АКАДЕМИЯ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР

ТБИЛИССКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. А. М. РАЗМАДЗЕ

На правах рукописи

Г. А. ДЖАНАШИЯ

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ТИПА СВЕРТКИ И ИХ СВЯЗИ С ЗАДАЧЕЙ ГИЛЬБЕРТА

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МЕЦНИЕРЕБА»
Тбилиси — 1965

Работа выполнена в Тбилисском математическом институте им. А. М. Размадзе Академии наук Грузинской ССР.

Защита диссертации состоится в III декаде июня 1965 г. в Тбилисском математическом институте им. А. М. Размадзе Академии наук Грузинской ССР (Тбилиси, ул. Дзержинского, 8).

Дата рассылки автореферата 20 мая 1965 г.

1. В диссертационной работе рассматриваются интегральные уравнения на прямой с ядром, зависящим от разности аргументов и связанная с этими уравнениями граничная задача Гильберта (задача линейного сопряжения [1], стр. 146).

Как известно ([2], [3], [4], [5]), во всех этих вопросах центральное место занимает задача факторизации функции.

Пусть M—коммутативное кольцо. Допустим, что кольцо M представляется в виде прямой суммы подколец M^+ и M^-. Если $M(M^+, M^-)$—кольцо без единицы, то через $M_e(M_e^+, M_e^-)$ будем обозначать кольцо, получающееся присоединением единицы к кольцу $M(M^+, M^-)$. Рассмотрим следующее уравнение

$$Gm^+ = m^- + g\,, \tag{1}$$

где $g \in M$, $G \in M_e$ и имеет обратный элемент, а m^+ и m^- искомые элементы соответственно из подколец M^+ и M^-.

Мы скажем, что элемент $G \in M_e$ допускает каноническую факторизацию, если имеет место следующее представление

$$G = G^- G^+\,,$$

где G^+ и G^- имеют обратные элементы и вместе со своими обратными принадлежат соответственно кольцам M_e^+ и M_e^-.

Если коэффициент G допускает каноническую факторизацию, то уравнение (1) для любого $g \in M$ имеет единственное решение; это станет очевидным, если уравнение (1) помножить на $(G^-)^{-1}$, а затем элемент $(G^-)^{-1}g$ представить в виде суммы элементов из подколец M^+ и M^-. Таким образом, представление G в виде канонического произведения влечет решение уравнения (1).

В качестве иллюстрации рассмотрим класс функций, определенных на единичной окружности $|t| = 1$ и удовлетворяющих условию Гельдера с показателем $\alpha < 1$ (класс H_α). Очевидно, что H_α является кольцом с обычным умножением функций. Известно, что это кольцо представляется в виде прямой суммы подколец: $H_\alpha = H_\alpha^+ + H_\alpha^-$, где H_α^+ (H_α^-) совокупность функций из H_α, являющихся предельными значениями функций, аналитических внутри окружности (аналитических вне окружности и исчезающих на бесконечности). Для этого представления существенную роль играет теорема И. И. Привалова, которая утверждает, что сингулярный интеграл с ядром Коши (преобразование Гильберта) от функций из класса H_α принадлежит к тому же классу. Само представление в виде прямой суммы осуществляется по формулам Сохоцкого-Племеля.

В этом случае уравнение (1) является граничной задачей Гильберта. Коэффициент $G(t) \in H_\alpha$ допускает каноническую факторизацию $G = G^+G^-$, если $G(t) \neq 0$ $(|t| = 1)$ и

$$\varkappa = -\operatorname{ind} G(t) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} d_t \arg G(t) = 0 .$$

Действительно, при этих условиях имеем, что $\ln G(t) \in H_\alpha$. Представим $\ln G$ в виде $\ln G = [\ln G]^+ + [\ln G]^-$, где $[\ln G]^+ \in H_\alpha^+$, $[\ln G]^- \in H_\alpha^-$. Отсюда получается, что $G^+ = \exp[\ln G]^+$, $G^- = \exp[\ln G]^-$. (Решение задачи Гильберта при $\varkappa \neq 0$ легко сводится к случаю $\varkappa = 0$).

2. Диссертационная работа состоит из двух глав. Первая глава состоит из трех параграфов. В § 1 исследуется уравнение

$$\varphi(x) - \int\limits_0^\infty k(x-y)\, \varphi(y)\, dy = f(x), \qquad 0 < x < \infty, \qquad (A)$$

в случае, когда $k(x) \in L(-\infty, \infty)$, $f(x) \in L(0, \infty)$, $1 - K(t) \neq 0$, а решение $\varphi(x)$ ищется в пространстве $L(0, \infty)$, где

$$K(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(x)\, e^{ixt}\, dx$$

(ниже заглавные буквы будут обозначать преобразование Фурье функций, обозначаемых соответствующими малыми буквами).

Следуя Винеру и Хопфу [2], рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y)\,\varphi(y)\,dy = f(x) + b(x), \quad \infty < x < \infty, \qquad (A_b)$$

где положено

$$b(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)\,\varphi(y)\,dy \quad \text{при } -\infty < x < 0,$$

$$b(x) = f(-x) = 0 \qquad \text{при } 0 < x < \infty.$$

Легко видеть, что решение уравнения (A), продолженное нулем для отрицательных x, является решением уравнения (A_b) и что все решения уравнения (A_b) получаются таким образом.

Как известно ([6], стр. 107), пространство $L(-\infty, \infty)$ является коммутативным нормированным кольцом, где умножение определено сверткой. Очевидно, что это кольцо представляется в виде прямой суммы подколец L^+ и L^-, где $\varphi^+(x) \in L^+$, если $\varphi^+(x) = 0$ при $x < 0$, а $\varphi^-(x) \in L^-$, если $\varphi^-(x) = 0$ при $x \geqslant 0$. Кольцо, получающееся присоединением единицы к кольцу $L(L^+, L^-)$ обозначим через $L_\delta(L_\delta^+, L_\delta^-)$. В этих обозначениях уравнение (A_b) можно переписать в следующем виде

$$(\delta - k) * \varphi^+ = \varphi^- + f, \qquad (A^*)$$

где δ—единица кольца L_δ, $k \in L$, $f \in L^+$, а φ^+ и φ^- — искомые элементы соответственно из подколец L^+ и L^-.

Уравнение (A^*) является уравнением вида (1) в кольце L. Так как в кольце L умножением является свертка, то естественно воспользоваться преобразованием Фурье, которое свертку функций переводит в обычное произведение функций. Обозначим через $R_0(R_0^+, R_0^-)$ кольцо, получающееся преобразованием Фурье кольца $L(L^+, L^-)$. R_0 является некоторым кольцом (с обычным умножением) непрерывных на всей оси функций, исчезающих на бесконечности. Так как преобразование Фурье линейно и обратимо, то R_0 представляется в виде прямой суммы подколец R_0^+ и R_0^-. Легко видеть, что функция $\Phi^+(t) \in R_0^+$ $(\Phi^-(t) \in R_0^-)$ является предельным значением аналитической в верхней (в нижней) полуплоскости функции, исчезающей на бесконечности. Обозначим через $R(R^+, R^-)$

кольцо, получающееся присоединением единицы (в данном случае она является функцией равной единице на всей оси) к кольцу $R_0(R_0^+, R_0^-)$.

Для удобства читателя приведем формулировки теорем Винера-Леви ([6], стр. 117) и Винера ([7], гл. IV), которые существенны для наших целей.

Теорема Винера-Леви. Пусть $G(z)$—функция, аналитическая в области D, а $\Omega(t)$—функция из кольца R такая, что кривая $z=\Omega(t)$, $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$, лежит внутри D. Тогда вместе с $\Omega(t)$ также и $G(\Omega(t)) \in R$.

Теорема Винера. Пусть $\Omega(t) \in R^+$, а $G(z)$ — аналитическая функция в некоторой области, содержащей все значения функции $\Omega^+(s)$, $s=t+i\tau$, $\tau \geqslant 0$, то также $G(\Omega(t)) \in {}^+R$.

Применяя преобразование Фурье к уравнению (A^*), получаем

$$(1-K(t))\,\Phi^+(t) = \Phi^-(t) + F(t), \quad -\infty < t < \infty, \qquad (H)$$

где $K(t)$, $F(t) \in R_0$, а $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ искомые функции соответственно из R_0^+ и R_0^-.

Уравнение (H) является уравнением вида (1) в кольце R. Факторизация в кольце R делается в точности так же, как в кольце H_α, благодаря теоремам Винера-Леви, Винера и следующей леммы:

Лемма. Для любого $\Omega(t) \in R_0$ и для любого $t_0 \in (-\infty, \infty)$ имеет место равенство

$$H(\Omega) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega(t)}{t-t_0}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) \operatorname{sign} x\, e^{ixt_0}\, dx,$$

где интеграл в левой части понимается в смысле главного значения в точке t_0 и на бесконечности.

Факторизация в кольце R в случае, когда

$$\varkappa = -\operatorname{ind}(1-K(t)) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d_t \arg(1-K(t) = 0,$$

имеет следующий вид

$$1-K(t) = \frac{\chi^+(t)}{\chi^-(t)},$$

где

$$\chi^{\pm}(t) = \exp\left(\pm \ln(1 - K(t)) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - K(t_0))}{t_0 - t}\, dt_0\right).$$

Решение уравнения (H) имеет вид

$$\Phi^{\pm}(t) = \frac{1}{\chi^{\pm}(t)} \left(\pm \frac{1}{2} \chi^{-}(t) F(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi^{-}(t_0) F(t_0)}{t_0 - t}\, dt_0\right),$$

а решение уравнения (A) получается обратным преобразованием Фурье

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi^{+}(t)(e^{ixt} - 1)}{it}\, dt.$$

В случае $\varkappa \neq 0$ уравнение (H) решается в точности так же, как задача Гильберта в кольце H_α.

Однородное уравнение, соответствующее уравнению (A), в случае, когда ядро $k(x)$ экспоненциально убывает на бесконечности, впервые было рассмотрено в известной работе Винера и Хопфа [2].

Так как ядро $k(x)$ экспоненциально убывает, то его преобразование Фурье является функцией, аналитически продолжимой в некоторой полосе; поэтому задачу факторизации приходится решать в кольце функций, аналитических в полосе и тем самым имеется возможность применить аппарат интеграла типа Коши; это обстоятельство использовано в упомянутой работе Винера и Хопфа. Неоднородное уравнение (A) в условиях Винера и Хопфа исследовалось в работах [8], [9].

И. М. Рапопорт [4], впервые обратив внимание на связь уравнения (A) с граничной задачей Гильберта, исследовал уравнение (A) в следующих предположениях: ядро $k(x)$ принадлежит пространствам $L(-\infty, \infty)$ и $L_2(-\infty, \infty)$, а преобразование Фурье ядра, $K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x) e^{ixt}\, dx$, принадлежит классу $Lip\,\alpha$, $\alpha > 0$, при $-\infty < t < \infty$; $K(t) = O(|t|^{-\beta})$, $\beta > 0$, при $|t| \to \infty$. В этих предположениях решение уравнения (A) сводится к решению задачи факторизации в кольце H_α.

М. Г. Крейн [5] исследовал уравнение (A), когда ядро $k(x) \in L(-\infty, \infty)$. Существенно используя теоремы Винера-Хопфа и Винера, М. Г. Крейн исследовал задачу факторизации функции в кольце R. При этом он не пользуется аппаратом сингулярного интеграла с ядром Коши и не дает эффективного решения задачи факторизации в кольце R.

В § 2 исследованы следующие интегральные уравнения:

I. Парное уравнение

$$
\begin{aligned}
&\varphi(x) \quad \int_{\infty}^{\infty} k_1(x-y)\,\varphi(y)\,dy = f(x) \quad \text{при } -\infty < x < 0, \\
&\varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-y)\,\varphi(y)\,dy = f(x) \quad \text{при } 0 < x < \infty.
\end{aligned} \tag{B}
$$

II. Транспонированное уравнение

$$
\varphi(x) - \int_{-\infty}^{0} k_1(x-y)\,\varphi(y)\,dy - \int_{0}^{\infty} k_2(x-y)\,\varphi(y)\,dy = f(x),
$$

$$
-\infty < x < \infty. \tag{C}
$$

В случае, когда $k_1(x)$, $k_2(x)$, $f(x) \in L$, $1 - K_1(t) \neq 0$ и $1 - K_2(t) \neq 0$, решение уравнений (B) и (C) сводятся к задаче факторизации в кольце R.

Некоторые соображения о парном интегральном уравнении имеются в работе И. М. Рапопорта [10]. Ю. И. Черский в работе [11] рассмотрел парное уравнение и его транспонированное в случае, когда ядра принадлежат пространству $L_2(-\infty, \infty)$, а преобразование Фурье ядер удовлетворяют условию Гельдера. Ф. Д. Гахов и Ю. И. Черский в статьях [12], [13] исследовали эти уравнения при специальных предположениях на ядра. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн в работе [14] исследовали эти уравнения в случае, когда ядра принадлежат пространству $L(-\infty, \infty)$. При этом они используют результаты работы М. Г. Крейна [5].

В § 3 настоящей работы рассматриваются уравнения, исследованные в §§ 1 и 2 при предположениях, что правая часть принадлежит различным функциональным пространствам (M, L_p ($p > 1$), C_+, C_+). Доказывается, что решения имеют такой же вид, что и в случае, когда правая часть принадлежит пространству L.

Это доказательство является непосредственным следствием леммы 6.1 работы М. Г. Крейна [5].

Результаты главы I являются совместными с Р. Д. Банцури.

3. Вторая глава состоит их трех параграфов (§§ 4, 5, 6). В гл. I было дано решение уравнения (A) в предположении, что $k(x) \in L(-\infty, \infty)$, $f(x) \in M(0, \infty)$ ($M(a, b)$—пространство ограниченных измеримых функций). Целью § 4 является нахождение и решение граничной задачи Гильберта, соответствующей уравнению (A) при этих же предположениях. А именно, используя преобразование Фурье обобщенных функций, решение уравнения (A) сводится к решению граничной задачи Гильберта для аналитических функций, предельные значения которых являются обобщенными функциями. Полученная задача Гильберта решается по обычной схеме. С этой целью дается определение сингулярного интеграла с ядром Коши (преобразование Гильберта) от обобщенной функции, доказываются формулы Сохоцкого-Племеля для интеграла типа Коши с обобщенными предельными значениями.

В § 5 исследуется уравнение (A) в случае, когда правая часть $f(x)$ принадлежит пространству L_p, $p > 1$. Решение уравнения (4) в этом случае было дано в § 3; здесь мы так же как в § 4, ставим целью нахождение и решение соответствующей граничной задачи Гильберта. Для случая $f(x) \in L_p$, $1 < p \leqslant 2$, используя преобразования Фурье в смысле Планшереля, решение уравнения (А) сводится к решению граничной задачи Гильберта для аналитических функций, предельные значения которых принадлежат пространству L_q, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Полученная задача Гильберта решается по обычной схеме. В случае, когда правая часть принадлежит L_p, $p < 2$, используя преобразование Фурье обобщенных функций, решение уравнения (A) сводится к решению граничной задачи Гильберта с обобщенными предельными значениями. Эта задача также решается по обычной схеме. Задачи Гильберта, полученные в §§ 4, 5 имеют самостоятельный интерес, так как решение некоторых задач плоской теории упругости непосредственно сводится к решению этих граничных задач Гильберта. Пример, подтверждающий этот факт, составляет содержание § 6.

Основные результаты работы опубликованы в статьях [15], [16].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили, Сунгулярные интегральные уравнения, М.-Л., (1962).
2. N. Wiener und E. Hopf, Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, Sitz. Akad. Wiss. Berlin (1931), 696—706.
3. Ф. Д. Гахов, О краевой задаче Римана, Матем., сб. т. 2, (44), № 4, (1937), 673—683.
4. И. М. Рапопорт, Об одном классе сингулярных интегральных уравнений, ДАН 59, № 8 (1948), 1403—1406.
5. М. Г. Крейн, Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, 13, в 5 (83), (1958).
6. И. М. Гельфанд, Д. Н. Райков, Г. Е. Шилов, Коммутативные нормированные кольца, М.-Л., (1960).
7. Н. Винер, Р. Пэли, Преобразование Фурье в комплексной области, М. (1964).
8. E. Reissner, On a class of singuler integral egnations, Journ. Math. Phys. Mass. Inst. Tech. 20 (1941), 219—223.
9. В. А. Фок, О некоторых интегральных уравнениях математической физики, Матем. сб. 14 (56), № 1—2, (1944), 3—50.
10. И. М. Рапопорт, О некоторых парных интегральных и интегро-дифференциальных уравнениях. Сб. Тр. Ин-та матем. АН УССР, № 12, (1949), 102—117.
11. Ю. И. Черский, О некоторых особых интегральных уравнениях, Учен. зап. КГУ, 113, 10 (1953), 43—55.
12. Ф .Д. Гахов и Ю. И. Черский, Особые интегральные уравнения типа свертки и площадная задача типа задачи Римана, Учен. зап. КГУ, 114, 8 (1954), 21—33.
13. Ф. Д. Гахов и Ю. И. Черский, Особые интегральные уравнения типа свертки, Изв. АН СССР, 20, № 1, (1956), 33—52.
14. И. Ц.Гохберг и М. Г. Крейн, Парное интегральное уравнение и его транспонированное, Журн. прикл. и теор. матем. № 1, (1958).
15. Р. Д. Банцури, Г. А. Джанашия, Об уравнениях типа свертки для полуоси, ДАН 155, № 2 (1964), 251—254.
16. Г. А. Джанашия, Об уравнениях типа свертки для полуоси с ограниченной правой частью, Сообщ. АН Груз. ССР, т. XXXVI, № 1, (1964), стр. 11—19.

გ. ჯ ა ნ ა შ ი ა

ნახვევის ტიპის ინტეგრალური განტოლებები და მათი
კავშირი ჰილბერტის ამოცანასთან

(რუსულ ენაზე)

Зак. 835 УЭ 02567 Печатных л. 0,7 Тир. 200

გამომცემლობა „მეცნიერების“ სტამბა, თბილისი, გ. ტაბიძის ქ. № 3/5

Типография Издательства «Мецниереба», Тбилиси, ул. Г. Табидзе 3/5