია-ტოპოლოგია (01.01.04).

1982 წელს მან დაიცვა დისერტაცია ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორის ხარისხის მოსაპოვებლად (ქ.კიევში, უკრაინის მეცნიერებათა აკადემიის მათემატიკის ინსტიტუტის სამეცნიერო საბჭოს სხდომაზე), სპეციალობით: მათემატიკური ანალიზი (01.01.01).

2005 წლის დეკემბრიდან ა.ხარაზიშვილი, აგრეთვე, მუშაობს საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ა.რაზმაძის მათემატიკის ინსტიტუტში, მათემატიკური ანალიზის განყოფილების მთავარი მეცნიერ-თანამშრომლის თანამდებობაზე.

2006-2011 წლებში იგი ეწეოდა პედაგოგიურ მოღვაწეობას ი.ჭავჭავაძის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის სრული პროფესორის თანამდებობაზე. ამჟამად, კითხულობს ლექციებს ბათუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტში და არის მოწვეული პროფესორი საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში.

ა.ხარაზიშვილს გამოქვეყნებული აქვს 300-ზე მეტი სამეცნიერო შრომა მათემატიკაში, მათ შორის 20-ზე მეტი მონოგრაფია. ეს შრომები ეხება თანამედროვე მათემატიკის სხვადასხვა დარგს: ამოზნექილ გეომეტრიას, სიმრავლეთა თეორიასა და უსასრულო კომბინატორიკას, ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიასა და ზომის თეორიას. ა.ხარაზიშვილის მიერ მიღებული მათემატიკური შედეგები მრავალჯერ იყო ციტირებული შესაბამისი დარგების სპეციალისტების მიერ.

ა.ხარაზიშვილი მრავალჯერ იყო მიწვეული საზღვარგარეთ, სხვადასხვა საერთაშორისო მათემატიკურ ფორუმში მონაწილეობის მისაღებად (რუსეთში, უკრაინაში, პოლონეთში, ჩეხეთში, უნგრეთში, ბულგარეთში, აშშ-ში, საფრანგეთში, გერმანიაში, მექსიკაში, ქუვეითში და სხვ.).

1994-1998 წლებში იგი მუშაობდა ლოძის უნივერსიტეტში, მიწვეული პროფესორის სტატუსით.

ა. ხარაზიშვილი არის საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის წევრი, საქართველოს საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა აკადემიის წევრი და საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის აკადემიკოსი.

ა. ხარაზიშვილი არის სამი საერთაშორისო მათემატიკური ჟურნალის რედკოლეგიის წევრი: Georgian mathematical Journas; Journal of Applied Analysis; Applied Mathematics, Informatics and Mechanics.

1996 წელს ა. ხარაზიშვილს მიენიჭა ლოძის უნივერსიტეტის (პოლონეთი) პრემია მის მიერ შესრულებულ ნაშრომთა ციკლისათვის.

2008 წელს მას მიენიჭა საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის აკადემიკოს ნ. მუსხელიშვილის სახელობის პრემია.

2017 წელს აირჩიეს ბულგარეთის გეომეტრიის საზოგადოების საპატიო წევრად და დაჯილდოვდა ამავე საზოგადოების მედლით.

ა. ხარაზიშვილის ხელმძღვანელობით მომზადდა 10 დისერტაცია, მათ შორის ერთი მეცნიერებათა დოქტორის.

ა. ხარაზიშვილის
ავტორობით გამოცემული მონოგრაფიები
და დამხმარე სახელმძღვანელოები

ა. ხარაზიშვილი არის 13 მონოგრაფიის ავტორი, რომლებიც გამოცემულია საზღვარგარეთის გამომცემლობებში. უნდა აღინიშნოს, რომ მონოგრაფია ,, Strange Functions in Real Analysis“ გამოიცა სამჯერ (აშშ–ში, 2000, 2006, 2017 წლებში).

ა. ხარაზიშვილის მონოგრაფიები შეტანილია, როგორც დამხმარე სახელმძღვანელოები სპეციალური კურსებისათვის, საზღვარგარეთის შემდეგ უნივერსიტეტებში: ვარშავის, ლოძის, ვროცლავის, ბუქარესტის, პრაღის, მადრიდის, ლუიზიანას, დასავლეთ ვირჯინიის და სხვ. უნივერსიტეტებში.

ბოლო წლებში ა. ხარაზიშვილმა გამოსცა 5 დამხმარე სახელმძღვანელო ქართულ ენაზე (მათემატიკური ესკიზები, ნაწ. 1,2. სიმრავლეთა თეორიის საწყისები, ნაწ. 1, 2, 3), რომლებიც ასევე შეტანილია უნივერსიტეტების სასწავლო კურსების სილაბუსებში.

1. Some Questions of Set Theory and Measure Theory, Izd. Tbil. Gos. Univ., Tbilisi, 1978 (in Russian).

2. Selected Topics in the Geometry of Euclidean Spaces, Izd. Tbil. Gos. Univ., Tbilisi, 1978 (in Russian)

3. Some Questions of Functional Analysis and their Applications, Izd. Tbil. Gos. Univ., Tbilisi, 1979 (in Russian).

4. Elements of the Combinatorial Theory of Infinite Sets, Izd. Tbil. Gos. Univ., Tbilisi, 1981 (in Russian).

5. Invariant Extensions of the Lebesgue Measure, Izd. Tbil. Gos. Univ., Tbilisi, 1983, (in Russian).

6. Topological Aspects of Measure Theory, Izd. Naukova Dumka, Kiev, 1984 (in Russian).

7. Introduction to Combinatorial Geometry, Izd. Tbil. Gos. Univ., Tbilisi, 1985 (in Russian).

8. Brunn-Minkowski Inequality and its Applications, Izd. Naukova Dumka, Kiev, 1985 (in Russian, with V.V.Buldygin, a revised and expanded version of this book was translated into English).

9. Applications of Set Theory, Izd. Tbil. Gos. Univ., Tbilisi, 1989 (in Russian).

10. Selected Topics in General Topology, Izd. Tbil. Gos. Univ., Tbilisi, 1990 (in Russian).

11. Vitali's Theorem and its Generalizations, Izd. Tbil. Gos. Univ., Tbilisi, 1991, (in Russian).

12. Baire Property and its Applications, Proceedings of I.N.Vekua Institute of Applied Mathematics, vol. 43, 1992, 120 pp. (in Russian).

13. Subsets of the Real Line, Part 1, L´od´z University Press, L´od´z, 1995, (with J.Cicho´n and B.Weglorz).

14. Selected Topics of Point Set Theory, L´od´z University Press, L´od´z, 1996.

15. Applications of Point Set Theory in Real Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998, 244 pp.

16. Transformation Groups and Invariant Measures: Set-Theoretical Aspects, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1998, 280 pp.

17. Strange Functions in Real Analysis, Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.

18. Geometric Aspects of Probability Theory and Mathematical Statistics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000 (co-author V.V. Buldygin).

19. Nonmeasurable Sets and Functions, North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Publishing Co., Amsterdam, 2004, 330 p

20. Strange Functions in Real Analysis, Second Edition, Chapman and Hall/CRC, Taylor & Francis Books, Boca Raton - New York - London -Singapore, 2006, 430 p.

21. Topics in Measure Theory and Real Analysis, Atlantis Press and World Scientific, Amsterdam-Paris, 2010, 470 p.

22. Set-Theoretical Aspects of Real Analysis, Chapman and Hall/CRC, Boca RatonNew York, 2014, 452 p.

23. Elements of Combinatorial Geometry, Part 1, Tbilisi, 2016.

24. Strange Functions in Real Analysis, 3rd expanded edition, Chapman and Hall/CRC, New York, 2017, 440 p.

25. მათემატიკური ესკიზები. ნაწილი 1, ილია ჭავჭავაძის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2007.

26. მათემატიკური ესკიზები. ნაწილი 2, ილია ჭავჭავაძის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2010.

27. სიმრავლეთა თეორიის საწყისები. ნაწილი 1, ილია ჭავჭავაძის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2008.

28. სიმრავლეთა თეორიის საწყისები. ნაწილი 2, საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის გამომცემლობა, თბილისი, 2012.

29. სიმრავლეთა თეორიის საწყისები. ნაწილი 3, საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის გამომცემლობა, თბილისი, 2019.

ა. ხარაზიშვილის სამეცნიერო შრომები ციტირებულია შემდეგ საერთაშორისო მაღალრეიტინგულ ჟურნალებში და ელექტრონულ და ბეჭდვით ენციკლოპედიებში:

ზოგადი მათემატიკური ჟურნალები:

Proceedings of American Mathematical Society;
Transactions of Amer. Math. Society;
Expositiones Mathematicae;
Fundamenta Mathematicae;
Bulletin of London Math. Society;
Mathematica Scandinavica;
Bulletin of Amer. Math. Society;
Israel Journal of Mathematics;
Acta Mathematica Hungarica;
Proceedings of the Japan Academy;
Doklady Math.;
Studia Scient. Mathem. Hungarica;

Studia Mathematica;
Colloquium Math.;
Bull. of Belgian Math. Society;
Dissertationes Mathematicae;
Journal of Mathematical Sciences;
Aequationes Mathematicae;
Publ. Math. Debrecen;
Bull. of Polish Acad. Sci.;
Ann. New York Acad. Sci.;
Czechoslovak Math. Journal;
Izvestia VUZ,
Acta Mathematica Sinica;
Central European Journal of Mathematics;
Tatra Mt. Math. Publ.;
Mathematica Slovaka;
New York Journal of Mathematics;
Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications;
Demonstratio Mathematica;
Opuscula Mathematica;
Ukrainian Math. Journal;
Georgian Math. Journal;

Elemente der Mathematik;
Amer. Math. Monthly;
Math. Intelligencer;
Gazeta Mathematica

დარგობრივი მათემატიკური ჟურნალები:

მათემატიკური ანალიზი:

Journal of Mathematical Analysis and its Applications;
Real Analysis Exchange;
P-adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Applications;
Journal of Applied Analysis;
Non-linear Analysis: Theory, Methods and Applications;
Communications in Mathematical Analysis.

ტოპოლოგია, გეომეტრია, ალგებრა:

Topology and its Applications;
Topology;
Questions and Answers in General Topology;
Discrete and Computational Geometry;
Journal of Geometry;
Geometriae Dedicata;
Topology Proceedings (Auburn University);
Algebra Universalis;
Contributions to Algebra and Geometry;
Linear Algebra and its Applications.

მათემატიკური ლოგიკა და სიმრავლეთა თეორია:

Annals of Pure and Applied Logic;
Studies in Computational Intelligence;
Mathematical Logic Quarterly;
Cybernetics and Systems Analysis;
Journal of Symbolic Logic.

ალბათობა და სტატისტიკა:

Theory of Stochastic Processes;
Journal of Theoretical Probability;
Stochastic Processes and their Applications;
Far East Journal of Theoretical Statistics;
Journal of Statistics: Advances in Theory and Applications.
Journal of Information Engineering and Applications.

ბეჭდვითი ენციკლოპედიები:

Handbook of Convex Geometry, v. 1-v.2, North Holland, 1991;

Handbook of Measure Theory, v. 1 – v. 2, North-Holland, 2002;

Вероятность и Математическая Статистика, Изд. Энциклопедия, Москва, 1999.

ელექტრონული ენციკლოპედიები (Wikipedia, Cyclopaedia):

Mesure de Lebesgue,
Random Element,
Theoreme de Steinhaus,
Egorov's Theorem,
Espace Separable,
Resolvable Space,
Non-measurable set

ა. ხარაზიშვილის შრომები ციტირებულია შემდეგ მონოგრაფიებში, მიმოხილვით სტატიებში, სახელმძღვანელოებში, ლექციათა კურსებში, სადისერტაციო შრომებში:

V. Boltyanskii, P.Soltan, Combinatorial Geometry of Various Classes of Convex Sets, Acad. Nauk Mold. SSR, "Stinitsa", Kishinev, 1978, 300 p. (in Russian).

J. Bohm, E. Hertel, Polyedergeometrie in n-dimensionalen Raumen konstanter Krummung, Birkhauser, Basel-Boston-Stuttgart, 1981, 380 p

V.G. Boltyanskii, Combinatorial Geometry, in the Series: Algebra, Topology, Geometry, v. 19, 1981 (in Russian).

N. Vakhania, V. Tarieladze, S. Chobanian, Probability Distributions in Banach Spaces, "Nauka", Moscow, 1985, 550 p. (in Russian).

A. Pelc, Invariant measures on discrete groups, Dissertationes Mathematicae, vol. CCLV, 1986.

S. Kakutani, Selected Papers, vol. 2, Birkhauser, Basel, 1986, 458 p

A. Kusraev, S. Maliugin, Some Questions of the Theory of Vector Measures, Inst. Math. SO AN SSSR, Novosibirsk, 1988, 200 p., (in Russian).

J.C. Morgan II, Point Set Theory, Marcel Dekker, New York, 1990, 280 p.

V. Boltyanskii, A. Soifer, Geometric Etudes in Combinatorial Mathematics, (with Introductions by P.Erdos, B.Grunbaum, C.Rousseau), Colorado Springs, 1991, 248 p.

S. Kwapien, W. Woyczynski, Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple, Birkhauser, Basel, 1992.

J. Trokhimchuk, Deletable Singularities of Analytic Functions, Izd. "Naukova Dumka", Kiev, 1992, 205 p. (in Russian).

R. Schneider, Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

J. Pach, New Trends in Discrete and Computational Geometry, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

G.L. Wise, E.B. Hall, Counterexamples in Probability and Real Analysis, Oxford University Press, Oxford, 1993.

J. Mioduszewski, Topologia przestrzeni euklidesowych, WUS, Warszawa-Katowice, 1994, 246 p. (in Polish).

R.K. Guy, R.E. Woodrow (editors), The Lighter Side of Mathematics: Proceedings of the Eugene Strens Memorial, MAA, New York, 1994.

M. A. Lifshits, Gaussian Random Functions, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

E. Marczewski, Collected Mathematical Papers, (with comments), Polish Academy of Sciences, Warszawa, 1996, 724 p.

V. Buldygin, S. Solntsev, Asymptotic Behaviour of Linearly Transformed Sums of Random Variables, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997, 500 p

V. Boltyanskii, H. Martini, P. Soltan, Excursions into Combinatorial Geometry, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 433 p

V. Bogachev, Gaussian Measures, "Nauka", Moscow, 1997, (in Russian).

K. Ciesielski, Set-theoretic real analysis, Journ. of Appl. Anal., v. 3, n. 2, 1997, pp. 147-191.

P. Howard, J. Rubin, Consequences of the Axiom of Choice, Amer. Math. Soc., 1998.

H. Martini, V. Soltan, Combinatorial problems on the illumination of convex bodies, Aequationes Mathematicae, Springer-Verlag, v. 57, 1999.

D.L. Renfro, Essay on non-differentiability points of monotone functions, The Math. Forum, Sci. Math., November, 2000.

M. Vath, Integration Theory, World Scienti¯c Publ. Co., London-Singapore, 2002, 277 p

R.J. Gardner, The Brunn-Minkowski inequality, Bull. Amer. Math. Soc., v. 39, n. 3, 2002

D.A. Vladimirov, Boolean Algebras in Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 2002, 632 p

M. Trott, The Mathematica Guide Book, Birkhauser, Basel, 2003, 1000 p.

V.I. Bogachev, Foundations of measure theory, vol. 1-2, Dynamics, Moscow, 2003 (in Russian). English version of this book was published by Springer-Verlag in 2006.

Ch. Castaing, P.R. de Fitte, M. Valadier, Young Measures on Topological Spaces: With Applications to Control Theory, Springer-Verlag, Heidelberg, 2004, 320 p.

G. Plebanek, Measures on Topological Spaces, (in Polish), Lecture Course 2004-2005, Wroclaw University, www.math.uni.wroc.pl/grzes/dydaktyka/wstep.pdf

Qi Guo, Minkowski measure of asymmetry and Minkowski distance for convex bodies, Uppsala Dissertations in Mathematics, v. 35, Uppsala, 2004.

J. Borsik, J. Haluska, Real Functions, vol. 1, Tatra Mountains Math. Publ., Slovak Academy of Sciences, Bratislava, 2004.

J. Borsik, J. Haluska, Real Functions, vol. 2, Tatra Mountains Math. Publ., Slovak Academy of Sciences, Bratislava, 2004.

H. Pursiainen, The algebraic interpretation of consistency in aggregation and quasi-linear index numbers, Dr. Thesis, University of Helsinki, 2004.

A. Liu, B. Shawyer (editors), A Taste of Mathematics, v. 9, Canadian Math. Society, Ontario, 2005.

J.I.U. Garcia, Aspectos Geometricos y Topologicos de las Curvas alpha-Densas, Thesis Doctoral, Universidad de Alicante, 2006.

C. Schutt, Masstheorie, lecture course, 2006, 219 pages. analysis.math.uni-kiel.de/schuett/masstheo.pdf

Wilman Brito, El Teorema de Categoria de Baire y Aplicaciones, 2007.

B. Weglorz, Introduction to Set Theory, Lecture Course, 2007, Polytechnica Wroclawska.

M. Kysiak, Deskryptywna Teoria Mnogosci, course of lectures, 2007 (in Polish).
www.mimuw.edu.pl/ mkysiak/dtm.html

M. Wunsch, Asymptotics of nonlinear di®usion and °uid dynamics equations, Dr. Thesis, UniversitÄat Wien, 2009, 120 p.

M. Kolar, Kmitajici znamenkove miry, Univerzity Karlovy, Praha, 2009.
S. Semmes, An introduction to some aspects of functional analysis, 2: Bounded
linear operators, Rice University, 2009

A. Gopfert, T. Riedrich, Ch. Tammer, Angewandte Funktionalanalysis, Vieweg+Teubner Verlag, Berlin, 2009

Chuan Zhang, Integration and Measure Theory, Lecture Course, 2010.
sites.google.com/site/chuanzhang04/.../2010-spring

N.H. Bingham, A.J. Ostaszewski, Normed versus topological groups: Dichotomy and duality, Dissertationes Math., 2010, 155 p., www.math.lse.ac.uk

J.J. Rotman, Advanced Modern Algebra, American Mathematical Society, New York, 2010.

A. Prosperetti, Advanced Mathematics for Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 2011

L. Bukovsky, The Structure of the Real Line, Birkhauser, Basel, 2011, 536 p.

M. Rupp, Theorems and Problems in Functional Analysis - The Answer Book 1: Elements of Set Theory and Topology, Springer, 2012

ა. ხარაზიშვილის

ზოგიერთი სამეცნიერო შედეგი

ალექსანდრე ხარაზიშვილმა პირველი ნაბიჯები სამეცნიერო კუთხით გადადგა გეომეტრიის სხვადასხვა მიმართულებით. როგორც თვითონ ბევრჯერ აღუნიშნავს, მის გეომეტრიისადმი დაინტერესებაში დიდი წვლილი მიუძღვის ვ. ბოლტიანსკის წიგნებს.

ა. ხარაზიშვილის მიერ გეომეტრიაში მიღებული შედეგებიდან გამოვყოფდი რამდენიმეს.

1. ა. ხარაზიშვილის შრომაში

Characteristic properties of parallelepipeds, Bull. Acad. Sci. GSSR, v. 72, n. 1, 1973, in Russian

მოცემულია ევკლიდეს სივრცეში პარალელეპიპედებისათვის შემდეგი დახასიათება:

ევკლიდეს m-განზომილებიანი $\mathbf{R}^m$ სივრცის არაცარიელი კომპაქტური ამოზნექილი P სიმრავლე არის n-განზომილებიანი პარალელეპიპედი $(n \le m)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ არსებობს ისეთი ნამდვილი $t \in (0,1)$ რიცხვი, რომ $P \cap (t \cdot P + h)$ სიმრავლე ცენტრულ სიმეტრიულია ყოველი $h \in \mathbf{R}^m$ ვექტორისათვის.

ეს შედეგი ციტირებულია ამოზნექილი გეომეტრიის ცნობილი ექსპერტების მიერ. მაგალითად:

H. Guggenheimer, E. Lutwak, Characterization of n-dimensional parallelotope, Amer. Math. Monthly, vol. 83, no. 6, 1976;

P. Gruber, Über den Durchschnitt einen abnehmenden Folge von Parallelepipeden, Elemente der Mathematik, v. 32, n. 1, 1977;

V. Soltan, Pairs of convex bodies with centrally symmetric intersections of translates, Discrete Comp. Geometry, v. 33, 2005.

აღსანიშნავია, რომ ამ შედეგზე დაყრდნობით გრუბერმა დაამტკიცა, რომ პარალელეპიპედების ყოველი კლებადი ოჯახის თანაკვეთა კვლავ პარალელეპიპედია.

ანალოგიური შედეგი იქნა მიღებული სიმპლექსებისათვის, რომელიც საფუძველი გახდა კოლმოგოროვის ერთ-ერთი პრობლემის ამოხსნისათვის.

2. შემდეგი ამოცანა, რომელიც მინდა გამოვყო არის მრავალგანზომილებიანი კომპაქტური ამოზნექილი სხეულის განათების ამოცანა.

ა. ხარაზიშვილის სტატიაში

A.B. Kharazishvili, To the problem of illumination, Bull. Acad. Sci. GSSR, v. 71, n. 2, 1973)in Russian)

მაგალითის სახით განხილულია m-განზომილებიანი $(m \geq 4)$ კომპაქტური ამოზნექილი სხეული $\mathbf{R}^m$ სივრცეში, რომელსაც აქვს მხოლოდ $m+1$ განსაკუთრებული საზღვრის წერტილი, მაგრამ შეუძლებელია მისი განათება სივრცის $m+1$ რაოდენობის სხივით.

ა. ხარაზიშვილის ეს შედეგი ციტირებულია ბევრ შრომაში. მაგალითად

V. Boltyanskii, P.Soltan, Combinatorial Geometry of Various Classes of Convex Sets, Acad. Nauk Mold. SSR, "Stinitsa", Kishinev, 1978, 300 p. (in Russian);

V. Boltyanskii, H. Martini, P. Soltan, Excursions into Combinatorial Geometry, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 433 p.;

V. Boltyanskii, A. Soifer, Geometric Etudes in Combinatorial Mathematics, (with Introductions by P.Erdös, B.Grünbaum, C.Rousseau), Colorado Springs, 1991, 248 p.;

J. Pach (ed.), New Trends in Discrete and Computational Geometry, Springer Verlag, Berlin, 1993.

3. ერდოშისა (Erdös) და სეკერეშის (Szekeres) ცნობილი პრობლემა მდგომარეობდა ისეთი უმცირესი ნატურალური $c(n)$ რიცხვის პოვნაში, რომ ყოველი ზოგადი მდებარეობის წერტილთა $X \subset \mathbf{R}^2$ სიმრავლისათვის $\mathbf{R}^2$ სივრცეში, რომლისთვისაც $card(X) = c(n)$, შეიცავს სულ ცოტა n რაოდენობის ამოზნექილად დამოუკიდებელ წერტილს.

ამოცანის ავტორებმა ივარაუდეს, რომ

$$c(n) = 2^{n-2} + 1.$$

რამსეის თეორემის თვლადი ფორმის გამოყენებით შესაძლებელი გახდა ჩვენება იმისა, რომ თუ $\mathbf{R}^2$-ში გვაქვს ზოგადი მდებარეობის წერტილთა უსასრულო სიმრავლე, მაშინ ის შეიცავს ამოზნექილად დამოუკიდებელ წერტილთა უსასრულო ქვესიმრავლეს.

ა. ხარაზიშვილის შრომაში

A.B. Kharazishvili, A note on convexly independent subsets of an infinite set of points, Georgian Mathematical Journal, vol. 9, no. 2, 2002, pp. 303 - 307

მიღებულია ანალოგიური შედეგი რამსეის თეორემის გამოყენების გარეშე. მითითებული შრომაში მოცემულია ასეთი სიმრავლის პოვნის ალგორითმი. ასევე, დამტკიცებულია, რომ ანალოგიური თეორემა არის მართებული იმ შემთხვევაშიც, როცა $X \subset \mathbf{R}^2$ არის ზოგადი მდებარეობის წერტილთა არათვლადი სიმრავლე.

4. ა. ხარაზიშვილის შრომაში

A.B. Kharazishvili, On maximal *ot*-subsets of the Euclidean plane, Georgian Mathematical Journal, vol. 10, no. 1, 2003, pp. 127—131

მოცემულია ot-set (სიმრავლე, რომლის ყოველი სამი წერტილი ქმნის ბლაგვკუთხა სამკუთხედს) აგების კომბინატორული კონსტრუქცია $\mathbf{R}^2$-ში. თანაც ეს სიმრავლე არის დისკრეტული და არის მაქსიმალური ჩართვის თვალსაზრისით. ამ სიმრავლის დისკრეტულობიდან გამომდინარეობს, რომ აგებული სიმრავლე თვლადია. ანალოგიური შედეგები მიღებულია ევკლიდეს მრავალგანზომილებიან სივრცეებშიც. ასევე, ანალოგიური ამოცანები ამოხსნილია rt-set-სთვისაც (სიმრავლე, რომლის ყოველი სამი წერტილი ქმნის მართკუთხა სამკუთხედს).

დიდია ა. ხარაზიშვილის დამსახურება ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის განვითარებაში. ინვარიანტული ზომის თეორია მან აიყვანა ახალ საფეხურზე, რაც გამოიხატება ა. ხარაზიშვილის მიერ ახლებური ხედვებით და მეთოდებით.

ლებეგის ზომის გაგრძელების ამოცანა არის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი კლასიკური ზომის თეორიისათვის. ამ მიმართულებით იქნა მნიშვნელოვანი შედეგები მიღებული ბანახის, მარჩევსკის, სერპინსკის, კოდაირას, კაკუტანის, ოქსტობის და სხვათა მიერ. სასიხარულოა ის ფაქტი, რომ ლებეგის ზომის ინვარიანტული გაგრძელებების აგების კუთხით არსებითი წვლილი შეიტანეს ქართველმა მათემატიკოსებმა. განსაკუთრებით, ეს ეხება შ. ფხაკაძეს და ა. ხარაზიშვილს. შ. ფხაკაძის მიერ ევკლიდურ სივრცეში გამოყოფილ იქნა სიმრავლეთა კლასი (აბსოლუტურად ნულზომადი სიმრავლეები), რომელთა გამოყენებაც

ლებეგის ზომის გაგრძელების ამოცანაში გარკვეული თვალსაზრისით აზოგადებდა მარჩევსკის ცნობილ მეთოდს. მიუხედავად ამისა, ლებეგის ზომის თეორიის ფარგლებში მაინც ვერ მოხერხდა ამოხსნილიყო ბევრი ამოცანა, რომელიც ეხებოდა ლებეგის ზომის ისეთ თვისებებს, როგორიცაა ცალსახობის თვისება, მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისება, შპილრაინ-მარჩევსკის ამოცანა, ნორმალური გაგრძელება და მათ შორის ურთიეთკავშირებს. ა. ხარაზიშვილის დამსახურება იყო ის გარემოება, რომ ის იხილავდა ანალოგიურ ამოცანას ზოგადი სტრუქტურებისათვის, რაც მას აძლევდა მეტ თავისუფლებას ტექნიკური აპარატის გამოყენების კუთხით. ამის ნათელი მაგალითია მთელი რიგი ამოცანების ამოხსნები, რომლებიც მოცემულია მის მონოგრაფიაში

Invariant Extensions of the Lebesgue Measure, Izd. Tbil. Gos. Univ., Tbilisi, 1983, (in Russian).

ზომის თეორიაში გამოვყოფდი შემდეგ შედეგებს:

1. **სერპინსკის მიერ დასმული იქნა შემდეგი ამოცანა:**

შეიძლება თუ არა ლებეგის ზომის ისეთი გაგრძელების აგება, რომელიც შეინარჩუნებს D_1-ინვარიანტულობას.

დამტკიცებული იქნა, რომ არათვლადი სიმრავლე, რომელიც აღჭურვილია ტრანზიტულად და თავისუფლად მოქმედი ჯგუფით, წარმოიდგინება აბსოლუტურად უგულებელყოფადი სიმრავლეების თვლადი გაერთიანების სახით. ამ წინადადებისა და ჰამელის ბაზისის ტექნიკით ნაჩვენები იყო, რომ ევკლიდეს სივრცე ასევე წარმოიდგინება π_n-აბსოლუტურად უგულებელყოფადი სიმრავლეების თვლადი გართიანების სახით. ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ მოყვანილი წინადადების დამტკიცებაში გამოყენებული იყო პირდაპირი ნამრავლების მეთოდი. ეს იყო სიახლე ზომის გაგრძელების ამოცანისათვის. ზემოთ მითითებული თეორემების გამოყენებით ამოიხსნა სერპინსკის ამოცანა დამატებითი სიმრავლური აქსიომების გარეშე.

2. **ზომის ინვარიანტული გაგრძელების სიურექციული ჰომომორფიზმის მეთოდი.**

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ლებეგის ზომის გაგრძელების სერპინსკის ამოცანის ამოხსნის დროს პირველად გამოყენებული იყო პირდაპირი ნამრავლების მეთოდი. ა. ხარაზიშვილის მიერ ეს მეთოდი განზოგადდა და ჩამოაყალიბა ზომის გაგრძელების სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდი. ამ მეთოდის გამოყენება უკავშირდება ისეთ ცნობილ ამოცანებს, როგორიცაა: მცირე სიმრავლეების ალგებრულ ჯამები, ზომის არასეპარაბელურ ინვარიანტულ გაგრძელებები, კვაზიინვარიანტულ ზომის არსებობის საკითხი უსასრულო განზომილებიან სივრცეებში და სხვ. ზომის ინვარიანტული გაგრძელების სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდი უკვე განიხილება კლასიკური გაგრძელების მეთოდების გვერდით (მარჩევსკის მეთოდი, კაკუტანისა და კოდაირას მეთოდი, კაკუტანისა და ოქსტობის მეთოდი).

Topics in Measure Theory and Real Analysis, Atlantis Press and World Scientific, Amsterdam-Paris, 2010, 470 p.

3. **ლებეგის ზომის არასეპარაბელური გაგრძელება, რომელიც მეტრიკულად ტრანზიტულია.**

1950 წელს კოდაირასა და კაკუტანის, კაკუტანისა და ოქსტობის მიერ ერთმანეთისაგან სრულიად განსხვავებული მეთოდებით აგებულ იქნა ლებეგის ზომის არასეპარაბელური გაგრძელებები. პირველი ეფუძნებოდა მასიური გრაფიკის მქონე ფუნქციის თვისებებს, ხოლო მეორე კი თითქმის ინვარიანტულ სიმრავლეებს და მათ თვისებებს. მაგრამ აღმოჩნდა, რომ აგებულ გაგრძელებებს არ გააჩნდათ ლებეგის ზომისათვის დამახასიათებელი თვისებები. კერძოდ, ეს ეხება ერთადერთობის საკითხს (თუმცა, უნდა აღინიშნოს, რომ კაკუტანისა და ოქსტობის მეთოდს ჰქონდა ეს თვისება, მაგრამ ეს ფაქტი მათთვის შეუმჩნეველი იყო). ა. ხარაზიშვილმა მოგვცა ლებეგის ზომის ინვარიანტული გაგრძელების განსხვავებული მეთოდი, რომელიც ეფუძნებოდა გარკვეული თვისებების მქონე თითქმის ინვარიანტული სიმრავლეების ბუნებას და გაგრძელებული ზომა იყო მეტრიკულად ტრანზიტული.

ეს შედეგი აისახა შემდეგ შრომაში:

On a nonseparable extension of the Lebesgue measure, DAN SSSR, v. 226, n. 1, 1976 (in Russian)

4. უსასრულო განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეში არანულოვანი, სიგმა-სასრულო, ინვარიანტული ზომის არსებობა

როგორც ცნობილია, უსასრულო განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში არ არსებობს ლებეგის ზომის სრული ანალოგი. ანუ არანულოვანი, სიგმა-სასრულო, ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომა. ეს ფაქტი პირველად მოცემულ იქნა გირსანოვისა და მიტიაგინის შრომაში, მაგრამ ის უშუალოდ გამომდინარეობს, აგრეთვე, ა. ხარაზიშვილის შედეგებიდანაც.

ა. ხარაზიშვილის მიერ აგებულ იქნა ჰილბერტის l_2 სივრცეში არანულოვანი, სიგმა-სარულო, ყველგან მკვრივი ქვეჯგუფის მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომა, რომლის გასრულებაც ფლობს ერთადერთობის თვისებას. აგების პროცესში გამოყენებული იქნა ინდუქციური ზღვარი, რაც აგების მეთოდს ანიჭებს უპირატესობას სხვა მეთოდებთან შედარებით. უნდა აღინიშნოს, რომ ეს ზომა გარკვეული თვალსაზრისით არის სავსებით უნიკალური იმ აზრით, რომ ის გამოიყენება ისეთივე წარმატებით უსასრულო განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში, როგორც ლებეგის ზომა ევკლიდეს სივრცეებში.

აგებული ზომის საშუალებით მიღებული იქნა შემდეგი შედეგები:

ა) სეპარაბელურ ბანახის სივრცეში ალბათური, ყველგან მკვრივი ქვეჯგუფის მიმართ კვაზიინვარიანტული ბორელის ზომის არსებობა;

ბ) არაკომუტატიურ არალოკალურად კომპაქტურ უსასრულო განზომილებიან ტოპოლოგიურ ჯგუფზე ბმული ყველგან მკვრივი ქვეჯგუფის მიმართ ინვარიანტული ზომის არსებობა;

გ) უსასრულო განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში არანულოვანი სიგმა-სასრულო, ყველგან მკვრივი ქვეჯგუფის მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომის არასეპარაბელური გაგრძელების არსებობა;

დ) უსასრულო განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში ნამდვილ მნიშვნელობიანი ფუნქციების ზომადობის საკითხის შესწავლა და გაგრძელების ამოცანა;

ე) უსასრულო განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში მოცემული ზომის გაგრძელების თვისებების ურთიერთკავშირების შესწავლა.

On invariant measures in a Hilbert space, Bull. Acad. Sci. GSSR, v. 114, n. 1, 1984 (in Russian)

5. **სიმრავლისა და ფუნქციის ზომადობის ცნების მოდიფიკაცია.**

2005 წელს მარჩევსკის ხსოვნისადმი მიძღვნილ კონფერენციაზე პოლონეთში ა. ხარაზიშვილმა თავისი მოხსენება დაამთავრა შემდეგი ფრაზით: ზომის თეორიის მომავალი ეს არის ზომადობის განხილვა ზომათა კლასის მიმართ.

ა. ხარაზიშვილმა შემოიტანა ფუნქციისა და სიმრავლის ზომადობის ცნების კლასიფიკაცია ზომათა კლასის მიმართ (უნივერსალურად ზომადი, ფარდობითად ზომადი, აბსოლუტურად არაზომადი).

ამ კონცეპციის ფარგლებში ნაჩვენები ზოგიერთი შედეგი;

(ა) ვიტალის სიმრავლე აბსოლუტურად არაზომადია ლებეგის ზომის ინვარიანტული გაგრძელებათა კლასის მიმართ;

(ბ) ვიტალის სიმრავლე ფარდობითად ზომადია ლებეგის ზომის კვაზიინვარიანტული გაგრძელებათა კლასის მიმართ;

(გ) კოშის ფუნქციონალური განტოლების არატრივიალური ამონახსნი აბსოლუტურად არაზომადია ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული არანულოვანი სიგმა-სასრულო, დიფუზიური ბორელის ზომათა კლასის მიმართ;

(დ) განზოგადდა სერპინსკის ცნობილი ამოცანა ნული ზომის სიმრავლეთა არაზომადი ალგებრული ჯამის არსებობასთან დაკავშირებით.

(ე) იძლევა ზომის გაგრძელების ამოცანის ამოხსნას.

Topics in Measure Theory and Real Analysis, Atlantis Press and World Scientific, Amsterdam-Paris, 2010, 470 p.

6. **კოშის ამოცანა ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის, როცა განტოლების მარჯვენა მხარე არის ლებეგის აზრით არაზომადი ფუნქცია.**

ა. ხარაზიშვილმა ორი ნამდვილი ცვლადის ფუნქციისათვის შემოიტანა სუსტად სუპ-ზომადი ფუნქციის ცნება. მან დაამტკიცა, რომ არსებობენ სუსტად სუპ-ზომადი ფუნქციები,

რომლებიც არ არიან სუპ-ზომადები. აგრეთვე დაამტკიცა, რომ არსებობს სუსტად სუპ-ზომადი და ლებეგის აზრით არაზომადი ფუნქცია

$$\Psi : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

რომლის შესაბამისი კოშის ამოცანას

$$y' = \Psi(x, y) \qquad (y(x_0) = y_0)$$

აქვს ერთადერთი ამონახსნი ნებისმიერი $(x_0, y_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ წერტილისათვის.

თეორემა საინტერესოა იმ თვალსაზრისით, რომ ერთის მხრივ ის იძლევა კოშის ამოცანის ერთადერთ ამონახსნს ნებისმიერი საწყისი პირობისათვის ლოკალურად აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციების კლასში. მეორეს მხრივ, აღსანიშნავია, რომ თუ ბევრ გამოკვლევებში Ψ ფუნქციას მოთხოვნილი აქვს გარკვეული კარგი პირობების დაკმაყოფილება, მოყვანილ შემთხვევაში გამოდის, რომ უაღრესად ცუდ პირობებშიც კი კოშის ამოცანას შეიძლება გააჩნდეს ერთადერთი ამონახსნი. რადგან ფუნქციის არაზომადობა პირდაპირ კავშირშია ამორჩევის აქსიომასთან, ამიტომ ამ შემთხვევაში ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხის გადაჭრა არაეფექტურია. ანუ, შესაძლებელია, დამატებითი სიმრავლურ-თეორიული აქსიომების გამოყენებითაც კი (მათ შორის განსაკუთრებულ როლს თამაშობენ კონტინუუმ-ჰიპოთეზა, მარტინის აქსიომა და კომბინატორიკის სხვა დებულებები უსასრულო ხეების ტერმინებში).

Sup-measurable and weakly sup-measurable mappings in the theory of ordinary differential equations, Journal of Applied Analysis, vol. 3, no. 2, 1997.

გიოედელ- MV(C)-ალგებრების შესახებ

რევაზ გრიგოლ ია [ა], *ანტონიო დი ნოლა* [ბ]
ელ-ფოსტა: revaz.grigolia@tsu.ge [ა]
მათემატიკის დეპარტამენტი, ზუსტი და
საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი,
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ელ-ფოსტა: adinola@unisa.it [ბ]
[ბ] მათემატიკის დეპარტამენტი, სალერნოს
უნივერსიტეტი, იტალია

შემოღებულია ახალ ი ალ გებრა (A, ⊗, ⊕, *, $\to_G$, 0, 1), რომელ საც ეწოდ ება გოედელ-MV-ალგებრა (*GMV*-ალგებრა), თუ (A, ⊗, ⊕, *, 0, 1) არის MV-ალგებრა და (A, $\to_G$, 0, 1) არის გოედელის ალგებრა (ე. ი. ჰეიტინგის ალგებრა, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას

$$(x \to_G y) \vee (y \to_G x) = 1).$$

- ნებისმიერი GMV-ალგებრა არის ბი-ჰეიტინგის ალგებრა, ე. ი. GMV-ალგებრაში არსებობს კო-ჰეიტინგის იმპლიცაცია (ანუ ფსევდო-სხვაობა) $\to_{cH}$, რომელიც გამოისახება შემდეგნაირად:

$$x \to_{cH} y = (y^* \to_G x^*)^*.$$

დავუშვათ, რომ (A, ⊗, ⊕, *, $\to_G$, 0, 1) არის GMV-ალგებრა. ქვესიმრავლე $F \subset A$ ეწოდება სკოლემის MV-ფილტრი, თუ F MV-ფილტრია და თუ $x \in F$, მაშინ $\neg\ulcorner x \in F$, სადაც $\neg x = x \to_G 0$ (ჰეიტინგის უარყოფა) და $\ulcorner x = 1 \to_{cH} x$ (კო-ჰეიტინგის უარყოფა).

GMV-ალგებრას ეწოდება GMV(C)-ალგებრა თუ დამატებით სრულდება ტოლობა $2(x^2) = (2x)^2$.

- GMV-ალგებრის (A, ⊗, ⊕, *, $\to_G$, 0, 1) კონგრუეციათა მესერი იზომორფულია GMV-ალგებრის (A, ⊗, ⊕, *, $\to_G$, 0, 1) სკოლემის ფილტრების მესერისა.
- ნებისმიერი წრფივად დალაგებული GMV-ალგებრა არის მარტივი, ე. ი. კონგრუეციათა მესერი ორ-ელემენტიანია.

დავუშვათ A GMV-ალგებრაა და $\mathcal{B}(A) = \{x \in A: x \otimes x = x\}$.

- $\mathcal{B}$ არის კოვარიანტული ფუნქტორი GMV-ალგებრების **GMV** კატეგორიიდან ბულის ალგებრების **B** კატეგორიაში.
- **დახასიათებულია თავისუფალი სასრულად წარმოქმნილი** *GMV*(C)-ალგებრ $F_{GMV(C)}(m) = C_m^{2^m}$, სადაც C_m არის m-წარმომქმნელიანი ჩანგის წრფივად დალაგებული ალგებრა.

უსასრულო მონო-უნარული ალგებრების ავტომორფიზმები და მათი ზოგიერთი გამოყენება

არჩილ ყიფიანი
მათემატიკის დეპარტამენტის,
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი,
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ე-მეილი: Archil.kipiani@tsu.ge

მოცემულია უსასრულო მონო-უნარული და ნაწილობრივი მონო-უნარული ალგებრების ავტომორფიზმების ჯგუფების კარდინალური რიცხვების დახასიათება. მოცემულია ამ დახასიათების გამოყენება სხვადასხვა კომბინატორულ ამოცანაში.

ლიტერატურა:

[1]. **A. Kipiani**, Automorphism groups of mono-unary algebras and CH, Georgian Mathematical Journal · **Published Online**: 2019-08-14 | **DOI:** https://doi.org/10.1515/gmj-2019-2048

სიმრავლურ-თეორიული მოდელები ამორჩევის აქსიომის გარეშე

მარიამ ბერიაშვილი

ივ. ჯავახიშვილის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ი. ვეკუას გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
ე-მეილი: Mariam_beriasvhili@yahoo.com

მოხსენებაში წარმოდგენილია სიმრვალურ-თეორიული მოდელების აგება ფორსინგის საშუალებით. ილუსტრირებულია ფორსინგის აპარატის გამოყენებით სხვადასხვა უცნაური თვისებების მქონე სიმრავლეების არსებობა ისეთ მოდელში სადაც არ სრულდება ნამდვილ რიცხვთა სავსებით დალაგება.

სპეციალური ტიპის წერტილოვანი სიმრავლეები და სილვესტრის ამოცანა

თენგიზ ტეტუნაშვილი

მათემატიკის დეპარტამენტი,
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი,
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
ე-მეილი: tengiztetunashvili@gmail.com

მოხსენებაში ნაჩვენებია სპეციალური ტიპის წერტილოვანი სიმრავლეების არსებობა. აღნიშნული სიმრავლეების არსებობის ერთ-ერთ უშუალო შედეგს წარმოადგენს წერტილოვანი სიმრავლეების შესახებ სილვესტრის ცნობილი თეორემის, გარკვეული თვალსაზრისით, გაუმჯობესება.

სხვადასხვა ტიპის მრავალწახნაგები მრავალგანზომილებიან R^n სივრცეში

შალვა ბერიაშვილი

მათემატიკის დეპარტამენტი,
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი,
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
ე-მეილი: shalva_89@yahoo.com

თანამედროვე მათემატიკის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან მიმართულებას დისკრეტული ანუ კომბინატორული გეომეტრია წარმომადგენს. დისკრეტული გეომეტრიის ერთ-ერთ მნიშველოვანი ამოცანა კი ფიგურათა ტრიანგულაციებისა და მათი თვისებების შესწავლაა.

R^n ევკლიდურ სივრცეში ნებისმიერი P მრავალწახნაგის ტრიანგულაცია ეწოდება მის დაყოფას ისეთ n-განზომილებიან სიმპლექსებად რომელტაც საერთო m-განზომილებიანი სიმპლექსები აქვთ. $(-1 \leq m \leq n-1)$.

კერძოდ, თუ განვიხილავთ სიბრტყეზე მრავალკუთხედების ტრიანგულაციას დამატებითი წვეროების გარეშე, მაშინ ცნობილია, რომ ყოველი n წვეროს მქონე მრავალკუთხედი იყოფა $n-3$ დიაგონალით ზუსტად $n-2$ სამკუთხედად.

საინტერესოა, რომ უფრო მაღალ განზომილებებში ტრიანგულაციათა რიცხვის შეფასება არაზუსტია.

მოხსენებაში განხილულია მრავალწახნაგათა ისეთი კლასი, რომელთა საშუალებითაც შესაძლებელია მაღალ განზომილებიან სივრცეში მრავალწახაგათა ტრიანგულაციათა რიცხვის შეფასებების დადგენა.

Acknowledgement: This work was supported by Shota Rustaveli National Science Foundation (SRNSF), Grant PHDF-19-3802.

ზომის გაგრძელების ერთი მეთოდის შესახებ

ნინო რუსიაშვილი
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
ე-მეილი: nino.rusiashvili@gmail.com

ინვარიანტული და კვაზიინვარიანტული ზომის გაგრძელების ერთ-ერთ მეთოდს წარმოადგენს სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდი (იხილეთ, [1], [2]). ამ მეთოდის არსი მდგომარეობს იმასი, რომ გაგრძელებული ზომა ინარჩუნებს საწყისი ზომის თვისებებს.

ვთქვათ, (G_1, μ_1) და (G_2, μ_2) არის ორი ჯგუფი, რომლებზეც მოცემულია სიგმა-სასრულო მარცხნიდან ინვარიანტული ზომები და ვთქვათ, ასახვა

$$f : G_1 \to G_2$$

არის ჰომომორფიზმი.

ვიტყვით, რომ f არის თითქმის სიურექციული ჰომომორფიზმი, თუ მისი გრაფიკი არის $(\mu_1 \times \mu_2)$ მსუქანი $(G_1 \times G_2)$-ში.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა. ვთქვათ, $(G_1, \cdot)$ და $(G_2, \cdot)$ არის ნებისმიერი ორი არათვლადი ჯგუფი და G_2 აღჭურვილია G_2-მარცხენა-ინვარიანტული ალბათური μ_2 ზომით და ვთქვათ, ასახვა

$$f : G_1 \to G_2$$

არის თითქმის სიურექციული ჰომომორფიზმი.

მაშინ არსებობს ორი μ_1 და μ_1' ზომა G_1-ზე, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

1. μ_1 არის არაატომური სიგმა-სასრული G_1-მარცხენა-ინვარიანტული ზომა G_1-ზე;
2. μ_1' არის μ_1-ის გაგრძელება;
3. μ_1' არის G_1-მარცხენა-ინვარიანტული ზომა.

Acknowledgement: This work was supported by Shota Rustaveli National Science Foundation of Georgia (SRNSFG), Grant FR-18-6190.

გამოყენებული ლიტერატურა:

[1] A. Kharazishvili, Topics in Measure Theory and Real Analysis, Atlantic Press/World Scientific, 2009.
[2] A. Kirtadze, N. Rusiashvili, On some methods of extending invariant and quasi-invariant measures, Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute, vol. 172, Issue 1.

ძლიერი ერთადერთობის თვისების შესახებ უსასრულო განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში

მარიკა ხაჩიძე

მათემატიკის დეპარტამენტი,
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი,
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
ე-მეილი: m.khachidze1995@gmail.com

ვთქვათ, E არაცარიელი საბაზისო სივრცეა, რომელიც აღჭურვილია გარდაქმნათა G ჯგუფით და ვთქვათ, M არის σ-სასრულო G-ინვარიანტული ზომათა კლასი, განსაზღვრული E-ზე.

ვიტყვით, რომ X სიმრავლე ფლობს ერთადერთობის თვისებას M კლასის მიმართ, თუ ყოველი ორი $\mu_1 \in M$ და $\mu_2 \in M$ ზომისათვის, რომლებისთვისაც $X \in dom(\mu_1)$ და $X \in dom(\mu_2)$, სრულდება $\mu_1(X) = \mu_2(X)$ ტოლობა.

$\mu \in M$ ზომა ფლობს ძლიერი ერთადერთობის თვისებას M კლასის მიმართ, თუ $dom(\mu)$ შეიცავს მხოლოს იმ ელემენტებს, რომლებიც ფლობენ ერთადერთობის თვისებას.

როგორც ცნობილია $\mathbf{R}^\infty$ სივრცეში არსებობს არანულოვანი σ-სასრულო ბორელის ზომა, რომელიც ინვარიანტულია ამ სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ და არის მეტრიკულად ტრანზიტული ([1]). თუ გამოვიყენებთ ამ ზომის აგების სქემას მტკიცდება, რომ არსებობს $\mathbf{R}^\infty$ სივრცის დაყოფა ისეთ ორ თითქმის ინვარიანტულ სიმრავლედ, რომლებიც სიმეტრიულები არიან სივრცის კოორდინატთა სათავის გარდაქმნის მიმართ ([2]).

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა. $\mathbf{R}^\infty$ სივრცეში არსებობს არანულოვანი σ-სასრულო ინვარიანტული ბორელის ზომა, რომელიც ფლობს ძლიერი ერთადერთობის თვისებას.

გამოყენებული ლიტერატურა:

[1] A.B. Kharazishvili, On invariant measures in the Hilbert space, Bull. of the Acad. of Sci., of the GSSR, 114, 1, (1984), 41{48 (in Russian).
[2] M. Khachidze, A. Kirtadze, On the one example of application of almost invariant sets, Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, Volume 32, 2018.

Acknowledgement: This work was supported by Shota Rustaveli National Science Foundation of Georgia (SRNSFG), Grant FR-18-6190.

კოშის ფუქციონალური განტოლების ამონახსნის ზომადობის შესახებ

ჯუმბერ ოდიშელიძე

მათემატიკის დეპარტამენტი,
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი,
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
ე-მეილი: odishelidzejumberi@gmail.com

[1] და [2] შრომებში მოცემულია ფუნქციის ზომადობის ცნება ზომათა კლასების მიმართ (უნივერსალურად (აბსოლუტურად) ზომადი ფუნქცია; აბსოლუტურად არაზომადი ფუნქცია; ფარდობითად ზომადი ფუნქცია).

მოხსენების ძირითადი არსი მდგომარეობს შევისწავლოთ კოშის ფუნქციონალური განტოლების

$$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right) \quad \left(x,y\in\mathbf{R}\right).$$

ამონახსნის ზომადობის საკითხი.

ცხადია, რომ მოცემულ განტოლებას გააჩნია ბევრი ბუნებრივი ამონახსნი. მართლაც, ყოველი ფუნქცია

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$$

რომელიც აკმაყოფილებს

$$f\left(x\right)=a\cdot x \quad \left(x\in\mathbf{R}\right)$$

ტოლობას, ყოველი ფიქსირებული ნამდვილი a-სთვის წარმოადგენს განტოლების ამონახსნს. ჰამელის ბაზისის ტექნიკის გამოყენების მტკიცდება, რომ არსებობს კოშის ფუნქციონალური განტოლების არატრივიალური ამონახსნი, რომელიც არაზომადია ლებეგის აზრით.

ზემოთ მოყვანილი მიდგომის გათვალისწინებით დამტკიცებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. არსებობს კოშის ფუნქციონალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც აბსოლუტურად არაზომადია $M\left(\mathbf{R}\right)$ ზომათა კლასის მიმართ, სადაც $M\left(\mathbf{R}\right)$-ით აღნიშნულია არანულოვანი, σ-სასრული დიფუზიური ბორელის ზომათა ოჯახი $\mathbf{R}$-ზე.

გამოყენებული ლიტერატურა:

[1] A. Kharazishvili, Topics in Measure Theory and Real Analysis, Atlantic Press/World Scientific, 2009.

[2] A. Kharazishvili, A. Kirtadze, *On the measurability of functions with respect to certain classes of measures,* Georgian Mathematical Journal, vol. 11, no. 3, 2004, pp. 489 – 494.

ვ. სერპინსკის ერთი ამოცანის შესახებ

მეგი კაპანაძე
მათემატიკის დეპარტამენტი,
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი,
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
ე-მეილი: megi.kapanadze.1997@gmail.com

ვ. სერპინსკის მიერ დაისვა შემდეგი ამოცანა:

შესაძლებელია თუ არა ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე მოცემული ლებეგის ზომა გაგრძელდეს D_1 ინვარიანტულობის შენარჩუნებით.

ზოგადი ფორმით ამ ამოცანის ჩამოყალიბება მიიღებს შემდეგ სახეს:

ვთქვათ, E საბაზისო სივრცეა, რომელიც აღჭურვილია გარდაქმნათა G ჯგუფით და μ არის σ-სასრულო G-ინვარიანტული ზომა, რომელიც განსაზღვრულია E-ს ქვესიმრავლეთა რაიმე σ-ალგებრაზე. შესაძლებელია თუ არა μ ზომა მკაცრად გაგრძელდეს G-ინვარიანტულობის შენარჩუნებით.

ცნობილია, რომ დამატებითი სიმრავლურ-თეორიული აქსიომების მიღების შემთხვევაში ამოცანაზე პასუხი დადებითია. ამიტომ ინტერესს იწვევდა სერპინსკის ამოცანა ამოიხსნებოდა თუ არა დამატებითი აქსიომების მიღების გარეშე. ამ კითხვაზე დადებითი პასუხი გაიცა ა. ხარაზიშვილის მიერ.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. ვთქვათ, $card(E)=\omega_1$ და ამ სივრცის გარდაქმნათა G ჯგუფი მოქმედებს ტრანზიტულად და თავისუფლად. მაშინ არსებობს აბსოლუტურად უგულებელყოფადი სიმრავლეთა თვლადი $\{X_i : i\in \mathbf{N}\}$ მიმდევრობა, რომ $E=\bigcup_{i\in \mathbf{N}} X_i$.

ამ თეორემიდან კი გამომდინარეობს, რომ ყოველი σ-სასრული G-ინვარიანტული ზომა თეორემა 1-ის პირობებში არის გაგრძელებადი ინვარიანტულობის შენარჩუნებით.

თეორემა 2. ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე მოიძებნება D_1-აბსოლუტურად უგულებელყოფადი სიმრავლეთა თვლადი $\{X_i : i\in \mathbf{N}\}$ მიმდევრობა, რომელთა გაერთიანებას დაემთხვევა $\mathbf{R}$-ს.

თეორემა 2-დან კი გამომდინარეობს, რომ ყოველი არანულოვანი σ-სასრული D_1-ინვარიანტული ზომა არის გაგრძელებადი D_1-ინვარიანტულობის შენარჩუნებით.

ანალოგიური ამოცანა იმ შემთხვევაში, როცა $n\geq 2$, მართებულია მხოლოდ სიმრავლეთა თეორიის დამატებითი აქსიომის მიღების შემთხვევაში.

გამოყენებული ლიტერატურა:

[1] A. Kharazishvili, Invariant Extensions of the Lebesgue measure, Tbilisi, 1983 (in Russian).

მცირე სიმრავლეები ალგებრული ჯამის ოპერაციის მიმართ

ოთარი ზუკაკიშვილი
მათემატიკის დეპარტამენტი,
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი,
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
ე-მეილი: otoghost@gmail.com

ისტორიულად პირველი მაგალითი, რომელიც გვიჩვენებენ რომ ნამდვილ რიცხვთა ღერძის ნული ზომის (მცირე) ქვესიმრავლეების ალგებრული ჯამი არ ინარჩუნებს მდგრადობას ალგებრული ჯამის ოპერაციის მიმართ, წარმოადგენენ $C+C$ სიმრავლე, სადაც C არის კანტორის სიმრავლე.

ვ. სერპინსკიმ ჰამელის ბაზისის ტექნიკის გამოყენებით აჩვენა, რომ ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}$ ღერძზე არსებობს ლებეგის λ ზომის მიმართ ორი ისეთი მცირე X და Y სიმრავლე, რომ

$$X+Y \in dom(\lambda).$$

ამ ამოცანის პირდაპირი ანალოგი არათვლად G ჯგუფზე განსაზღვრული სრული σ -სასრული G-ინვარიანტული μ ზომისათვის ღიად რჩება.

მოყვანილი ამოცანის ფორმულირებამ მიიღო შემდეგი სახე: არსებობს თუ არა მოცემული სრული σ-სასრული G-ინვარიანტული μ ზომის ისეთი გაგრძელება μ', რომ μ'-ის მიმართ ნული ზომის რაიმე ორი X და Y სიმრავლისათვის გვექნება დამოკიდებულება

$$X \cdot Y \notin dom(\mu').$$

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. ვთქვათ, G არის არათვლადი კომუტატიური ჯგუფი, რომელზეც განსაზღვრულია σ-სასრული G-ინვარიანტული μ ზომა. მაშინ არსებობს μ ზომის ისეთი გაგრძელება μ', რომ μ'-ის მიმართ ნული ზომის რაიმე ორი X და Y სიმრავლისათვის გვექნება

$$X \cdot Y \notin dom(\mu').$$

ზომათა ოჯახის მიმართ სიმრავლისა და ფუნქციის ზომადობის ცნების მოდიფიკაციის გამოყენებით დამტკიცებული იქნა შემდეგი თეორემა:

თეორემა 2. პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეში არსებობს ორი უნივერსალურად ნული ზომის სიმრავლე, რომელიც აბსოლუტურად არაზომადია არანულოვანი დიფუზიური σ-სასრული ბორელის ზომათა ოჯახის მიმართ.

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 2 მართებულია მარტინის აქსიომის მიღების შემთხვევაში.

გამოყენებული ლიტერატურა:

[1] A. Kharazishvili, *Topics in Measure Theory and Real Analysis,* Atlantic Press/World Scientific, 2009.

[2] A. Kharazishvili, A. Kirtadze. *On algebraic sums of measure zero sets in uncountable commutative groups*. Proc. A. Razmadze Math. Institute, vol. 135, 2004.

ვიტალის თეორემის განზოგადების შესახებ

ჯონი სადუნიშვილი

მათემატიკის დეპარტამენტი,
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი,
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
ე-მეილი: jonisadunishvili@gmail.com

ცნობილია, რომ ნებისმიერი ლებეგის აზრით ზომადი, მკაცრად დადებითი ზომის სიმრავლე შეიცავს ლებეგის აზრით არაზომად ქვესიმრავლეს. აგრეთვე მართებულია ამ წინადადების განზოგადებული ფორმაც. კერძოდ, თუ G არის D_n ჯგუფის ქვეჯგუფი, რომელიც შეიცავს $\mathbf{R}^n$ სივრცის პარალელურ გადატანათა ყველგან მკვრივ სიმრავლეს და μ არის ნებისმიერი G-ზომა, მაშინ ყოველი $X \subset \mathbf{R}^n$ სიმრავლე, რომლისთვისაც $\mu^*(X) > 0$, შეიცავს μ-ს მიმართ არაზომად ქვესიმრავლეს.

თუ სიმრავლის ზომადობას განვიხილავთ ზომათა კლასების მიმართ, მაშინ მართებულია უფრო ზოგადი ფაქტი, რომელიც ეკუთვნის ა. ხარაზიშვილს.

თეორემა. ვთქვათ, G არის D_n ჯგუფის ქვეჯგუფი, რომელიც შეიცავს $\mathbf{R}^n$ სივრცის პარალელურ გადატანათა ყველგან მკვრივ სიმრავლეს და μ არის ნებისმიერი G-ზომა. აღვნიშნოთ M_μ-თი იმ G-ზომათა კლასი, რომელიც შეიცავს μ ზომის ყველა შესაძლო გაგრძელებებს. მაშინ ყოველი μ-ზომადი $X \subset \mathbf{R}^n$ სიმრავლისათვის, რომლისთვისაც $\mu(X) > 0$, არსებობს $Z \subset X$ ქვესიმრავლე, რომელიც აბსოლუტურად არაზომადია M_μ ზომათა ოჯახის მიმართ.

კერძოდ, თუ μ-ს როლში ავიღებთ ლებეგის ზომას $\mathbf{R}^n$-ში, მაშინ ყოველი ლებეგის აზრით ზომადი და დადებითი ზომის სიმრავლე შეიცავს ისეთ ქვესიმრავლეს, რომელიც აბსოლუტურად არაზომადი იქნება ლებეგის ზომის ყველა G-ინვარიანტული გაგრძელებების კლასის მიმართ.

გამოყენებული ლიტერატურა:

[1] A. Kharazishvili, Invariant Extensions of the Lebesgue measure, Tbilisi, 1983 (in Russian).

ალბათურ ზომათა ნამრავლის ერთადერთბის თვისების შესახებ

ციალა ქვათაძე

მათემატიკის დეპარტამენტი,
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი,
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
ე-მეილი: ttkvatadze@gmail.com

ვთქვათ, E არის არაცარიელი სიმრავლე, G კი Ε E-ს გარდაქმნათა ჯგუფი. M-ით აღვნიშნოთ □σ-სასრული G G-ინვარიანტული ზომათა კლასი Ε E-ზე (M კლასიდან ზომების განსაზღვრის არეები შეიძლება განსხვავდებოდნენ ერთმანეთისაგან).

ვიტყვით, რომ $\mu_1 \in M$ ზომას აქვს ერთადერთობის თვისება Μ M-ში, თუ ყოველი $\mu_2 \in M$ ზომისათვის

$$dom\left(\mu_1\right) = dom\left(\mu_2\right)$$

დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს ტოლობა

$$\mu_1 = \mu_2 .$$

მართებულია შემდეგი დებულება, რომელშიც ნაჩვენებია, რომ ერთადერთობის თვისების მქონე ალბათურ ინვარიანტულ ზომათა ნამრავლი ინარჩუნებს ერთადერთობის თვისებას.

თეორემა. ვთქვათ, მოცემულია $\left(E_1, G_i, S_i, \mu_i\right)$ $\left(i \in I\right)$ ალბათური ინვარიანტული ზომიანი სივრცეთა ნებისმიერი ოჯახი. თუ ყოველი μ_i $\left(i \in I\right)$ ინვარიანტულ ზომას აქვს ერთადერთობის თვისება, მაშინ $\prod_{i \in I} \mu_i$ ალბათური ინვარიანტულ ზომაც აქვს ერთადერთობის თვისება.

ამ თეორემის დამტკიცებისას მნიშვნელოვანია ის ფაქტი, რომ □σ-სასრულო ზომის ინვარიანტულობის თვისება ნარჩუნდება ალგებრიდან მის მიერ წარმოქმნილ □σ-ალგებრაზე გადასვლის დროს.

ცნობილია, რომ ინვარიანტული ზომების ერთადერთობის საკითხი დაკავშირებულია მეტრიკული ტრანზიტულობის (ერგოდულობის) თვისებასთან. ამ დებულების დამტკიცებაში არსებითად გამოიყენება ს. ულამის კლასიკური შედეგი იმის შესახებ, რომ ω_1 კარდინალური რიცხვი არაზომადია ფართო აზრით და ამ ფაქტის დამტკიცება წმინდა კომბინატორული ხასიათისაა.

გამოყენებული ლიტერატურა:

[1] A. B. Kharazishvili, *On the uniqueness property for products of symmetric invariant probability measures,* Georgian Math. J. 9(2002), No. 1, 75–82.

ალბათურ ზომათა ოჯახების ზოგიერთ თვისების შესახებ

რუსუდან რაზმაძე

მათემატიკის დეპარტამენტი,
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი,
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
ე-მეილი: koshuashvilit@gmail.com

ვთქვათ, საბაზისო E სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაიმე S σ-ალგებრაზე მოცემულია ალბათურ ზომათა $\{\mu_\theta : \theta \in \Xi\}$ ოჯახი.

ვიტყვით, რომ $\{\mu_\theta : \theta \in \Xi\}$ ალბათურ ზომათა ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი, თუ არსებობს E-ს ზომად ქვესიმრავლეთა ისეთი $\{X_\theta : \theta \in \Xi\}$, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობა

$$(\forall \theta)\big(\theta \in \Xi \Rightarrow \mu_\theta(X_\theta) = 1\big).$$

დავუშვათ, რომ Ξ აღჭურვილია ზომადი სივრცის სტრუქტურით. ე.ნ. რომ Ξ-ზე მოცემული გვაქვს σ-ალგებრა S_1. ვიგულისხმებთ, რომ ერთწერტილიანი $\{\theta\}$, სადაც $\theta \in \Xi$ ეკუთვნის S_1-ს.

ვიტყვით, რომ $\{\mu_\theta : \theta \in \Xi\}$ ალბათურ ზომათა ოჯახისათვის არსებობს ძალდებული შეფასება, თუ არსებობს ზომადი ისეთი ფუნქცია

$$g : E \to \Xi,$$

რომ შესრულებულია პირობა

$$(\forall \theta)\Big(\theta \in \Xi \Rightarrow \mu_\theta\big(\{y : y \in E \,\&\, g(y) = \theta\}\big) = 1\Big).$$

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ალბათურ ზომათა ოჯახისათვის არსებობს ძალდებული შეფასება, მაშინ ასეთი ოჯახი ძლიერად განცალებადია.

ვიტყვით, რომ $\{\mu_\theta : \theta \in \Xi\}$ ალბათურ ზომათა ოჯახი წარმოადგენს სტატისტიკურ სტრუქტურას, თუ ასახვა

$$\mu : \Xi \times S \to [0,1],$$

რომელიც მოცემულია შემდეგი ფორმულით

$$\mu(\theta, Z) = \mu_\theta(Z) \quad (\theta \in \Xi,\, Z \in S)$$

აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

როგორიც გინდ იყოს $Z \in S$ სიმრავლე, ასახვა

$$\mu(.,Z) : \theta \to \mu_\theta(Z)$$

არის ზომადი S_1 σ-ალგებრის მიმართ და $[0,1]$ სეგმენტის ყველა ბორელის სიმრავლეთა ოჯახით წარმოქმნილი σ-ალგებრის მიმართ.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა. არსებობს $\{\mu_\theta : \theta \in \Xi\}$ ალბათურ ზომათა ისეთი ოჯახი, რომელიც იქნება ძლიერად განცალებადი და სტატისტიკური სტრუქტურა, მაგრამ მისთვის არ არსებობს ძალდებული შეფასება.

გამოყენებული ლიტერატურა:

[1] A. Kharazishvili, To the existence of statistical estimates for strongly separative families of probability measures, Proceedings of Tbilisi Mathem. Inst. of A. Razmadze, v. 92, Tbilisi, 1989.